M.B.L. LIBRARY - WOODS HOLE, MASS.

ACTA

SOCIETATIS SCIENTIARUM

FENNICAE.

TOMUS XXIV.

HELSINGFORSIAE.
Ex officina typographica Societatis litterariae fennicae.
MDCCCXCIX.

ACTA

SOCIETATIS SCIENTIARUM

FENNICAE

TABLE

DES

ARTICLES CONTENUS DANS CE TOME.

Page.

Etat du Personnel de la Société des Sciences de Finlande au 1 Mai 1899 . . . . I.

Liste des Corps savants et des Établissements scientifiques en Russie et à l'étranger auxquelles sont distribuées les publications de la Société des Sciences de Finlande . . . . . VI.

N:o.

1. Analys af muskelkurvor, af K. HÄLLSTÉN.
2. Contributions to the Bryological Flora of the North-Western Himalaya, by V. F. BROTHERUS.
3. Untersuchungen über elektrische Schwingungen, von HJ. TALLQVIST. II.
4. Studien über das Centrale Nervensystem. I. Über das Rückenmark einiger Teleostier, von Dr. RUD. KOLSTER.
5. Beiträge zur Kenntnis der Morphologie und Systematik der Hydrachniden, von ERIK NORDENSKIÖLD.
6. Syntaktische Freiheiten bei Hans Sachs, an seinen Fabeln und Schwänken und Fastnachtspielen dargestellt von EDWIN HAGFORS. I.
7. Remarques sur un principe général de la théorie des fonctions analytiques, par ERNST LINDELÖF.
8. Recherches sur les polyèdres maxima, par L. LINDELÖF.
9. Ueber Oxytrimethylbernsteinsäure und ihre Abkömmlinge, von GUST. KOMPPA. (Erste Mittheilung).
10. Über eine Verallgemeinerung der Riemannschen Function $\zeta(s)$, von HJ. MELLIN.
11. Ueber das Decrement elektrischer Schwingungen bei der Ladung von Condensatoren, von A. F. SUNDELL.

Minnestal öfver vicebibliotekarien professor Sven Gabriel Elmgren. Hållet vid Finska Vetenskaps-Societetens årsdag den 29 April 1898 af K. E. F. IGNATIUS.

A ce Tome appartiennent 20 planches.

45687

ETAT DU PERSONNEL

DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE FINLANDE

AU 1 MAI 1899.

MEMBRES HONORAIRES.

M. OTTO BÖTHLING, Conseiller privé, Membre honoraire de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg.

M. le Baron NICOLAS-ADOLPHE-ERIC NORDENSKIÖLD, D:r en phil., Professeur de minéralogie à l'Académie Royale des Sciences de Stockholm.

M. CHARLES HERMITE, Professeur à la Sorbonne, Membre de l'Académie des Sciences de l'Institut de France.

M. JEAN-DANIEL-CHARLES LIEBLEIN, Professeur à l'Université de Christiania.

M. CHARLES-HERMANN-AMANDUS SCHWARZ, Professeur à l'Université et Membre de l'Académie Royale des Sciences de Berlin.

M. JOSEPH-L.-FRANÇOIS BERTRAND, Membre et Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences de l'Institut de France.

M. HENRI WILD, Conseiller d'état actuel, Ci-devant Directeur de l'Observatoire physique central de St.-Pétersbourg.

M. JEAN VISLICENUS, Professeur de chimie à l'Université de Leipzic.

M. LORD KELVIN, Professeur de Physique à l'Université de Glasgow.

M. GASTON DARBOUX, Professeur à la Sorbonne, Membre de l'Académie des Sciences de l'Institut de France.

M. OSCAR BACKLUND, Conseiller d'état actuel, Directeur de l'Observatoire de Poulkova.

MEMBRES ORDINARES.

I. Section des sciences mathématiques et physiques.

M. Laurent-Léonard Lindelöf, D:r ès-sciences, Conseiller d'état actuel, Directeur général de l'Administration centrale des écoles, ancien professeur de mathématiques à l'Université Alexandre. (Secrétaire perpétuel de la Société).

M. Frédéric-Jean Wiik, D:r en phil., Ancien professeur de minéralogie à l'Université Alexandre.

M. Gustave Mittag-Leffler, D:r en phil., Professeur de mathématiques à l'Université de Stockholm.

M. Charles-Sélim Lemström, D:r en phil., Professeur de physique à l'Université Alexandre.

M. Auguste-Frédéric Sundell, D:r en phil., Professeur extraordinarie de physique à l'Université Alexandre.

M. Edouard-Immanuel Hjelt, Professeur de chimie à l'Université Alexandre.

M. Edouard-Rodolphe Neovius, D:r en phil., Professeur de mathématiques à l'Université Alexandre.

M. André-Sévérin Donner, D:r en phil., Professeur d'astronomie à l'Université Alexandre.

M. le Baron Auguste-Benjamin af Schultén, D:r en phil., Professeur agrégé de chimie à l'Université Alexandre.

M. Victor-Théodore Homén, D:r en phil., Professeur de physique à l'Université Alexandre.

M. Adolphe-Ossian Aschan, D:r en phil., Professeur agrégé de chimie à l'Université Alexandre.

M. François-Charles-Otto-Auguste-Ernest Biese, Directeur de l'Institut météorologique central.

M. Guillaume Ramsay, D:r en phil., Professeur de minéralogie à l'Université Alexandre. (Élu le 20 Avril 1897).

M. Hjalmar Mellin, D:r en phil., Professeur de mathématiques à l'Institut polytechnique. (Élu le 21 Novembre 1898).

M. Charles-Frédéric Slotte, D:r en phil., Professeur de physiques à l'Institut polytechnique. (Élu le 21 Novembre 1898).

II. Section d'histoire naturelle.

M. Otto-Edouard-Auguste Hjelt, D:r en méd., Archiâtre, ancien professeur d'anatomie pathologique à l'Université Alexandre.

M. Odo-Morannal Reuter, D:r en phil., Professeur extraordinarie de zoologie à l'Université Alexandre.

M. Pierre-Adolphe Karsten, D:r ès-sciences, Professeur de botanique à l'Institut d'agriculture de Mustiala.

M. Conrad-Gabriel Hällstén, D:r en méd., ancien professeur de physiologie à l'Université Alexandre.

M. le Baron Jean-Axel Palmén, D:r en phil., Professeur de zoologie à l'Université Alexandre.

M. Jean-Pierre Norrlin, D:r en phil., Professeur e. o. de botanique à l'Université Alexandre.

M. Ernest-Alexandre Homén, D:r en méd., Professeur d'anatomie patologique à l'Université Alexandre.

M. Jean-Rénauld Sahlberg, D:r en phil., Professeur e. o. d'entomologie à l'Université Alexandre.

M. Frédéric-Emil-Wolmar Elfving, D:r en phil., Professeur de botanique à l'Université Alexandre.

M. Alfred-Osvald Kihlman, D:r en phil., Professeur e. o. de botanique à l'Université Alexandre.

M. Jean-Guillaume Runeberg, D:r en méd., Professeur de médecine à l'Université Alexandre.

M. Victor-Ferdinand Brothérus, Licencié en phil., Professeur de mathématiques et d'histoire naturelle à l'école de demoiselles suédoise de Helsingfors. (Élu le 17 Avril 1899).

III. Section d'histoire et de philologie.

M. Jean-Jacques-Guillaume Lagus, D:r en phil., Conseiller d'état, Ancien professeur de littérature grecque à l'Université Alexandre.

M. George-Zacharie Yrjö-Koskinen, D:r en phil., Sénateur, ancien professeur d'histoire à l'Université Alexandre.

M. Charles-Gustave Estlander, D:r ès-lettres, Conseiller de chancellerie, ancien professeur d'esthétique et de littérature moderne à l'Université Alexandre.

M. Jean Gustave Frosterus, D:r ès-lettres, Professeur, Inspecteur général à l'Administration centrale des écoles.

M. Otto Donner, D:r en phil., Professeur extraordinaire de sanscrit et de linguistique comparée à l'Université Alexandre.

M. Axel-Olof Freudenthal, D:r en phil., Professeur extraordinaire de langue et littérature suédoises à l'Université Alexandre.

M. Charles-Emile-Ferdinand Ignatius, D:r en phil., Sénateur.

M. Jean-Rénaud Aspelin, D:r en phil., Professeur extraordinaire d'Archéologie à l'Université Alexandre.

M. Charles Synnerberg, D:r en phil., Conseiller de chancellerie, Inspecteur général à l'Administration centrale des écoles.

M. Charles-Constantin Tigerstedt, D:r en phil., ancien professeur d'histoire au lycée d'Åbo.

M. Jean-Richard Danielson, D:r en phil., Professeur d'histoire universelle à l'Université Alexandre.

M. Arvid-Oscar-Gustave Genetz, D:r en phil., Professeur de langue et littérature finnoises à l'Université Alexandre.

M. Magnus-Gottfrid Schybergson, D:r en phil., Professeur e. o. d'histoire à l'Université Alexandre.

M. Charles-Gabriel-Thiodolphe Rein, D:r en phil., Conseiller d'état actuel, Vice-Chancelier ad intérim de l'Université Alexandre. (Élu le 20 Avril 1897).

MARINE BIOLOGICAL LABORATORY WOODS HOLE LIBRARY

DÉCÉDÉS DEPUIS LE 1 NOVEMBRE 1896.

Membres honoraires:

M. Jean-Auguste-Hugo Gyldén, † le 9 Novembre 1896.
M. Charles Weierstrass, † 19 Février 1897.
M. Gustave Wiedemann, † le 23 Avril 1899.
M. Guillaume Nylander, † le 29 Avril 1899.

Membres ordinaires:

M. André-Jean Malmgren, † le 12 Avril 1897.
M. Sven-Gabriel Elmgren, † le 3 Novembre 1897.
M. Evert-Jules Bonsdorff, † le 31 Juillet 1898.

LISTE

des

Corps savants et des Établissements scientifiques en Russie et à l'étranger auxquels sont distribuées les publications de la Société des Sciences de Finlande.

RUSSIE.

Dorpat.
- Société des Naturalistes.
- Société scientifique Este.

Iékaterinenbourg. Société Ouralienne d'amateurs des sciences naturelles.

Kasan. Société physico-mathématique à l'Université.

Kiew. Société des Naturalistes.

Moscou.
- Société Impériale des Naturalistes.
- Société mathématique.
- Société Impériale d'amateurs des sciences naturelles, d'anthropologie et d'ethnographie.

St.-Pétersbourg.
- Académie Imperiale des Sciences.
- Observatoire astronomique central de Poulkova.
- Observatoire physique central.
- Société minéralogique.
- Société Impériale de géographie.
- Bibliothèque publique Impériale.
- Jardin Impérial de botanique.
- Comité géologique.
- Institut Impérial de médicine expérimentale.

Tiflis. Observatoire météorologique.

Varsovie. La Rédaction des Travaux mathématiques.

Les Universités Impériales de Charkow, Dorpat, Kasan, Kiew, Moscou, Odessa, St.-Pétersbourg et de Varsovie.

SUÈDE et NORVÈGE.

Bergen. Bergens museum.
Christiania. Université Royale.
Gotenbourg. Société Royale des sciences et des lettres.
Lund. Université Royale.
Stockholm.
- Académie Royale des sciences.
- Académie Royale Suédoise.
- Académie Royale des belles-lettres, de l'histoire et des antiquités de Suède.
- Bibliothèque Royale.
- Bureau des recherches géologiques de la Suède.
- Bureau Nautique Météorologique.
- Université (Stockholms Högskola).

Tromsö. Tromsö Museum.
Trondhjem. Société Royale des sciences.
Upsal.
- Université Royale.
- Société Royale des sciences.

DANEMARK.

Copenhague.
- Université Royale.
- Société Royale des sciences.

ALLEMAGNE et AUTRICHE.

Agram.
- Société archéologique Croate
- Société d'histoire naturelle Croate.

Augsburg. Historischer Verein für Schwaben und Neuburg.
Bamberg. Naturforschender Verein.
Berlin.
- Königliche Akademie der Wissenschaften.
- Hydrographisches Amt der Kaiserlichen Marine.
- Königlich-Preussisches Meteorologisches Institut.

Bistritz. Gewerbeschule.
Bonn. Naturhistorischer Verein der Preussischen Rheinlande und Westfalens.
Braunschweig. Verein für Naturwissenschaft.
Bremen. Naturwissenschaftlicher Verein.
Brünn. Naturforschender Verein.
Budapest. Ungarische Akademie.

Cassel. Verein für Naturkunde.
Charlottenburg. Physikalisch-Technische Reichsanstalt.
Chemnitz. Verein für Chemnitzer Geschichte.
Dürkheim. Pollichia, ein Naturwissenschaftlicher Verein der Rheinpfalz.
Dresden. { Kaiserl. Leopoldino-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher.
Königliche Oeffentliche Bibliothek.
Elberfeld. Naturhistorischer Verein.
Erlangen. Physikalisch-medicinische Societät.
Frankfurt a/M. Senckenbergische naturforschende Gesellschaft.
Freiberg. Altherthums Verein.
Görlitz. Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften.
Göttingen Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.
Giessen. Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.
Graz. Historischer Verein für Steiermark.
Greifswald. Naturwissenschaftlicher Verein von Neuvorpommern und Rügen.
Halle. Naturforschende Gesellschaft.
Hamburg. { Verein für Naturwissenschaftliche Unterhaltung.
Deutsche Seewarte.
Jena. Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft.
Kiel. Kongl. Christian-Albrechts-Universitetet.
Klagenfurt. Naturhistorisches Landesmuseum von Kärnthen.
Königsberg. Königl. Physikalisch-ökonomische Gesellschaft.
Leipzig. { Königl. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.
Fürstlich-Jablonowskische Gesellschaft.
Astronomische Gesellschaft.
Verein für Erdkunde.
München. Königl. Bayerische Akademie der Wissenschaften.
Nürnberg. Germanisches Museum.
Offenbach. Verein für Naturkunde.
Potsdam. Observatoire astrophysique.
Prag. { Königl. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.
Académie tchèque des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts.
Presburg. Verein für Naturkunde.
Regensburg. Zoologisch-mineralogischer Verein.
Sarajevo. Bosnisch-Herzegovinisches Landesmuseum.
Strassburg. L'Université.
Triest. { Società Adriatica di scienze naturali.
K. K. Handels- und Nautische Akademie.

Ulm. Verein für Kunst und Alterthümer in Ulm und Oberschwaben.

Wien.
- Kaiserl. Akademie der Wissenschaften.
- K. K. geologische Reichsanstalt.
- K. K. geographische Gesellschaft.
- K. K. Zoologisch-botanische Gesellschaft.
- Anthropologische Gesellschaft.
- Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse.
- K. K. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus.
- Naturhistorisches Hofmuseum.

Wiesbaden. Verein für Naturkunde.

Würzburg. Physikalisch-medicinische Gesellschaft.

SUISSE.

Bern. Die Schweizerische Entomologische Gesellschaft.

Genève. Société de physique et d'histoire naturelle.

Zürich.
- Naturforschende Gesellschaft.
- Die Schweizerische Meteorologische Commission.

PAYS-BAS et BELGIQUE.

Amsterdam.
- Académie Royale des sciences.
- Kon. Zoologisch Genootshap „Natura artis magistra".

Bruxelles.
- Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.
- Société malacologique de Belgique.
- Société entomologique de Belgique.
- Observatoire Royal.
- Institut international de Bibliographie.

Delft. L'école Polytechnique.

Harlem. Fondation de P. Teyler van der Hulst.

Liége.
- Société Royale des sciences.
- Société géologique de Belgique.

Utrecht. L'institut Royal météorologique des Pays-Bas.

FRANCE.

Bordeaux. Société des sciences physiques et naturelles.

Caen. Société Linnéenne de Normandie.

Cherbourg. Société des sciences naturelles.

Lille. l'Université.

Lyon.
- Académie des sciences, belles-lettres et arts.
- Société d'agriculture, histoire naturelle et arts utiles.
- Société Linnéenne.

Marseille. Faculté des Sciences.

Montpellier. Académie des sciences et lettres.

Nancy. Société des sciences naturelles.

Paris.
- Académie des Sciences de l'Institut de France.
- Société mathématique de France.
- École Polytechnique.
- Musée Guimet.
- Société de géographie.
- Museum d'histoire naturelle.

Toulouse. Faculté des Sciences.

ITALIE.

Palermo. Circolo matematico.

Pisa. Ecole normale supérieure.

Rome.
- Reale Accademia dei Lincei.
- Specula Vaticana.

Turin. Açadémie Royale des Sciences.

GRANDE-BRETAGNE et IRLANDE.

Cambridge. Philosophical Society.

Dublin.
- Royal Irish Academy.
- Royal Society of Dublin.

Edinburg. Royal Society of Edinburg.

Liverpool. Litterary and philosophical Society.

London.
- Royal Society of London.
- Royal astronomical Society of London.
- Zoological Society.
- Meteorological Office.
- Geographical Society.
- The Patent Office Library.

Manchester. Litterary and philosophical Society.

Oxford. Bodleian Library.

ÉTATS UNIS DE L'AMÉRIQUE DU NORD.

Albany. New York State Library.
Austin. Texas Academy of Science.
Baltimore. Johns Hopkins University.
Boston. American Academy of Arts and Sciences.
Society of Naturalhistory.
Cambridge, Mass. Museum of Comparative Zoology at Harvard College.
Lawrence. The University of Kansas.
Madison. Wisconsin agricultural Society.
New-Haven. Connecticut Academy of Arts and Sciences.
New-York. American Museum of Natural History.
New-Orleans. Academy of Natural Sciences.
Philadelphia. Academy of Natural Sciences.
„ The American Philosophical Society.
St.-Francisco. California Academy of Natural Sciences.
Topeka. Kansas Academy of Science.
Washington. Smithsonian Institution.
U. S. Department of Agriculture.
The Office U. S. Geological Survey of the Territories.
U. S. Naval Observatory.
Anthropological Society.
Bureau of Education.
Bureau of Ethnology.

CANADA.

Halifax. Nova Scotian Institute of Natural Science.
Montreal. Geological and Natural History Survey.
Toronto. Canadian Institute.

LA RÉPUBLIQUE ARGENTINE.

Córdova. Academia Nacional de ciencias de la Republica Argentina.

CHILI.

Santiago. Société scientifique du Chili.

INDES ORIENTALES.

Calcutta. The Asiatic Society of Bengal.
Madras. Madras Litterary Society.
Singapore. The Straits Branch of the Royal Asiatic Society.

JAPON.

Tokio. College of Science. Imperial University.
Yokohama. The Asiatic Society of Japan.

AUSTRALIE.

Sidney. { Royal Society of New South Wales.
Linnean Society of New South Wales.
Wellington. Colonial Museum of New Zealand.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ.
TOM. XXIV. № 1.

ANALYS AF MUSKELKURVOR.

AF

K. HÄLLSTÉN.

(ANMÄLD I SOCIETETEN DEN 17 MAJ 1897.)

INNEHÅLL.

Pag.

Inledning 3

I. **Muskeln verkar på en fritt hängande vigt.**

1. Eqvationen för rörelsen 6
2. Muskelkraften 7
3. Muskelns mekaniska energi 8
4. Tidpunkten för muskelkraftens upphörande 11

II. **Muskeln verkar på en häfstång.**

1. Eqvationen för rörelsen 13

1:o. *Muskelkraftens momentarm förblifver oförändrad under kontraktionen.*

2. Försökens anordning 16
3. Muskelkraften 17
4. Muskelns mekaniska energi 18
5. Tidpunkten då muskeln upphör att verka på systemet 20
6. Speciella fall af det allmänna 20

2:o. *Muskelkraftens momentarm förändras under kontraktionen till storlek och riktning.*

7. Geometriska förhållanden 24
8. Muskelkraften 26
9. Den frambragta mekaniska energin 26

III. **Undersökningsmetoden.**

1. Tangentiel skrift. Plan skrifyta 29
2. Muskelkurvan i polarkoordinater 30
3. Muskelkurvan i rätvinkliga koordinater 31
4. Plan för undersökningens utförande 31

IV. **Apparaterna.**

1. Myografen och dess stativ 35
2. Skrifytan och dertill hörande apparater 38
3. Apparaten för utförande af mätningarna 39
4. Apparaternas noggrannhet 42
5. Konstanterna för beräkningarna 46

V. **Utförandet af försöken och mätningarna.**

1. Försöken 50
2. Mätningarna 52
3. Noggrannheten vid undersökningens utförande 53
4. Beräkningarna 53

VI. Muskelkurvan; geometriska och kinematiska förhållanden.

1. Beteckningar 55
2. Koordinatsystemet 56
3. Allmänna eqvationer 57
4. Vinkeln Θ 61
5. Vridningarnas sammansättning 64
6. Afstånden från momentancentrum till de ursprungliga vridningspunkterna och kurvpunkten 65
7. Momentancentra vid de på hvarandra följande lägena för det rörliga systemet . . 68
8. Vinkelaccelerationen ω' 71
9. Anmärkningsvärda punkter på muskelkurvan 72
10. Accelerationen i punkten xy af muskelkurvan 79

VII. Utförandet af beräkningarna. Tillämpning.

1. Vinkelhastigheten ω 82
2. Vinkelaccelerationen ω' 82
3. Energin E 83
4. Muskelkraften Q 83
5. Tillämpning 83

Rättelser:

Pag. 11, rad 8 nedifrån står: uppförande, skall vara: upphörande.
„ 15, „ 8 „ „ bracchii, „ „ brachii.
„ 17, till eqvationen 11 b är att tilläggas: $= 0$.
„ 18, är sista eqvationen signerad med: 12, skall vara: 12 a.
„ 71, rad 10 nedifrån står: ds, skall vara: ds_0.

Inledning.

Redan de första muskelkurvor som för fyra, snart fem decennier sedan uppdrogos af v. Helmholtz lemnade vigtiga upplysningar i afseende på muskelkontraktionen; bland annat kunde häraf tidpunkterna bestämmas för de olika lägen det rörliga system på hvilket muskeln verkar, genomlöper. Sedan dess hafva då och då af skilda forskare på olika sätt försök blifvit gjorda, att af muskelkurvan vinna nya upplysningar i afseende på muskelkontraktionen. Dessa sträfvanden hafva betecknats med uttrycket analys af muskelkurvor, understundom äfven med uttrycket „matematisk“ analys med afseende på den matematiska metod som för ändamålet blifvit inslagen.

Dessa försök att analysera muskelkurvor ledde till en början icke till synnerliga resultat, tills slutligen för ungefär fem, sex år sedan Hr Starke uppvisade att verkligen nya upplysningar af icke ringa vetenskapligt intresse på denna väg kunna vinnas. Den undersökningsmetod Hr Starke använde, må här främst egnas uppmärksamhet, emedan vi afse, att i förevarande afhandling tillämpa den idé som ligger till grund för i fråga varande metod.

Hr Starke ville utreda det inflytande tröghetsmomentet hos det rörliga system som af en muskel försättes i rörelse kring en axel, utöfvar på af muskeln produceradt arbete och värme [1]). För utredning af vissa delar i den föreliggande frågan tillämpade Hr Starke på det rörliga system som skrifarmen jemte dervid fixerade delar i den begagnade myografen bilda, den bekanta sats som utsäger att då en kropp vrider sig kring en axel med förändérlig vinkelhastighet, så är vinkelaccelerationen lika med förhållandet mellan

---

[1]) *Paul Starke:* Arbeitsleistung und Wärmeentwickelung bei der verzögerten Muskelzuckung. Bd XVI der Abhandl. der mathem.-physisch. Class. der Königl. Sächs. Gesellsch. der Wiss Leipzig 1890. (Undersökningen utfördes med understöd af „Elizabeth Thompson Science Fund“ Boston, Massachusetts.)

summan af de vridningsmoment som åstadkomma rörelsen, och det i fråga varande systemets tröghetsmoment, eller analytiskt uttryckt att

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{D}{T} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1.$$

der ω betecknar vinkelhastigheten, $\frac{d\omega}{dt}$ således vinkelaccelerationen, D summan af vridningsmomenten och T det rörliga systemets tröghetsmoment med afseende på vridningsaxeln. Af de qvantiteter som ingå i denna eqvation beror tröghetsmomentet T helt och hållet af det rörliga systemet och kan genom lämpliga anordningar gifvas ett och samma värde oberoende af systemets läge. Vridningsmomentet D åter sammansättes af tvenne delar, muskelkraftens moment och moment tillfölje af andra utifrån verkande krafter; af dessa är det förra till storleken obekant och dertill i hvarje ögonblick föränderligt; de senare momenten deremot tillhöra anordningarna och kunna derföre liksom tröghetsmomentet anses vara kända eller bestämbara. Slutligen vinkelhastigheten ω och vinkelaccelerationen $\frac{d\omega}{dt}$ kunna i hvarje ögonblick af muskelkontraktionen eller hvarje läge för systemet till storleken bedömas eller beräknas af muskelkurvan. Under sådana förhållanden kan muskelkraftens moment för hvarje ögonblick beräknas af denna eqvation; och då tillika momentarmen för muskelkraftens vridningsmoment kan bestämmas, så fås häraf värdet för muskelkraftens storlek i det i fråga varande ögonblicket. Af vinkelhastigheten ω kan tillika hastigheten hvarmed den rörliga änden af muskeln rör sig, bestämmas, samt af vinkelaccelerationen $\frac{d\omega}{dt}$ förändringen i nyssnämnda hastighet.

Här må ännu tilläggas att för lösande af den speciella uppgift undersökningen afsåg, hade det rörliga systemets vridningsaxel horizontalt läge och massmedelpunkten för de i detta system fixt med hvarandra förenade delarna låg på denna axel; tillika fick en skild vigt förmedelst en tråd, som var virad kring en på systemets axel fästad rulle, åstadkomma muskelns belastning. För utförande slutligen af beräkningarna mättes för ett antal punkter af muskelkurvan, uppdragen på en roterande cylinder, koordinaterna i ett på enkelt sätt valdt rätvinkligt axelsystem; beräkningarna voro i hufvudsak tillämpning af så kallad interpolationsräkning.

Ringa uppmärksamhet synes denna undersökningsmetod hittills hafva tillvunnit sig af andra forskare; veterligen är Hr Santesson [1]) i Stockholm den ende som förmedelst denna metod försökt analysera muskelkurvor.

[1]) *C. G. Santesson:* Studier i muskelns allmänna mekanik. Akademisk afhandling. Stockholm 1890, pag. 153—210.

Det synes vara sjelffallet att om den här i korthet refererade undersökningsmetoden i ett specielt fall eller vid en speciel anordning af försöken kunnat lemna upplysningar i afseende å muskelkontraktionen, så bör samma metod äfven i andra fall eller vid andra anordningar af försöken göra det. A andra sidan synes det vara likaså sjelffallet att undersökningarna måste gestalta sig något olika allt efter de olika förhållanden under hvilka muskeln verkar på det rörliga systemet; man måste kortligen åtskilja olika fall och undersöka huru förhållandena i hvarje fall gestalta sig. Det är denna uppgift vi här främst uppställa till besvarande; vi upptaga här sådana anordningar som på enkelt sätt låta det inflytande framträda det rörliga systemet utöfvar på muskelkurvan. Härvid afse vi till en början och hufvudsakligen i afdelningarna I och II systemets rörelse ensam för sig, mindre deremot det samband i hvilket denna rörelse står med muskelkurvan, för att längre fram i afdelningarna III och VI egna sistnämnde fråga uppmärksamhet. I de öfriga afdelningarna IV, V och VII göres reda för de apparater och anordningar som för undersökningarnas utförande kommit till användning, vidare utförandet af den experimentella undersökningen, mätningarna och beräkningarna; slutligen anföras några tillämpningar.

Vid dessa undersökningar öfverhufvud tänkes muskeln vara fixerad från dess ena, öfre ände så att den hänger i vertikal riktning, och dess nedre ände vara belastad med en fritt hängande vigt eller förenad med ett kring en horizontal axel rörligt system; vigten i förra fallet eller axeln i senare fallet tänkes vidare förenad med en skrifarm för uppdragande af muskelkurvan på en vertikalt ställd skrifyta, hvilken till en början här antages röra sig i horizontal riktning med konstant hastighet.

I.

Muskeln verkar på en fritt hängande vigt.

I öfverensstämmelse med nyss nämnda förutsättningar antaga vi att vid muskelns nedre ände är fästad en vigt förmedelst en lämplig hake jemte tråd, att vidare från vigten utgår en skrifarm i horizontal riktning; denna skrifarm tänkes under muskelns förkortning röra sig parallelt med sig sjelf i ett och samma vertikalplan samt dervid teckna muskelkurvan på en vertikalt ställd skrifyta. Utförandet af verkliga försök under dessa förhållanden möter visserligen svårigheter, emedan det rörliga systemet (vigten jemte skrifarmen) vid muskelkontraktionen försättes i rörelse ej blott i riktningen af vertikalen, utan äfven åt sidorna, och derföre den uppdragna muskelkurvan ej har kontinuerligt och regelbundet förlopp. Men den teoretiska behandlingen af detta fall gestaltar sig relativt enkelt; denna anordning är derföre egnad att på möjligast enkla sätt gifva öfversigt af de förhållanden som möta vid undersökningar af i fråga varande slag eller vid analys af muskelkurvor öfverhufvud. Af denna orsak ställa vi här detta fall främst.

1. *Eqvationen för rörelsen.* De krafter som verka på vigten äro muskelkraften och tyngdkraften; den förra må betecknas med Q, den senare med Mg, der M betecknar massan för hela det rörliga systemet (vigten jemte skrifarmen) och g accelerationen tillfölje af tyngdkraften. Dessa krafter verka här i samma vertikal, men i motsatt riktning; tages derföre Q, som verkar uppåt, såsom positiv, så hafva dessa krafter till resultant

$$Q - Mg.$$

Vidare må muskelns förkortning i ett visst ögonblick betecknas med y; då betecknar y tillika det vägstycke massmedelpunkten för hela det rörliga

systemet tillryggalagt intill det i fråga varande ögonblicket; dermed betecknar $\frac{dy}{dt}$ hastigheten och $\frac{d^2y}{dt^2}$ accelerationen för massmedelpunkten vid samma tidpunkt. Den kraft som verkar på det rörliga systemets massmedelpunkt bestämmes derföre jemväl af uttrycket $M\frac{d^2y}{dt^2}$. De båda uttrycken för kraften som verkar på systemet, gifva sålunda

$$M\frac{d^2y}{dt^2} = Q - Mg \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2.$$

I denna eqvation kan koefficienten $\frac{d^2y}{dt^2}$ och öfriga differentialkoefficienter af olika ordning af y med afseende på tiden förmedelst muskelkurvan uttryckas på annat sätt; för ändamålet bestämmas kurvpunkterna förmedelst ett rätvinkligt axelsystem, hvars ordinater förlöpa i vertikal riktning, och abskissaxel sammanfaller med den horizontala linie som skrifstiftet uppdrager förrän kontraktionen börjar. Då enligt förutsättningen skrifarmen här rör sig parallelt med sig sjelf i ett vertikalplan, så är ordinatan för kurvan lika med muskelns förkortning eller lika med massmedelpunktens för det rörliga systemet samtidiga höjning och har sålunda värdet y. Åter den motsvarande abskissan x kan uttryckas genom relationen

$$x = ct. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3.$$

der c betecknar skrifytans konstanta hastighet, och t räknas från ett godtyckligt ögonblick, t. ex. från det då retningen sker. Af denna relation fås

$$dx = cdt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3_a.$$

och således

$$\frac{dy}{dt} = c\frac{dy}{dx} \quad ; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = c^2\frac{d^2y}{dx^2} \quad ; \quad \frac{d^3y}{dt^3} = c^3\frac{d^3y}{dx^3} \quad \ldots\ldots\ldots 4.$$

De successiva koefficienterna af y med afseende på tiden kunna sålunda uttryckas förmedelst motsvarande successiva koefficienter för kurvan.

2. *Muskelkraften.* Löses eqvationen 2 med afseende på Q, så fås

$$Q = Mg + M\frac{d^2y}{dt^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 5.$$

Denna eqvation bestämmer muskelkraftens storlek vid tidpunkten t, sedan nemligen M och Mg samt $\frac{d^2y}{dt^2}$ för den i fråga varande tidpunkten blifvit till sina värden bestämda.

Några specialvärden för muskelkraften Q kunna förmedelst denna relation närmare bestämmas. Eqvationen visar att

$$Q = Mg\,,\ \text{då}\ \frac{d^2y}{dt^2} = 0\,;$$

detta inträffar till en början sålänge muskeln är i hvila eller sålänge kontraktion icke inträdt. — Koefficienten $\frac{d^2y}{dt^2}$ antager vidare värdet noll i en inflexionspunkt å kurvan, emedan i en sådan punkt koefficienten $\frac{d^2y}{dx^2}$ har värdet noll, och således enligt eqvationen 4 jemväl $\frac{d^2y}{dt^2}$ samma värde. I en sådan punkt återtager sålunda muskelkraften det ursprungliga värdet Mg, såsom v. Helmholtz redan år 1850 framhöll. Muskelkraften uppnår vidare ett maximalt värde i det läge för hvilket $\frac{dQ}{dt} = 0$, d. v. s. $\frac{d^3y}{dt^3} = 0$. Slutligen då muskeln upphör att verka på systemet är $Q = 0$, d. v. s. $Mg + M\frac{d^2y}{dt^2} = 0$.

3. *Muskelns mekaniska energi.* Till dessa förhållanden: bestämning af de successiva koefficienterna af y och dermed af den hastighet hvarmed muskelns nedre, fria ände under kontraktionen rör sig mot den öfre, samt af förändringen i denna hastighet eller accelerationen, och slutligen bestämning af muskelkraftens storlek i olika tidsmoment hänförde sig de ofvannämnda af Hr Starke för en speciel anordning utförda undersökningarna (till hvilka vi för öfrigt längre fram återkomma).

Den allmänna eqvationen 2 eller 5 låter dertill bestämma några andra omständigheter, som likaså äro af betydelse för kännedomen af muskelkontraktionen. Multipliceras nemligen det värde Q muskelkraften antager vid tidpunkten t med den elementära förkortning dy muskeln i det närmast följande tidselementet dt undergår, så är produkten Qdy uttrycket för elementet af den mekaniska energi som muskeln under det i fråga varande tidselementet dt tillfölje af kontraktionen meddelar systemet. Elementet dE för denna mekaniska energi uttryckes sålunda enligt eqvationen 5 förmedelst relationen

$$dE = Qdy = Mgdy + M\frac{d^2y}{dt^2}dy\,.$$

Häraf fås uttrycket för hela den mekaniska energi muskeln meddelar systemet mellan gränserna y_1 och y_2 för förkortningen y

$$E = \int_{y_1}^{y_2} Q dy = \int_{y_1}^{y_2} Mg dy + \int_{y_1}^{y_2} M \frac{d^2y}{dt^2} dy .$$

Här har första termen i högra membrum värdet

$$\int_{y_1}^{y_2} Mg dy = Mg (y_2 - y_1)$$

och betecknar det mekaniska arbete muskeln utfört under det dess förkortning tillväxt från y_1 till y_2. I den senare termen i högra membrum åter är

$$\frac{d^2y}{dt^2} dy = \frac{d^2y}{dt^2} \frac{dy}{dt} dt = \frac{1}{2} \frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{dt} dt = \frac{1}{2} dv^2 ,$$

då nemligen v har värdet

$$v = \frac{dy}{dt}$$

och således betecknar systemets eller dess massmedelpunkts hastighet i vertikal riktning. Den senare termen antager härmed utseendet

$$\int_{y_1}^{y_2} M \frac{d^2y}{dt^2} dy = \int_{v_1}^{v_2} \frac{M dv^2}{2} = \frac{M (v^2{}_2 - v^2{}_1)}{2} ,$$

der v_1 och v_2 beteckna de mot ordinaterna y_1 och y_2 svarande värdena för hastigheten v. Då vidare $\frac{Mv^2}{2}$ är uttrycket för den i fråga varande massans eller det rörliga systemets lefvande kraft eller rörelse, så bestämmer föregående uttryck tillväxten i systemets lefvande kraft under det muskelns förkortning tillväxt från värdet y_1 till y_2.

Eqvationen för den mekaniska energi E som af muskelkraften här frambragts är sålunda

$$E = \int_{y_1}^{y_2} Q dy = Mg (y_2 - y_1) + \frac{M (v^2{}_2 - v^2{}_1)}{2} , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6.$$

och utsäger blott att den mekaniska energi som muskeln under kontraktionen meddelar systemet, användes till eller kommer i dagen såsom arbete och rörelse i systemet, — ett sakförhållande som är så att säga sjelfklart; båda dessa summander, arbetet och rörelsen, kunna vidare bestämmas till deras storlek af eqvationen 6 genom att af muskelkurvan härleda värdena för de resp. ordinaterna y och hastigheterna v.

Förlägges vidare nedre gränsen y_1 resp. v_1 till det ögonblick kontraktionen begynner, så är y_1 och v_1 lika med noll, och den föregående eqvationen blifver

$$\int_0^y Q dy = Mgy + \frac{Mv^2}{2};$$

detta är sålunda uttrycket för hela den mekaniska energi muskeln meddelat systemet intill det ögonblick t, då muskelns förkortning är y och systemets hastighet v.

I en viss punkt af kurvan, nemligen i dess uppstigande del eller skenkel, upphör muskeln att verka på systemet; den tidpunkt då detta inträffar må betecknas med τ, koordinaterna för de motsvarande punkterra på muskelkurvan med x_τ y_τ samt hastigheten som systemet i detta ögonblick har med v_τ; då är af föregående eqvation

$$E_\tau = \int_0^{y_\tau} Q dy = Mgy_\tau + \frac{Mv_\tau^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots 7.$$

uttrycket för hela den mekaniska energi E_τ som under kontraktionen meddelats systemet.

Från denna tidpunkt τ fortsätter systemet sin rörelse tillfölje af den hastighet v_τ det har. Det är lätt att förstå huru denna rörelse gestaltar sig, ty här är numera blott fråga om en vid tidpunkten τ med hastigheten v_τ i vertikal riktning uppkastad kropp som står endast under tyngdkraftens inflytande; för de ändamål här afses följa vi denna rörelse litet närmare. Af eqvationen 5 fås differentialeqvationen för denna rörelse, då Q deri göres lika med noll, och samma eqvation kan äfven omedelbart uppställas; den blifver

$$Mg + M\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

eller efter multiplikation med dy samt integration

$$Mgy + \frac{Mv^2}{2} = \text{konst},$$

emedan såsom ofvan anmärktes $\frac{d^2y}{dt^2}dy$ har värdet $\frac{dv^2}{2}$; då vidare för punkten $x_\tau y_\tau$ hastigheten har värdet v_τ, så fås

$$Mgy_\tau + \frac{Mv_\tau^2}{2} = Mgy + \frac{Mv^2}{2} = \text{konstant}.$$

Tillämpas ännu denna eqvation för två olika värden för y och v, så fås

$$Mg(y''-y') + \frac{M(v''^2-v'^2)}{2} = 0.$$

Af de båda sista eqvationerna utsäger den förra att under rörelsens fortsättning från tidpunkten τ hela energin vid hvarje tidpunkt bibehåller samma konstanta värde som den har vid tidpunkten τ, således enligt eqvationen 7 värdet E_τ. Den senare af dessa eqvationer åter utvisar att arbetet tillväxer på bekostnad af rörelsen eller tvärtom; det förra inträffar sålänge ordinatan tillväxer, det senare då den aftager. I den punkt af muskelkurvan slutligen der ordinatan y uppnår sitt största värde y_m, d. v. s. i kurvans topp, har hela energin förvandlats till arbete Mgy_m.

De föregående uttrycken för den vid tidpunkten τ systemet meddelade mekaniska energin E_τ kunna sålunda sammanfattas i eqvationen

$$E_\tau = \int_0^{y_\tau} Qdy = Mgy_\tau + \frac{Mv_\tau^2}{2} = Mgy + \frac{Mv^2}{2} = Mgy_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8.$$

der sjelffallet y och v hänföra sig till en senare punkt på muskelkurvan än $y_\tau v_\tau$.

4. *Tidpunkten för muskelkraftens uppförande.* I nyssnämnda förhållanden ligger en möjlighet att bestämma läget på muskelkurvan för den punkt $x_\tau y_\tau$ der muskeln upphör att verka på systemet. Systemets mekaniska energi tillväxer nemligen sålänge muskelkraften fortfar att verka, och då denna kraft upphör att verka bibehåller systemet oförändradt samma mekaniska energi. Den punkt på kurvan, närmast intill kurvans begynnelsepunkt, der systemets mekaniska energi är densamma som i en följande punkt eller i kurvans topp är sålunda det sökta läget för punkten $x_\tau y_\tau$ på kurvan. Härmed åter är

den tidpunkt τ då muskelkraften upphör att verka bestämd förmedelst eqvationen 3.

Läget $x_\tau\, y_\tau$ kan likaså utredas förmedelst relationen

$$Q = 0 \text{ ; eller } Mg + M\frac{d^2y}{dt^2} = 0 \text{ , d. v. s. } \frac{d^2y}{dt^2} = -g\,.$$

Det har redan blifvit nämndt att utförandet af verkliga försök af den beskaffenhet här varit fråga om, möter svårigheter; i det följande återkomma vi derföre icke vidare till den här behandlade försöksanordningen, utan öfvergå till de — i teoretiskt hänseende — mer invecklade fall, då muskeln verkar på en häfstång. Redan här må anmärkas att så olika ock försöksanordningarna i hvardera dessa fall äro, de fysiologiska förhållandena dock äro analoga.

II.

Muskeln verkar på en häfstång.

1. *Eqvationen för rörelsen.* Samma försöksanordning som i förra fallet må bibehållas blott med den skilnad att vid muskelns nedre ände i stället för en fritt hängande vigt fästes en häfstång, som jemte dervid fixt förenade delar kan vridas kring en horizontal axel. Vid häfstången är ett skrifstift för uppdragande af muskelkurvan fästadt; vidare är apparaten eller myografen så anordnad att skrifstiftets spets och massmedelpunkten för det system häfstången jemte alla dermed fixt förenade delar bildar, ligga eller kunna ställas i samma plan genom vridningsaxeln; detsamma gäller massmedelpunkten för den del af det rörliga systemet som icke är eqvilibrerad af likadana materiella delar på andra sidan om vridningsaxeln; härigenom förenklas nemligen undersökningen; huru detta är att realiseras lemnas för tillfället å sido. De vinkelräta afstånden från vridningsaxeln till skrifstiftets spets och till massmedelpunkten för den icke-eqvilibrerade delen af systemet betecknas i det följande med resp. ϱ och a; dessa linier göra vid hvarje läge för systemet likastora vinklar med en lodlinie eller vertikal; det gemensamma värdet för denna vinkel, räknad från en lodlinie som är dragen genom vridningsaxeln nedåt, betecknas i det följande med φ.

Det är eqvationen 1 som här är att tillämpas; härför äro främst vridningsmomentet och tröghetsmomentet samt vinkelaccelerationen att närmare bestämmas.

För bestämning af vridningsmomentet må till en början i det ögonblick vinkelhastigheten är ω och vinkelaccelerationen $\frac{d\omega}{dt}$ eller ω', muskelkraften hafva värdet Q och dess momentarm värdet q; då är Qq vridningsmomentet tillfölje af muskelkraften i det i fråga varande ögonblicket; detta vridningsmoment sträfvar att höja systemet eller dess massmedelpunkt, och tages här positivt.

På systemet verkar vidare tyngdkraften; för bestämmande af det vridningsmoment häraf uppstår, må M beteckna massan för den icke-eqvilibrerade delen af systemet, Mg således dess vigt, som kan tänkas lokaliserad i den ofvan definierade massmedelpunkten på afståndet a från vridningsaxeln. Kraften Mg verkar i vertikal riktning; vid läget φ för systemet har derföre denna krafts momentarm värdet $a \sin \varphi$; vridningsmomentet tillfölje af systemets tyngd har sålunda värdet $Mg\, a \sin \varphi$, och är här att tagas negativt, emedan det motverkar momentet tillfölje af muskelkraften. — Får dertill såsom i några myografer från senare tid en vigt med massan m verka på det rörliga systemet förmedelst en tråd som löper kring en på axeln fästad trissa, så åstadkommes häraf ett vridningsmoment mgr, der r betecknar trissans radie; den tråd på hvilken vigten mg hänger är så ställd att detta moment verkar i samma riktning som det förra. Vridningsmomentet D i eqvationen 1 antager sålunda värdet

$$D = Qq - Mga \sin \varphi - mgr$$

Tröghetsmomentet åter sammansättes af tvenne delar, af hvilka den ena hänför sig till de fixt med hvarandra i det rörliga systemet förenade delarna, den andra till massan m, som förmedelst en tråd är förenad med systemet; betecknas den förra med T, den senare med T_0, så har i eqvation 1 tröghetsmomentet värdet $T + T_0$. Här må tilläggas att enligt undersökning af Hr Starke[1]) det senare tröghetsmomentet T_0 har samma värde som om massan m vore fästad i en punkt på periferin af trissan med radien r, och kan uttryckas förmedelst mr^2, dervid kan förutsättas att massan m (som alltid utgöres af en liten vigt) är eller kan anses vara koncentrerad i en enda punkt.

Då vidare φ betecknar den vinkel massmedelpunktens afstånd a från vridningsaxeln gör med den ofvan definierade lodlinien, så kunna systemets vinkelhastighet ω och vinkelacceleration $\frac{d\omega}{dt}$ eller ω' uttryckas förmedelst relationerna

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \text{och} \quad \frac{d\omega}{dt} = \omega' = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Härmed slutligen antager i förevarande fall eqvationen 1 för rörelsen utseendet

$$\omega' = \frac{Qq - Mga \sin \varphi - mgr}{T + T_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9.$$

Apparaterna eller myografen jemte muskeln och tråden som förenar muskeln med det rörliga systemet, ordnas vidare sålunda att förrän retningen sker 1:o

[1]) l. c. pag. 15 och 75—80.

skrifarmen ϱ och således planet genom ϱ, a och systemets vridningsaxel intaga horizontalt läge. 2:o fästpunkten för tråden som förenar muskeln med det rörliga systemet, ligger på skrifarmen ϱ och således i det nyss nämnda planet, samt 3:o denna tråd är tillika vinkelrät mot skrifarmen ϱ och planet genom ϱ, a och vridningsaxeln. Detta läge, som åstadkommes just förrän retningen sker förmedelst lämpligt anbragta skrufvar, beteckna vi i det följande med uttrycket initial- eller primärläge för muskeln och det rörliga systemet; hvarje annat läge som systemet under rörelsen tillfölje af muskelkontraktionen intager, är ett sekundärläge. Vid initiallaget är sålunda den i fråga varande tråden eller muskelkraften som verkar i dess riktning, vinkelrät mot skrifarmen ϱ och mot planet genom ϱ, a och vridningsaxeln.

För tillämpning af eqvationen 9 äro två fall här att åtskiljas, emedan undersökningen i hvardera fallet både i empiriskt och teoretiskt hänseende gestaltar sig olika. Endera nemligen kan anordningen för försöken vara sådan att muskeln och muskelkraften förändra sin riktning under muskelkontraktionen, eller ock sådan att denna riktning under kontraktionen förblifver oförändradt densamma; i förra fallet förändras jemväl momentarmen för muskelkraften till riktning och storlek; i senare fallet förändras momentarmen i ingendera hänseendet. Det senare fallet der förhållandena äro enklare, behandla vi först, det förra längre fram.

[Här må anmärkas att äfven i organismen muskler kunna uppvisas som åtminstone någorlunda i afseende på momentarmens förhållande kunna hänföras till någondera af dessa fall. Yttre ögonmusklerna vore sålunda exempel på det fall då muskelns riktning och momentarm under kontraktionen förblifva oförändrade: ögats vridningspunkt ligger nemligen någorlunda i dess midt, och ögats form kan anses vara sferisk med medelpunkten i vridningspunkten; vidare förlöpa de yttre ögonmusklernas senor i riktningen af storcirklar längs bulbens yta, så att senorna under muskelkontraktionerna förblifva tangenter till bulben och bibehålla samma riktning; under sådana förhållanden bibehåller äfven momentarmen samma storlek och riktning. — Ett exempel på det andra fallet, då momentarmen förändras till storlek och riktning vore musculus biceps bracchii, då man kan anse vridningsaxeln genom armbågsleden hafva konstant läge och muskeln verka i ett plan vinkelrätt mot denna axel; vid muskelns kontraktion förskjutes nemligen senans fästpunkt vid underarmen längs en cirkel, hvars medelpunkt ligger på vridningsaxeln genom armbågsleden; härvid förändras riktningen för muskeln och för muskelkraften under kontraktionen, och dermed äfven storleken och riktningen för momentarmen.]

Vi gå nu att närmare undersöka de båda i fråga varande fallen.

1:o. *Muskelkraftens momentarm förblifver oförändrad under kontraktionen.*

2. *Försökens anordning.* För att ställa så till att momentarmen q under kontraktionen bibehåller samma storlek och riktning är på systemets vridningsaxel fäst ett hjul eller en trissa, hvars radie må betecknas med R; längs periferin af detta hjul får den tråd som förenar muskeln med det rörliga systemet löpa — till något större längd än muskelns maximala förkortning; trådens ände är slutligen fästad vid hjulets periferi.

Apparaten och muskeln må antagas vara inställda för det ofvan definierade initialläget, så att skrifarmen ϱ har horizontal riktning och tråden från muskeln till hjulet är ställd vinkelrätt mot planet genom skrifarmen och vridningsaxeln, så tangerar tråden hjulets periferi, tangeringspunkten ligger på skrifarmen ϱ, och momentarmen q har värdet R, samt vinkeln φ värdet $\frac{\pi}{2}$. Då sedan muskeln retas och systemet öfverföres till ett sekundärläge, så vrides systemet om en vinkel $\varphi - \frac{\pi}{2}$, som i det följande betecknas med ψ, och tillika viras ett stycke af tråden lös från hjulets periferi; detta stycke är lika med muskelns förkortning. Det lösvirade stycket af tråden som sålunda mäter muskelns förkortning s, har derföre värdet

$$s = R\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \text{ eller } s = R\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10.$$

hvaraf fås

$$ds = Rd\varphi = Rd\psi \text{, och således } \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\psi}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10_a.$$

Vidare förblifver under kontraktionen tangeringspunkten mellan tråden och hjulets periferi på samma horizontallinie eller horizontalplan, men skrifarmen ϱ liksom hela systemet vrides om en allt större vinkel $\varphi - \frac{\pi}{2}$ eller ψ.

Då sålunda här

$$q = R \text{ ; } \varphi = \psi + \frac{\pi}{2} \text{ ; och deraf } \sin\varphi = \cos\psi \text{ ; } \cos\varphi = -\sin\psi,$$

så antager eqvationen 9 utseendet

$$\omega' = \frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{QR - Mga\cos\psi - mgr}{T + T_0}.$$

3. *Muskelkraften.* För bestämmande af muskelkraftens storlek fås af nyss uppställda relation

$$Q = \frac{Mga\cos\psi + mgr + (T + T_0)\,\omega'}{R}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11.$$

denna eqvation bestämmer muskelkraften för hvarje läge systemet intager under det muskeln verkar på detsamma; dess värde i några särskilda fall må här närmare utredas.

Förrän kontraktionen börjar, d. v. s. vid initiallaget, hafva vinkelhastigheten ω och vinkelaccelerationen ω' hvardera värdet noll, likaså har ψ värdet noll; muskelkraften vid initialläget (d. v. s. den kraft hvarmed muskeln vid detta läge verkar på systemet) antager sålunda värdet Q_1, bestämdt af relationen

$$Q_1 = \frac{Mga + mgr}{R}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11\,a.$$

Då sedan kontraktionen inträder, så uppnår muskelkraften i det tidigaste stadiet af kontraktionen (i detta fall helt säkert på samma sätt som i alla hittills undersökta fall) ett maximalt värde Q_m; vilkoret härför är af eqvationen 11

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \;;\; -Mga\sin\psi\frac{d\psi}{dt} + (T + T_0)\frac{d^3\psi}{dt^3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11\,b.$$

Denna relation bestämmer sålunda närmare det läge för systemet eller den tidpunkt då muskelkraften antager sitt maximala värde Q_m.

Från detta maximala värde aftager muskelkraften under kontraktionens förlopp ända till noll; under denna öfvergång måste den vid ett visst läge eller vid en viss tidpunkt åsertaga samma värde Q_1 som den hade vid initialläget; då detta inträffar, måste relationerna

$$Q_1 = \frac{Mga + mgr}{R} = \frac{Mga\cos\psi + mgr + (T + T_0)\,\omega'}{R}$$

verifieras; häraf fås

$$Mga\,(1 - \cos\psi) = (T + T_0)\,\omega', \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11\,c.$$

som bestämmer det i fråga varande läget eller tidpunkten för detsamma.

Då slutligen muskeln upphör att verka på systemet, är Q i eqvation 11 lika med noll, deraf

$$Q = 0 \;;\; Mga\cos\psi + mgr + (T + T_0)\,\omega' = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11\,d.$$

Från det ögonblick då detta inträffar, fortsätter systemet sin rörelse tillfölje af den vinkelhastighet detsamma nu har, och denna rörelse står till en början och till dess att muskeln åter möjligen verkar på systemet, endast under tyngdkraftens inflytande. Till denna fråga återkomma vi litet längre fram.

4. *Muskelns mekaniska energi.* För bestämning af den mekaniska energi E, som muskelkraften frambringar, observeras att här på samma sätt som vid den förra anordningen (I. 3) produkten af muskelkraften Q vid tiden t och muskelns elementära förkortning ds under närmast följande tidselement dt är uttrycket för elementet dE af den frambragta mekaniska energin. Multipliceras derföre eqvationen 11 med ds och ersättes i högra membrum ds af dess värde $Rd\psi$ — enligt eqvation 10 a —, så fås

$$dE = Qds = Mga\cos\psi . d\psi + mgr . d\psi + (T + T_0)\frac{d\omega\, d\psi}{dt},$$

och häraf

$$E = \int Qds = Mga\sin\psi + mgr\,\psi + (T + T_0)\frac{\omega^2}{2} + \text{konst}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 12.$$

emedan i venstra membrum af föregående eqvation

$$\frac{d\omega\, d\psi}{dt} = \omega d\omega = \frac{d\omega^2}{2}.$$

För det ändamål här närmast afses, förlägges nedre gränsen till kontraktionens början, då förkortningen s, vridningsvinkeln ψ och vinkelhastigheten ω, samt slutligen äfven mekaniska energin E — allesamman hafva värdet noll. Sålunda fås

$$E_s = \int_0^s Qds = Mga\sin\psi + mgr\,\psi + (T + T_0)\frac{\omega^2}{2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 12.$$

der E_s, s, ψ och ω bestämma öfre gränserna vid någon godtycklig tidpunkt under kontraktionen.

I denna eqvation betecknar $a\sin\psi$ den höjd h utöfver initialläget till hvilken den på afståndet a från vridningsaxeln belägna massmedelpunkten blifvit höjd tillfölje af muskelkraftens inverkan; produkten $Mg \times h$ eller $Mga\sin\psi$ betecknar derföre den mekaniska energi som blifvit använd till att höja vigten Mg vägstycket h eller $a\sin\psi$, d. v. s. till att utföra arbetet $Mga\sin\psi$.

Åter i andra termen af högra membrum betecknar $r\psi$ huru stor del af den tråd på hvilken vigten mg hänger, under kontraktionen blifvit uppvirad

på trissan med radien r, och på samma gång den höjd till hvilken vigten mg blifvit upphöjd. Denna term är härmed uttrycket för den mekaniska energi som åtgått till att höja vigten mg stycket $r\psi$, d. v. s. till att utföra arbetet $mgr\,\psi$.

Slutligen sista termen i högra membrum $(T+T_0)\frac{\omega^2}{2}$ betecknar hela den rörelse det rörliga systemet har; eller om denna term fördelas i summanderna $T\frac{\omega^2}{2}$ och $T_0\frac{\omega^2}{2}$, så betecknar den förra de fixt med hvarandra förenade delarnas rörelse, och den senare summanden rörelsen hos vigten mg eller massan m.

Eqvationen 12 a utsäger derföre att hela den mekaniska energi E_s muskelkraften meddelat systemet i det ögonblick muskelns förkortning är s, vridningsvinkeln är ψ och systemets vinkelhastighet ω, visar sig i arbete och rörelse i systemets skilda delar; den tillåter vidare utreda huru den frambragta energin fördelar sig under form af arbete och rörelse på systemets skilda delar.

Förskjutes ännu i eqvationen 12 a öfre gränsen till det läge ψ_τ eller ögonblick τ då muskeln upphör att verka på systemet, så fås uttrycket för hela den mekaniska energi E_τ muskeln meddelat systemet

$$E_\tau = \int_0^{s_\tau} Q ds = Mga \sin \psi_\tau + mgr\,\psi_\tau + (T+T_0)\frac{\omega_\tau{}^2}{2}, \quad \ldots \quad 12_b.$$

der s_τ betecknar muskelns förkortning och ω_τ vinkelhastigheten i det i fråga varande läget ψ_τ vid tidpunkten τ.

I nyssnämnda ögonblick har systemet en viss vinkelhastighet ω_τ och fortsätter derföre, såsom ofvan redan framhölls sin rörelse; men denna rörelse aftager mer och mer tillfölje af tyngdkraftens inflytande. Det sätt på hvilket rörelsen fortsättes är här af vigt att — i vissa hänseenden — närmare utreda; för detta ändamål utgå vi från eqvationen 11 d, som är differentialeqvationen för den i fråga varande rörelsen. Multipliceras denna eqvation med $d\psi$, så fås

$$Mga \cos\psi \,.\, d\psi + mgr \,.\, d\psi + (T+T_0)\frac{d\omega\, d\psi}{dt} = 0\,.$$

Deraf på samma sätt som nyss vid härledning af eqvationen 12

$$Mga \sin\psi + mgr\,\psi + (T+T_0)\frac{\omega^2}{2} = \text{konst}$$

Denna eqvation som hänför sig till en godtycklig tidpunkt efter det muskeln upphört att verka på systemet, skall jemväl verifieras för tidpunkten τ, då muskelns verkan upphör, d. v. s. då $s = s_\tau$; $\psi = \psi_\tau$ och $\omega = \omega_\tau$; deraf

$$Mga \sin \psi_\tau + mgr\,\psi_\tau + (T + T_0)\frac{\omega_\tau^2}{2} = Mga \sin \psi + mgr\,\psi + (T + T_0)\frac{\omega^2}{2} = \text{konst}. \quad 13.$$

Häraf härledes ytterligare för två olika tidpunkter t' och t'', vid hvilka ψ och ω hafva de resp. värdena ψ' ω' och ψ'' ω'', och dervid förutsättes att

$$t'' > t' > \tau,$$

$$Mga\,(\sin \psi'' - \sin \psi') + mgr\,(\psi'' - \psi') + (T + T_0)\frac{\omega''^2 - \omega'^2}{2} = 0 \quad . \quad . \quad 13_a.$$

Af dessa båda eqvationer utsäger den förra (13) att under rörelsens fortsättning från tidpunkten τ förblifver systemets hela mekaniska energi oförändradt densamma. Den senare eqvationen (13 a) åter utsäger att under denna fortsättning arbetet tillväxer på bekostnad af rörelsen, eller tvärtom; det förra inträffar så länge vinkeln ψ tillväxer, det senare då samma vinkel aftager. Vid öfvergång från förra tillståndet till det senare uppnår vinkeln ψ sitt största värde ψ_m, och i detta ögonblick eller läge för systemet har vinkelhastigheten ω värdet noll. Härmed fås ett lättare bestämbart och hittills uteslutande (om ock under annan form) användt uttryck för hela den frambragta mekaniska energin E_τ nemligen: $Mga \sin \psi_m + mgr\,\psi_m$. Eqvationen 13 kan sålunda skrifvas:

$$\left.\begin{aligned} E_\tau &= Mga \sin \psi_\tau + mgr\,\psi_\tau + (T + T_0)\frac{\omega^2\tau}{2} = Mga \sin \psi_m + mgr\,\psi_m \\ &= Mga \sin \psi + mgr\,\psi + (T + T_0)\frac{\omega^2}{2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 13_b.$$

Detta konstanta värde E_τ bibehåller energin ända till dess att muskeln åter på ett eller annat sätt inverkar på systemet.

5. *Tidpunkten då muskeln upphör att verka på systemet.* Förmedelst dessa förhållanden är slutligen tidpunkten τ, då muskeln upphör att verka på systemet, att närmare utredas. På samma sätt som i det enklare, i afdelning I behandlade fallet är den i fråga varande tidpunkten τ eller det motsvarande läget ψ_τ att uppsökas förmedelst den sist funna relationen 13 b genom att bestämma det läge närmast muskelkurvans början, för hvilket denna eqvation är verifierad.

Alldeles på samma sätt lemnar äfven eqvationen 11 d upplysning härom.

6. *Speciella fall af det allmänna.* Detta fall som härmed blifvit behandladt innefattar två specialfall, som vi finna skäl här närmare utreda, nemligen: *A)* då vigten mg eller massan m helt och hållet bortlemnas, och för det andra

B) då de fixt med hvarandra i det rörliga systemet förenade delarna äro eqvilibrerade, så att massmedelpunkten ligger på systemets vridningsaxel. I förra fallet *A)* är i de ofvan uppställda eqvationerna: $m = 0$ och äfven $T_0 = mr^2 = 0$; i senare fallet *B)* är: $a = 0$.

A) Då $m = 0$ *och dermed* $T_0 = 0$ fås af eqvation 11

$$Q = \frac{Mga \cos \psi + T\omega'}{R},$$

som bestämmer i detta fall det allmänna värdet för muskelkraften. Af denna eqvation och likaså af eqvationen 11 a åter fås

$$Q_1 = \frac{Mga}{R}$$

som bestämmer muskelkraften förrän kontraktionen börjat eller vid initialläget. Eqvationen 11 b gifver vilkoret för att i den betraktade punkten muskelkraften skall uppnå maximalt värde, nemligen

$$Mga \sin \psi \frac{d\psi}{dt} + T\frac{d\psi^2}{dt^2} = 0.$$

Eqvationen 11 c gifver

$$Mga\,(1 - \cos \psi) = T\omega';$$

häraf karakteriseras det läge i hvilket muskelkraften återtager samma värde som den hade vid kontraktionens början. Slutligen eqvationen 11 d gifver

$$Mga \cos \psi + T\omega' = 0;$$

som karakteriserar den punkt der muskeln upphör att verka på systemet.

Åter den af muskeln frambragta mekaniska energin, räknad från kontraktionens början intill ett godtyckligt ögonblick under kontraktionen, bestämmes enligt eqvation 12 a af

$$E_s = Mga \sin \psi + T\frac{\omega^2}{2}.$$

Hela den under kontraktionen systemet meddelade mekaniska energin uttryckes enligt eqvation 13 b af

$$E_\tau = Mga \sin \psi_\tau + T\frac{\omega_\tau^2}{2} = Mga \sin \psi + T\frac{\omega^2}{2} = Mga \sin \psi_m.$$

Med tillhjälp af denna relation är tidpunkten τ, då muskeln upphör att verka på systemet, att utrönas. Den i fråga varande tidpunkten karakteriseras på samma sätt enligt eqvation 11 d af relationen

$$Mga \cos \psi_\tau + T\omega' = 0 .$$

B) Då $a = 0$, fås af eqvation 11 uttrycket

$$Q = \frac{mgr + (T + T_0)\,\omega'}{R}$$

för muskelkraften. Eqvation 11 a gifver

$$Q_1 = \frac{mgr}{R}$$

som bestämmer muskelkraften vid initialläget. Eqvation 11 b gifver

$$\frac{d^3\psi}{dt^3} = 0$$

som karakteriserar den punkt der muskelkraften uppnår maximalt värde. Eqvation 11 c gifver

$$\omega' \text{ eller } \frac{d^2\psi}{dt^2} = 0$$

såsom vilkor för att muskelkraften i den betraktade punkten skall återtaga samma värde som den hade vid initialläget. Eqvationen 11 d gifver

$$mgr + (T + T_0)\,\omega' = 0 ;$$

denna relation karakteriserar det läge der muskeln upphör att verka på systemet.

Den frambragta mekaniska energin E_s har i detta fall enligt eqvation 12 a värdet

$$E_s = mgr\,\psi + (T + T_0)\,\frac{\omega^2}{2} ,$$

då nemligen densamma räknas från kontraktionens begynnelse intill ett godtyckligt läge ψ, ω under det muskeln verkar på systemet. Hela den under kontraktionen systemet meddelade mekaniska energin E_τ bestämmes enligt eqvation 13 b af relationen

$$E_\tau = mgr\,\psi_\tau + (T + T_0)\,\frac{{\omega_\tau}^2}{2} = mgr\,\psi_m = mgr\,\psi + (T + T_0)\,\frac{\omega^2}{2} .$$

Med tillhjelp af denna relation, och likaså den ofvanstående eqvationen

$$mgr + (T + T_0)\,\omega' = 0$$

är tidpunkten τ då muskeln upphör att verka på systemet, att i detta fall närmare utrönas.

Det härmed behandlade fallet, då muskelkraftens momentarm q under kontraktionen bibehåller samma värde, innefattar salunda tre olika anordningar för försöken, nemligen den då hvarken m eller a hafva värdet noll, vidare den då m har värdet noll och slutligen den då a har värdet noll. [Ett fjerde fall som den allmänna eqvationen 11 synes antyda, det då både m och a hafva värdet noll, kan ej här komma i fråga, emedan under sådana förhållanden muskeln och tråden, som förenar muskeln med det rörliga systemet, icke hållas utspända.]

Af dessa tre anordningar för försöken hafva det första och andra icke tillförene varit föremål för undersökning. Den tredje anordningen, då a har värdet noll, var den som af Hr Starke lades till grund för hans ofvan, på flera ställen omnämnda undersökningar. De eqvationer Hr Starke härledt och lagt till grund för bestämning af muskelkraften och mekaniska energin äro i hufvudsak desamma som här ofvan (i 6 B) angifvits, med den skilnad att läget för det rörliga systemet bestämdes förmedelst rätliniga koordinater i ett, på samma sätt som i afdelning I valdt axelsystem. Några differenser framträda dock; för den speciella uppgift som förelåg att besvara, behöfde Hr Starke känna endast hela energin E_τ och beräknade densamma af största utslaget eller det uttryck här ofvan betecknats med $mgr\psi_m$; men energins sammansättning vid olika tidpunkter af arbete och rörelse togs ej i betraktande. — En väsendtligare differens — på hvilken sistnämnda omständighet utöfvat inflytande — må här ännu påpekas. För bestämning af det läge ofvan betecknats med ψ_τ antog Hr Starke såsom riktig en uppgift, som redan längesedan angifvits i fysiologiska afhandlingar, den uppgiften nemligen att då muskeln upphör att verka på systemet (en häfstång), så skulle den uppdragna muskelkurvan öfvergå i en parabel; med denna förutsättning såsom utgångspunkt sökte Hr Starke bestämma det i fråga varande läget. Hvad orsaken varit till det nämnda antagandet må lemnas derhän; en parabel är visserligen kurvans fortsättning om systemet är fritt rörligt, såsom i det i afdelning I behandlade fallet. Men

i förevarande fall kan kurvan icke vara en parabel, då systemet ej är fritt, utan blott kan vrida sig kring en axel; resultatet af undersökningen var derföre icke tillfredsställande. Till frågan om beskaffenheten af den i fråga varande delen af muskelkurvan återkomma vi längre fram.

2:o. *Muskelkraftens momentarm förändras under kontraktionen till storlek och riktning.*

7. *Geometriska förhållanden.* Då tråden från muskeln till systemet är fästad vid skrifarmen, förändras muskelkraftens momentarm q till storlek och riktning; förhållandena härvid må till en början belysas af figur 1 på planschen I, der alla linier $\varrho_1\, \varrho_2\, s_1\, s_2$ och q tänkas ligga i den uppdragna cirkelns plan. Här betecknar medelpunkten för den uppdragna cirkeln systemets vridningsaxel; punkten $x_1\, y_1$ är muskelns öfre ände eller fixeringspunkt; linien ϱ_1 är skrifarmen vid primärläget och har således horizontal riktning; o är fästpunkten för tråden som förenar muskeln med det rörliga systemet; linien s_1 mellan punkterna $x_1\, y_1$ och o är längden för muskeln jemte nyssnämnda tråd vid primärläget, och är således vinkelrät mot linien ϱ_1. I detta läge verkar muskelkraften längs linien s_1, och momentarmen är lika med radien R för den uppdragna cirkeln. Då sedan muskeln kontraherar sig, förblifver fixeringspunkten $x_1\, y_1$ för muskelns öfre ände oförändrad, men fästpunkten o vid skrifarmen förskjutes längs periferin af cirkeln med radien R till en punkt xy i figuren; i detta sekundärläge har skrifarmen förskjutits till läget ϱ_2, som med ϱ_1 gör en vinkel $\varphi - \frac{\pi}{2}$ eller ψ, vidare har muskeln blifvit förkortad så att den tillsamman med tråden är lika med afståndet s_2 mellan punkterna $x_1\, y_1$ och xy; längs denna linie s_2 verkar nu muskelkraften, och momentarmen har antagit ett mindre värde som i figuren är betecknadt med q. Uppdrages vidare en lodlinie genom cirkelns medelpunkt (den prickade linien i figuren), så ses att den trubbiga vinkeln mellan s_1 och ϱ_2 har värdet $\varphi = \psi + \frac{\pi}{2}$. Vinkeln mellan de riktningar s_1 och s_2 längs hvilka muskelkraften i de båda lägena verkar på systemet, må betecknas med χ, och den spetsiga vinkeln mellan linien s_2 och skrifarmen ϱ_2 i sekundärläget med ε, så fås värdet för ε uttryckt i φ och χ omedelbart af figuren; häraf ses nemligen att

$$\varepsilon + \varphi + \chi = \pi \text{ ; således: } \varepsilon = \pi - \varphi - \chi = \pi - \left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) - \chi = \frac{\pi}{2} - (\psi + \chi) \text{ ;}$$

och dermed

$$\sin \varepsilon = \cos(\psi + \chi) \text{ ; } \cos \varepsilon = \sin(\psi + \chi) \text{ ; hvaraf } \operatorname{tg} \varepsilon = \cot(\psi + \chi).$$

De qvantiteter som här för den följande undersökningen måste till storleken bestämmas äro: s_2, χ och q samt muskelns förkortning s och elementära förkortning ds. För ändamålet antages ett rätvinkligt axelsystem med origo i cirkelns medelpunkt, x-axeln i riktningen af skrifarmen ϱ_1 vid initialläget, och således y-axeln deremot vinkelrät. Af figuren ses att

$$\left.\begin{aligned} s_2 &= \sqrt{(y_1 - y)^2 + (x_1 - x)^2} \\ y_1 - y &= s_2 \cos\chi \;;\; x_1 - x = s_2 \sin\chi \\ q &= R\sin\varepsilon \;;\; \text{således af ofvanstående värde för } \sin\varepsilon\text{: } q = R\cos(\psi + \chi) \end{aligned}\right\} \quad . \; 14.$$

Likaså ses att

$$y_1 = s_1 \;;\; x_1 = R \;;$$

$$y = R\sin\psi \;;\; x = R\cos\psi \;;$$

dermed blifver

$$y_1 - y = s_2\cos\chi = s_1 - R\sin\psi \;;\; x_1 - x = s_2\sin\chi = R(1 - \cos\psi) \;;$$

hvaraf

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{R(1-\cos\psi}{s_1 \quad R\sin\psi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 15.$$

$$s_2 = \sqrt{(s_1 - R\sin\psi)^2 + R^2(1-\cos\psi)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 15\text{a}.$$

$$\sin\varepsilon = \cos(\psi+\chi) = \cos\psi\cos\chi - \sin\psi\sin\chi = \frac{(y_1 - y)\cos\psi - (x_1 - x)\sin\psi}{s_2}$$

$$= \frac{(s_1 - R\sin\psi)\cos\psi - R(1-\cos\psi)\sin\psi}{s_2} = \frac{s_1\cos\psi - R\sin\psi}{s_2} \;;\; . \; . \; . \; 15\text{b}.$$

samt

$$\cos\varepsilon = \frac{s_1\sin\psi - R(1-\cos\psi)}{s_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 15\text{c}.$$

Slutligen har förkortningen s värdet

$$s = s_1 - s_2 \;;\; \text{hvaraf: } ds = -ds_2 \;;$$

för bestämning af värdet för ds_2 fås af eqvation 15 a:

$$ds_2 = \frac{-(s_1 - R\sin\psi)R\cos\psi + R^2(1-\cos\psi)\sin\psi}{s_2}\,d\psi = -\frac{R(s_1\cos\psi - R\sin\psi)}{s_2}\,d\psi \;;$$

således då ds har värdet: $-ds_2$

$$ds = \frac{R(s_1 \cos\psi - R\sin\psi)}{s_2} d\psi = R\sin\varepsilon . d\psi = q d\psi \ , \quad \ldots \quad 16.$$

der näst sista relationen erhållits af eqvationen 15 b och den sista af värdet för q i eqvationerna 14.

Härmed äro de qvantiteter s_2, χ, q och ds, hvilkas värden i s_1, R och ψ i det följande komma till användning, bestämda.

8. *Muskelkraften.* För bestämning af muskelkraftens storlek i detta fall fås af eqvation 9, då äfven nu φ har värdet $\psi + \frac{\pi}{2}$:

$$Qq = Mga\cos\psi + mgr + (T + T_0)\omega'$$

eller då q uttryckes i ε förmedelst eqvation 14:

$$Q\sin\varepsilon = \frac{Mga\cos\psi + mgr + (T + T_0)\omega'}{R} \quad \ldots \quad 17.$$

Här betecknar venstra membrum ($Q\sin\varepsilon$) den komponent af muskelkraften i ett sekundärläge, som är vinkelrät mot skrifarmen; den andra komponenten $Q\cos\varepsilon$ åter verkar längs skrifarmen och åstadkommer sålunda blott ett tryck på vridningsaxeln; endast den förra komponenten framkallar sålunda systemets rörelse. Då vidare högra membrum i denna eqvation har alldeles samma form som i det förra fallet 1:o, eqvation 11, så bestämmer denna eqvation (17) värdet för komponenten $Q\sin\varepsilon$ alldeles på samma sätt som eqvation 11 bestämmer värdet för muskelkraften Q i fallet 1:o; förhållandena behöfva derföre ej här vidare undersökas.

Är vidare för ett visst sekundärläge värdet för $Q\sin\varepsilon$ förmedelst eqvationen 17 funnet, så kan af de föregående eqvationerna $\sin\varepsilon$ beräknas, och dermed äfven värdet för hela resultanten Q för muskelkraften.

9. *Den frambragta mekaniska energin.* För bestämning slutligen af den mekaniska energi i förevarande fall meddelas systemet, är elementet för denna energi Qds, att beräknas. För detta ändamål fås af eqvation 16

$$\sin\varepsilon = \frac{ds}{R\,d\psi};$$

dermed af eqvation 17

$$Qds = Mga\cos\psi \,.\, d\psi + mgr \,.\, d\psi + (T + T_0)\,\frac{d\omega\, d\psi}{dt}$$

[samma relation kan äfven härledas på följande sätt: då $Q\sin\varepsilon$ är den verksamma komponenten, fås äfven uttryck för det elementära arbetet om $Q\sin\varepsilon$ multipliceras med projektionen af elementet ds på riktningen af denna komponent; denna projektion har värdet $ds\sin\varepsilon$; deraf det i fråga varande elementet

$$Q\sin^2\varepsilon \,.\, ds = [hm]\sin\varepsilon \,.\, ds = [hm]\sin^2\varepsilon \,.\, R\, d\psi\,,$$

der $[hm]$ betecknar högra membrum i eqvation 17. Härmed sålunda samma relation som ofvan för den elementära energin Qds].

Då vidare detta uttryck för elementet af den frambragta energin öfverensstämmer med det motsvarande i fallet 1:o. så behöfva förhållandena ej här vidare undersökas.

Den försöksanordning här i 2:o varit fråga om kan anses vara realiserad i de anordningar som afse att uppdraga så kallade isotoniska kurvor. De muskelkurvor deremot som uppdragas med myografer konstruerade på det vanliga sättet med en rörlig vigtskål och likaså ett rörligt skrifstift, fästade på häfstången eller skrifarmen, inrymmas icke i de fall här varit fråga om; i sådana myografer förändras nemligen vigtskålen och derpå ställda vigter och likaså skrifapparaten under kontraktionen till läget i förhållande till öfriga med axeln (fixt) förenade delar; med få ord härigenom förändras både massmedelpunktens läge och tröghetsmomentet för det rörliga systemet under kontraktionen. Om ock dessa förändringar med läget för systemet noggrannt kunde beräknas, så kunna för närvarande ej synnerliga upplysningar väntas förmedelst analys af muskelkurvor uppdragna under sådana förhållanden, eller åtminstone torde enklare försöksanordningar för tillfället kunna anses erbjuda större intresse; vi afse derföre här endast de ofvan under 1:o och 2:o i denna afdelning behandlade fallen.

Här må vidare anmärkas att i jemförelse med hvarandra anordningen 2:o är mer invecklad att använda än anordningen 1:o; vid den förra måste nemligen för bestämning af muskelkraftens storlek s_1 d. v. s. trådens tillsamman

med muskelns längd utrönas, då deremot i senare fallet sådan undersökning ej är behöflig. Härtill tillkommer att vid utförandet af i fråga varande undersökningar med tillhjelp af den muskel som i främsta rummet blifvit använd i allmänna muskelfysiologin, musculus gastrocnemius, det möter vissa svårigheter att afgöra hvar muskelns öfre ände är att lokaliseras. Dessa förhållanden göra att det är i främsta rummet anordningen 1:o man har att använda vid undersökningar i afseende på muskelkraften.

III.

Undersökningsmetoden.

Sedan i det närmast föregående blifvit undersökt i hvilket samband vissa, ofvan nämnda fysiologiska förhållanden stå till eller med rörelsen i det system på hvilket muskeln verkar, öfvergå vi i förevarande afdelning till redogörelse för den metod vi användt för uppdragande af myogrammen och för utförande af de för närvarande ändamål nödvändiga mätningarna.

1. *Tangentiel skrift. Plan skrifyta.* Främst har här varit att afgöra huru muskelkurvan lämpligast för de ändamål här afses är att uppdragas. Af de båda metoder som blifvit använda för uppdragande af muskelkurvor, såkallad front- och tangentiel skrift, har den förra — vid hvilken skrifarmen rör sig i ett plan vinkelrätt mot skrifytan — vunnit afgjordt företräde vid noggrannare undersökningar. Orsaken härtill är att, då vissa försigtighetsmått iakttagas, kurvpunkternas lägen i detta fall bestämmas på enkelt sätt förmedelst koordinaterna i ett såsom ofvan — i afdeln. I och II — definieradt rätvinkligt axelsystem, så att ena koordinaten bestämmer tiden, den andra systemets höjning, — då deremot vid tangentiel skrift, dervid skrifarmen rör sig parallelt med skrifytan, förhållandena blifva mer invecklade, såsom i de närmast följande paragraferna närmare utredes. I öfverensstämmelse härmed uppdrogo äfven Hr Starke och Hr Santesson de muskelkurvor de underkastade analys förmedelst frontskrift. Men äfven denna metod åtföljes af vissa olägenheter, hvilka här ej närmare behöfva framhållas; vi hafva derföre funnit anledning att uteslutande använda tangentiel skrift, emedan denna metod är enklare och gifver noggranna resultat för de ändamål här afses. Här må tilläggas att vi tillfölje af de olägenheter som vid denna anordning åtfölja cylindrisk skrifyta användt plan skrifyta — en slipad glasskifva. I den myograf vi användt är vidare

skrifstiftet styft, och det rörliga systemets massmedelpunkt har samma läge till vridningsaxeln oberoende af systemets läge, så att skrifarmens längd och systemets tröghetsmoment icke förändras under det myogrammet uppdrages.

2. *Muskelkurvan i polarkoordinater.* Det är sålunda tangentiel skrift på plan skrifyta vi användt; den vertikalt ställda skrifytan må här fortfarande antagas röra sig proggressivt i horizontal riktning med konstant hastighet. Vid denna anordning af försöken bestämmes hvarje punkt af kurvan till dess läge förmedelst ett polar-koordinatsystem af mindre vanligt och till och med ovanligt slag, men fullständigt noggrannt, nemligen af en rät linie och en cirkelbåge.

För närmare utredning af dessa förhållanden må i figur 2 på planschen I $t_0 x$ beteckna horizontallinien, uppdragen vid initialläget; på denna linie ligger skrifarmen ϱ ända till dess att muskelns kontraktion begynner. Skrifytan må sammanfalla med papprets plan samt röra sig från höger mot venster med den konstanta hastigheten c; skrifstiftets spets är vänd mot venster och befinner sig i det ögonblick retningen sker i punkten t_0; dess andra, fixa ände ligger åt höger, således på afståndet ϱ från t_0 på linien $t_0 x$; efter kort tidsförlopp, motsvarande latenta retningsstadiet, vidtager muskelkontraktionen; härigenom vrides skrifarmen å skrifytans plan kring dess fixa ände på horizontallinien $t_0 x$ och dess andra ände, skrifstiftet, tecknar muskelkurvan, den utdragna krokiga linien i figuren. Vid tiden t, räknad från det ögonblick t_0 då retningen sker, må skrifarmen ϱ intaga det läge figuren antyder, med den fixa änden på horizontallinien vid o och med den rörliga änden eller spetsen af skrifstiftet i punkten xy på muskelkurvan; i detta läge gör skrifarmen ϱ med horizontallinien $t_0 x$ en vinkel som bestämmer storleken af den vinkel ψ om hvilken det rörliga systemet vid tiden t vridits från initialläget. Genom punkten xy uppdrages vidare en cirkel, den prickade linien i figuren, hvars medelpunkt ligger vid o, och hvars radie således är ϱ; denna cirkel skär horizontallinien i en punkt p. Då bestämmer afståndet mellan punkten t_0 och p det vägstycke skrifytan förskjutits under tiden t; detta vägstycke har sålunda värdet ct; cirkeln åter med o såsom medelpunkt och ϱ såsom radie bestämmer förmedelst bågen mellan punkten p på horizontallinien samt punkten xy på muskelkurvan huru mycket vid tiden t skrifarmen blifvit vriden; denna båge har värdet $\varrho\psi$. Läget för punkten xy på muskelkurvan bestämmes sålunda fullständigt förmedelst linien $t_0 p$ eller ct samt bågen $\varrho\psi$.

Dessa förhållanden må här ännu betraktas på annat sätt. Då den relativa rörelse tvenne system hafva i förhållande till hvarandra blifver oförändrad, äfven om det sammansatta system båda tillsamman bilda, meddelas en gemen-

sam rörelse, så kan för närvarande ändamål antagas att skrifarmen ϱ (jemte dermed fixerade delar) och skrifytan förskjutas såsom ett helt med hastigheten c i horizontal riktning, men i motsatt riktning mot skrifytans verkliga rörelse. Under sådana förhållanden är skrifytan tvungen att samtidigt utföra två progressiva rörelser af samma storlek, men i motsatt riktning; den förblifver således i hvila. Skrifarmen åter tvingas likaså utföra två samtidiga rörelser, nemligen den ursprungliga eller verkliga rörelsen tillfölje af muskelkontraktionen, samt derjemte en progressiv rörelse med hastigheten c i motsatt riktning mot skrifytans rörelse; dessa båda rörelser gifva sålunda upphof till muskelkurvan. Häraf följande idé om muskelkurvans uppkomst: en cirkel hvars radie är ϱ befinner sig i skrifytans plan och dess medelpunkt förskjutes med hastigheten c längs horizontallinien t_0x fran venster mot höger i figuren; skrifarmen som är en radie till denna cirkel, må i det ögonblick cirkelns medelpunkt befinner sig på afståndet ϱ från punkten t_0 till höger i figuren hafva skrifstiftets spets i sistnämnda punkt t_0 samt efter förloppet af latenta retningsstadiet utföra den rörelse den i verkligheten utför vid muskelkontraktionen, — så uppritar skrifstiftet en linie som just är muskelkurvan.

Hvarje punkt på muskelkurvan kan sålunda bestämmas till dess läge förmedelst polarkoordinaterna ct och $\varrho\psi$, eller helt enkelt af tiden t och systemets vridningsvinkel ψ.

3. *Muskelkurvan i rätvinkliga koordinater.* Det är emellertid nyttigt och till och med nödigt att äfven definiera läget på muskelkurvan förmedelst rätvinkliga koordinater; för detta ändamål taga vi såsom ofvan horizontallinien t_0x till x-axel och en deremot, genom den ofvan definierade punkten t_0 dragen vinkelrät linie till y-axel. Figuren visar omedelbart att koordinaterne y och x för hvarje punkt af kurvan bestämmas af relationerna

$$\left.\begin{aligned} y &= \varrho \sin \psi \\ x &= ct + \varrho\,(1 - \cos \psi) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 18.$$

Dessa eqvationer visa att läget för en punkt på muskelkurvan kan bestämmas förmedelst de rätvinkliga koordinaterna x och y samt äfven förmedelst tiden t och vridningsvinkeln ψ; de visa vidare att då endera paret, x och y eller t och ψ, är kändt så kan det andra häraf beräknas.

4. *Plan för undersökningens utförande.* Tillfölje af sistnämnda omständighet uppstår här till besvarande på hvilkendera sättet läget för kurvpunkterna lämpligast är att definieras, eller med andra ord hvilkendera paret, x och y

eller t och ψ, här är att mätas. Af skilda orsaker, bland andra den att de fysiologiska förhållanden hvarom i föregående afdelning varit fråga, närmast bero af vridningsvinkeln ψ, hafva vi föranledts att utföra undersökningen sålunda att tiden t och systemets motsvarande vridningsvinkel ψ uppmätas.

Mätning af den vinkel ψ som motsvarar tiden t kunde här tänkas utförd på följande sätt: den vid initialläget uppdragna horizontallinien $t_0 x$ afdelas i ett större antal (några tiotal) lika stora delar δ; börjandes från den punkt som motsvarar tidpunkten t_0 för retningen, och ända intill muskelkurvans slutpunkt; härmed blifver

$$\delta = c\,\Delta t,$$

der Δt betecknar tiden för skrifytans förskjutning om vägstycket δ. Mätningen af ψ kan till en början tänkas utförd förmedelst en vinkelmätare sammansatt af en cirkelskala och tvenne skenklar ϱ_1 och ϱ_2, som hvardera hafva skrifarmens längd ϱ och utgå från cirkelskalans medelpunkt; den ena af dem ϱ_1 är fixerad vid cirkelskalan, den andra ϱ_2 kan vridas kring dess medelpunkt och dess lutning mot ϱ_1 kan afläsas på skalan. För utförande af mätningen ställes den fixa skenkeln ϱ_1 på horizontallinien $t_0 x$ med dess fria ände på ett af delstrecken, det må antagas på det n:te räknadt från punkten t_0; sedan vrides den rörliga skenkeln tills dess fria ände ligger på muskelkurvan; vid detta läge afläses lutningsvinkeln mellan skenklarna ϱ_1 och ϱ_2. Då bestämmer produkten $n\,\Delta t$ tiden t och den aflästa vinkeln den motsvarande vridningsvinkeln ψ. Här må vidare anmärkas att för de beräkningar som stöda sig på resultaten af mätningarna måste mätningarna upprepas för några närliggande punkter som motsvara likastora tidsdifferenser Δt; mätningarna äro sålunda här att upprepas vid $(n+1)$:sta, $(n+2)$:dra etc. delstrecken.

Horizontalliniens afdelande i likastora stycken δ måste naturligtvis ske med mycken noggrannhet; enklast synes detta här uppnås genom grafisk metod, nemligen en stämmgaffelkurva (t. ex. förmedelst en Pfeil's signalapparat, hvars ledningstrådar bilda en del af strömbanan till en strömafbrytande stämmgaffel). Hvarann half-våglängd af denna kurva kommer sålunda att ligga ofvanom och hvarann nedanom horizontallinien $t_0 x$; en hel våglängd λ kan då ersätta afståndet δ mellan delstrecken i förra fallet; här är således

$$\lambda = c\,\Delta t,$$

der Δt nu är stämmgaffelns period. [Under dessa förhållanden förenklas den föreliggande uppgiften; det är icke numera nödvändigt att skrifytan rör sig med konstant hastighet såsom öfverallt i det föregående förutsatts; antalet n

våglängder räknade från t_0 angifva nemligen det antal perioder Δt som bestämmer tiden t så att fortfarande

$$n\,\Delta t = t,$$

oberoende deraf huru skrifytans hastighet förändrats under det muskelkurvan uppdragits; den motsvarande aflästa vinkeln åter mäter vridningsvinkeln ψ i detta ögonblick].

Enligt sådana principer skulle mätningarna af vinklarna ψ — de enda som här behöfva mätas då ju de motsvarande tiderna omedelbart antydas af antalet n våglängder på stämmgaffelkurvan — kunna ske. Men vissa olägenheter och svårigheter vidlåda detta förfarande; bland annat är det ej alldeles lätt att åstadkomma den vertikalt ställda skrifytans rörelse i horizontal riktning med här behöflig hastighet och noggrannhet: af denna orsak hafva vi inslagit ett något förändradt förfarande för utförande af försöken och dermed af mätningarna. I stället för att förskjuta den vertikalt ställda skrifytan i horizontal riktning hafva vi nemligen låtit densamma vrida sig kring en horizontal axel. Idén att sålunda upptaga myogrammen på en roterande skifva är icke ny; Valentin[1]) tillämpade densamma för tre decennier sedan och till och med tidigare, redan 1855[2]); men för de frågor inom allmänna nerv- och muskelfysiologin som sedan dess varit föremål för undersökningar, har sådan anordning ej vunnit vidare användning; man har förkastat metoden och till och med beklagat att sådan gratisk metod kommit till användning. För närvarande uppgift synes dock sådan roterande skifva vara rätt lämplig.

Under dessa förhållanden har planen för undersökningens utförande blifvit följande:

1:o) myografen, inställd för initialläget, förskjutes till dess skrifarmen ϱ är parallel med skrifytan (en slipad glasskifva) och spetsen af skrifstiftet (en nål i horizontal riktning vinkelrät mot ϱ) berör skrifytan i en punkt; denna punkt ligger i ett vertikalplan genom skrifytans rotationsaxel. Efter denna anordning uppdrages muskelkurvan, sjelffallet på ej alldeles litet afstånd från skifvans rotationsaxel. Dernäst utmärkes ögonblicket för retningen. Slutligen vid initialläget får skrifstiftet uppdraga en cirkel (som motsvarar horizontallinien $t_0 x$ i figuren 2 vid förra anordningen);

2:o) myografen aflägsnas och Pfeil's signalapparat intager dess plats; skrifarmen anordnas till skrifytan så att stämmgaffelkurvan uppdrages; denna

---

[1]) *G. Valentin:* Die Zuckungsgesetze des lebenden Nerven und Muskels. Leipzig & Heidelberg 1863, pag. 12, 25 och följ.

[2]) Enligt notis i nyssnämnda arbete, pag. 12.

tidkurva kan uppdragas på den vid initialläget uppritade cirkeln; i det hela är det dock likgiltigt hvar det sker. En enda sådan tidkurva på samma skifva är nog äfven om flera myogram upptagas blott drifkraften för rotationsapparaten vid försöken är densamma. Slutligen vidtaga

3:o) mätningarna för bestämmande af tiden t och vridningsvinkeln ψ; de utföras förmedelst två cirkelskalor som äro förenade i samma apparat. Vinkeln ψ mätes förmedelst en arm af skrifarmens längd och dertill hörande skala; denna arm är så anordnad att den kan gifvas samma läge till muskelkurvan som skrifarmen ϱ hade vid kurvans uppdragande; för detta ändamål kan armen vridas kring en axel som motsvarar myografens vridningsaxel. Den mot vinkeln ψ motsvarande tiden t åter mätes förmedelst en annan skala som låter afgöra om huru stor vinkel α skrifytan skall vridas kring en axel, motsvarande rotationsapparatens axel, för att den fria änden af den nyss nämnda armen skall intaga två bestämda lägen på den vid initialläget uppdragna cirkeln.

I denna allmänna plan för undersökningen hafva vid utförandet smärre förändringar och tillägg befunnits nödiga.

IV.

Apparaterna.

I öfverensstämmelse med nyss nämnda plan för undersökningens utförande bestå de hufvudsakliga apparaterna af en myograf jemte dertill hörande stativ, en vertikalt ställd skrifyta som kan försättas i rotation med konstant vinkelhastighet kring en horizontal axel, samt ett instrument för bestämmande af tiden t och vridningsvinkeln ψ för hvarje punkt af muskelkurvan.

Härtill tillkomma hvarjehanda apparater som äfven för andra ändamål finna användning och derföre här blott behöfva omnämnas; till sådana höra: libell jemte lodlinier för instrumentens behöriga inställning, vidare ström-afbrytande stämgaffel jemte Pfeil's signalapparat för uppdragande af en tidkurva på något ställe af skrifytan, slutligen elektriska apparater (såsom galvaniska element, induktionsapparat etc.) för åstadkommande af retning och för försättande af signalapparaten i verksamhet.

1. *Myografen och dess stativ.* För att myografen skulle motsvara de ändamål här afses, måste åter en gång ett nytt sådant instrument konstrueras. Den myograf vi användt är dock, hvad stativet beträffar, konstruerad ungefär på samma sätt som Pflüger's myograf; det rörliga systemet åter är ordnadt i hufvudsaklig öfverensstämmelse med det af Hr Starke vid ofvan nämnda undersökningar använda, dock i hvardera hänseendet med vissa modifikationer som för närvarande ändamål befunnits nödiga.

Högra sidan i figur 1 på planchen II efter en fotografisk bild visar instrumentet jemte stativet hvarpå det vid användningen står; figur 3 på planchen I åter visar en schematisk teckning deraf då det betraktas från ena långsidan. Myografbordet (det öfra, utdragna horizontalstrecket i sist nämnda figur) uppbär på vanligt sätt ett stativ för fixerande af muskeln och tillika (i figuren icke antydda) klämskrufvar för ledningstrådar till elektriska apparater;

det är förfärdigadt af hårdgummi, har formen af ett rätvinkligt prisma, dess längd är 20 och dess bredd 17 centimeter. Fotställningen eller basen (det nedra horizontalstrecket i figuren) är gjordt af träd, är något tjöckre än bordsskifvan, men har för öfrigt samma form och dimensioner. Dessa båda delar äro förenade med hvarandra förmedelst tre vertikala metallkolonner (de prickade linierna i figuren); kolonnerna äro så ordnade att bordets och basens största ytor tillhöra ett rätvinkligt prisma; två af kolonnerna invid instrumentets ena långsida äro cylindriska, men den tredje, invid andra långsidan och parallelt dermed, är en plan-parallel skifva; den sistnämnda uppbär ena änden af det rörliga systemets axel; den har vidare nedanom instrumentets bas en fortsättning af 0.5 centimeters längd som utgör en af de tre fötter på hvilka instrumentet står; de båda andra fötterna (äfven i figuren antydda) utgöras af två skrufvar. Andra änden af vridningsaxeln uppbäres af ett utsprång af metall från bordsskifvans nedra yta. Axeln rör sig i stålspetsar, försedda med motskrufvar för fixering. Vridningsaxeln är ställd vinkelrätt mot den plan-parallela kolonnen och vidare parallel med bordsskifvans öfra och nedra yta.

Hålet i bordsskifvan genom hvilket tråden från muskeln löper till det rörliga systemet, är anbragdt nära ett af bordsskifvans hörn, nemligen 3.5 centimeter från ena långsidan, och på samma afstånd från ena kortare sidan. I öfverensstämmelse härmed är axeln ställd invid skifvans ena långsida.

Axeln af stål, har en längd af ungefär 4 centimeter; ett längdsnitt genom densamma visar figuren 4 på planchen I, der de utdragna linierna tillhöra axeln, de prickade linierna åter delar som uppbäras af axeln. Figuren antyder att axeln består af tre afdelningar af olika tjocklek; den tjockaste delen uppbär det i afdelning II omnämnda hjulet med radien R; den mellersta och den smalaste delen uppbära hvar sin mutter (hvilka liksom hjulet i figuren äro antydda förmedelst prickade linier); dessa muttrar tjena till att fixera tvenne prismatiska metallstafvar mot axelns tjöckre afdelningar; af stafvarne (i figuren ej antydda) tjenar den ena till skrifarm och uppbär för detta ändamål invid sin fria ände ett skrifstift; den andra stafven kan belastas med två löpande vigter för förändring af systemets tröghetsmoment och muskelns belastning; en centimeterskala på stafven angifver den löpande vigtens afstånd från vridningsaxeln. Hvardera löpande vigten har samma massa och samma cylindriska form af två centimeters längd; fixeras dessa vigter (förmedelst en skruf i midten af cylindermanteln) sålunda att deras ändar ligga jemnt på två delstreck af skalan, så kunna deras resp. massmedelpunkters afstånd från vridningsaxeln omedelbart afläsas på skalan. Vidare är, såsom redan ofvan i afdelning II nämndes, hjulets periferi försedd med en fåra, hvari den (silkes-)tråd löper som vid

anordningen 1:o — då momentarmen hålles konstant — förenar muskeln med systemet; för trådens fixerande vid hjulet tjenar den ena af två små skrufvar som intaga diametralt motsatta lägen på hjulets periferi. Liksom hjulet är äfven muttern å axelns mellersta afdelning försedd med en fåra för upptagande af den (silkes-)tråd hvarpå vigten mg hänger; denna tråd fixeras vid muttern i det ena af två invid fåran diametralt belägna hål. Axeln jemte hjulet och muttrarna äro symmetriskt formade och hafva således allesamman sina massmedelpunkter på den idéella vridningsaxeln.

Slutligen skrifstiftet består af en (stål-)nål som i horizontal riktning är ställd vinkelrätt mot skrifarmen ϱ. I horizontal riktning kan vidare denna nål något litet förskjutas från dess spets mot stafven hvarpå den är fästad; men så snart den förskjutande kraften upphör att verka, drifves nålspetsen förmedelst en helt liten spiralfjäder åter på längre afstånd från stafven. Denna spiralfjäder stöder sig med ena änden mot skrifarmen, med den andra mot en en liten trissa som är fixerad på nålen. Anordningarna för detta ändamål förtydligar figuren 5 på planchen I. der ϱ betecknar skrifarmens fria ände; denna ände jemte en vinkligt böjd bygel B bilda den ram som håller nålen N i dess mot skrifarmen vinkelräta läge, nålen går genom tvenne hål, det ena i skrifarmen, det andra i bygeln, och mellan båda kring nålen har spiralfjädern sitt läge.

Vid instrumentets användning ställas alltid båda de prismatiska stafvarna parallelt invid hvarandra; då de vidare äro prismatiskt formade så ligga härvid deras resp. massmedelpunkter i samma plan genom deras längdaxlar och systemets vridningsaxel; i detta plan är jemväl skrifstiftet beläget; härigenom komma ϱ och a att ligga i samma plan genom systemets vridningsaxel.

För åstadkommande af anordningen 1:o — då momentarmen hålles oförändrad — gifves hjulets diameter, som går genom de ofvan nämnda, vid hjulets periferi fixerade små skrufvarna, ett (någorlunda) vertikalt läge, och tråden som förenar muskeln med systemet får löpa kring hjulet, i dess fåra, ungefär 90^0. Vid anordningen 2:o deremot — då momentarmen förändras med systemets läge — ställas hjulets diameter genom de nyss nämnda skrufvarna och båda de prismatiska stafvarna i noggrannt parallelt läge; vidare kommer den skruf å hjulet, vid hvilken tråden från muskeln fästes, att vid initialläget ligga vertikalt nedanom muskeln. — Vid hvardera anordningen — 1:o och 2:o — gifves myografen den höjd instrumentet skall hafva för att myogrammet blifver uppdraget på det afsedda stället på skrifytan; vidare gifves myografens bordsyta horizontalt läge förmedelst libell, lodlinier och instrumentets fotskrufvar; efter dessa anordningar finnes initialläget för det rörliga systemet omedelbart

genom att ställa tvenne lika höga stöd under hvardera änden af den prismatiska stafven som uppbär de löpande vigterna; då äro nemligen stafvens axel samt dess öfra och nedra kant parallela med bordsytan.

Till myografen hör vidare ett stativ för uppbärande af instrumentet vid utförandet af försöken; det afser tillika att på beqvämt sätt efter behof tillåta höja eller sänka myografen, samt närma eller aflägsna myografen och dess skrifstift till eller från den vertikalt ställda skrifytan. För ändamålet hafva vi användt ett stativ snarlikt det som i Langendorff's bekanta arbete angående grafiska metoder [1]) beskrifves under namn af universalstativ. Härmed har redan dess konstruktion blifvit antydd: endast par omständigheter må här skildt påpekas: basen eller foten af metall (jern) och likaså armen af metall (messing) som uppbär myografen hafva rektangulär form och parallel anordning i förhållande till hvarandra, för att derigenom lättare lokalisera instrumentet i förhållande till skrifytan; vidare finnas å pelarn som uppbär armen, tvenne skrufvar, den ena för att höja eller sänka armen (jemte den derpå ställda myografen), den andra för att fixera densamma orubbligt vid viss höjd. Slutligen kan pelarn som uppbär armen förskjutas i horizontal riktning förmedelst tvenne, vinkelrätt mot hvarandra ställda skrufvar; sistnämnda anordning infördes af assistenten vid fysiologiska laboratorium, Dr Clopatt, som under sistlidna sommar (1896) med i fråga varande apparater upptog muskelkurvor för analys; denna anordning afser att på beqvämt sätt åstadkomma den sista inställningen af skrifstiftets spets mot skrifytan, och den ena af dem tillika att så att säga ögonblickligen efter det muskelkurvan är uppdragen aflägsna skrifstiftet från skrifytan och sålunda förhindra stiftets spets att flera hvarf öfverfara den cirkel som uppdrages vid initialläget eller stället för denna cirkel på skrifytan.

Stativet liksom myografen är förfärdigadt af statsmekanikern Falk-Rasmussen härstädes. Figuren 1 på planchen II, efter en fotografi, visar båda jemte rotationsapparaten som försätter skrifytan i rörelse.

2. *Skrifytan och dertill hörande apparater.* Såsom redan framhållits upptogos myogrammen på en vertikalt ställd, sotad glasskifva, som fick rotera kring en horizontal axel. Skifvan af spegelglas är plan-parallel, har rund form med en radie af ungefär 25 centimeter, och är i midten försedd med ett hål för dess fixering vid en roterande axel. Axeln är af stål, har horizontal riktning, och rör sig i ett massivt stativ af gjutjern; dess ena ände sträcker sig utanför stativet och är här försedd med en mindre, vertikalt ställd, rund

[1]) *O. Langendorff.* Physiologische Graphik. Leipzig und Wien. 1891; pag. 76.

metallskifva mot hvilken glasskifvan fixeras förmedelst skrufmutter. På axeln och parallelt med dess yta finnas vidare tvenne cylindrar som äro försedda med kuggar deder gripa in i hvarandra; den ena af dem är fixt förenad med axeln och deltager således i axelns rörelse; den andra kan förmedelst en häfstång förskjutas längs axeln; då kuggarna gripa in i hvarandra hindras axelns och skrifytans rörelse, deremot då de förmedelst ett handgrepp med häfstången dragas åtskils försättes axeln jemte glasskifvan i rotation.

Instrumentet konstruerades redan för par decennier sedan för myografiskt ändamål; arbetet utfördes af sedermera aflidne statsmekanikern Wetzer härstädes. För de ändamål här afses hafva anordningarna för åstadkommande af rotationen och retningen numera ordnats enligt alldeles samma princip som i Fick's bekanta roterande cylinder, således rotationen förmedelst fallande vigter (af 2 till 4 kilogram), som genom ett snöre, viradt några hvarf på en rulle å axeln, få verka på det i fråga varande rörliga systemet; och retningen förmedelst en kontakt som under rotationen öppnas af en på axeln fästad, vinkelrätt ställd arm. Den fallande vigten uppfångas härvid efter att hafva fallit 10 centimeter eller mindre af en arm; då detta inträffat fortgår rotationen till en början med konstant vinkelhastighet; under sistnämnda stadium öppnas kontakten, så att retningen sker och muskelkurvan uppdrages. Armen för uppfångande af vigten var ursprungligen, på samma sätt som i nyss nämnda instrument, fäst vid rotationsapparatens stativ; för att hindra stativet och skrifytan att försättas i skakningar af den fallande vigten och dermed undvika oregelbundenheter i muskelkurvan har dock den förändring befunnits nödig att armen icke är fäst vid stativet eller bordet på hvilket instrumenten stå; för detta ändamål har armen (af jern) gifvits en längd af 90 centimeter; dess ena ände är fixerad vid en fensterpost, och den andra änden sticker fram i horizontal riktning under bordsskifvan, på hvilket instrumenten stå, tillräckligt för att tjena till att uppfånga den fallande vigten.

Härmed och förmedelst bilden till venster i figur 1 på planchen II torde detta instrument vara tillräckligt förtydligadt.

3. *Apparaten för utförande af mätningarna* består af två väsendtliga delar, den ena för bestämning af tiden t, den andra för mätande af vinkeln ψ för hvarje punkt af muskelkurvan. Den förra delen utgöres af en horizontalt ställd cirkelskala, hvars radie är ungefär en centimeter längre än skrifytans; denna skala kan vidare vridas kring en axel som i vertikal riktning går genom dess medelpunkt, den kan i hvarje läge fixeras och från detta läge vridas förmedelst mikrometerskruf. Vid utförandet af mätningarna kommer glasskifvan,

på hvars sotade yta myogrammet är uppdraget att ligga på denna cirkelskala med skrifytan uppåt; här gifves vidare skifvan sådant läge att medelpunkten för cirkelskalan och axeln kring hvilken skifvan roterade då myogrammet uppdrogs ligga i samma vertikal. — Den andra väsendtliga delen består af ett vertikalt ställdt mikroskop som i okularet har ett vinkelrätt hårkors, och uppbäres af en stadig horizontalarm af samma längd som skrifarmen i myografen; denna arm kan ställas i samma läge till muskelkurvan som skrifarmen ϱ innehade då muskelkurvan uppdrogs. För att motsvara denna uppgift kan till en början armen vridas kring en vertikalaxel som befinner sig från mikroskopets hårkors (dess korsningspunkt) på det afstånd hvilket bestämmes af skrifarmens längd ϱ, och vridningsvinkelns storlek ψ kan mätas förmedelst skala och index. Vidare kan armen förskjutas i horizontal riktning parallelt med sig sjelf längs en slädapparat; härvid rör sig den nyss nämnda vridningsaxeln i ett vertikalplan som befinner sig på afståndet ϱ från cirkelskalans medelpunkt. Förskjutningen kan ske i den utsträckning som bestämmes af skrifytans radie; vridningen kan göras större (i vår apparat tillochmed betydligt större) än den största vinkel om hvilken skrifarmen vrides vid en muskelkontraktion.

Det må nu antagas att mikroskoparmen gifvits sådant läge att medelpunkten för cirkelskalan (en svart punkt i en större messingsskruf som tjenar till att fixera glasskifvan vid cirkelskalan) ligger i hårkorset; i detta läge är mikroskoparmen vinkelrät mot slädapparatens längdriktning, och i apparaten står siffran 45 (grader på skalan för mätande af vinkeln ψ) mot noniens index eller nollpunkt. Förskjutes sedan armen (jemte mikroskopet) på längre afstånd från medelpunkten, utan att mikroskoparmen vrides, så öfverfar hårkorset samma radie på skrifytan, nemligen den som är parallel med slädapparatens riktning; vid en viss förskjutning — som åstadkommes till en början med hand, sedan förmedelst mikrometerskruf — ligger hårkorset på den cirkel (med radien S_0) skrifstiftet uppdragit vid initialläget och tillika är mikroskoparmen ϱ en tangent till denna cirkel. Kortligen, i detta läge är mikroskoparmen i skrifarmens initialläge.

I detta läge för mikroskoparmen må cirkelskalan (för mätande af vinkeln α) vridas — till en början med hand, sedan med mikrometerskruf — tills punkten t_0 (på cirkeln med radien S_0) då retningen skedde, ligger i hårkorset; ytterligare vridning af cirkelskalan låter den punkt t_1 (på samma cirkel) vid hvilken muskelkurvan begynner, framträda i hårkorset; afläsning förmedelst cirkelskalan och dertill hörande nonie af vinkeln α_0 (räknad från t_0) om hvilken cirkelskalan jemte skrifytan skall vridas för att detta skall inträffa, bestämmer latenta retningsstadiet. Vrides cirkelskalan ytterligare i samma riktning så att

en annan punkt af den vid initialläget uppdragna cirkeln (med radien S_0) ligger i hårkorset, så bestämmer den aflästa vinkeln α, räknad från t_0 eller t_1, huru lång tid t förflutit sedan tideräkningens början intill dess skrifarmen intagit samma läge, ifall nemligen ingen muskelryckning egt rum. I detta läge är mikroskoparmen att vridas till dess hårkorset ligger på muskelkurvan för att på skalan som tillhör mikroskoparmen afläsa den mot den sålunda bestämda vinkeln α, resp. tiden t, motsvarande vridningsvinkeln ψ, der vinkeln ψ räknas från det ofvan nämnda läget då siffran 45 på skalan står mot noniens index.

Cirkelskalan förmedelst hvilken sålunda vinkeln α och dermed tiden t bestämmes, uppbäres af åtta i dess plan symmetriskt ställda radier eller ekrar; på fyra af dessa äro tvenne diametrar uppdragna sålunda att de bilda ett vinkelrätt kors med korsningspunkten i skalans medelpunkt. Dessa diametrar dela skalan i fyra qvadranter som hvarochen hafva sin gradindelning från 0^0 till 90^0; nollpunkterna stå vid ena diameterns ändpunkter, och den andra diameterns ändpunkter mot 90^0. Hvarje grad är vidare delad i två likastora delar så att afståndet mellan två närliggande delstreck upptager en half grad eller 30 minuter. Skalans nonie åter är från dess nollpunkt åt hvardera sidan delad i 15 sinsemellan likastora delar, och dessa trettio delar på nonien upptaga jemnt 29 skaldelar på skalan. Det är sålunda på 1 minut inställning och afläsning med denna skala jemte dess nonie kan ske, hvilket motsvarar hvad här behöfves; vinkelintervallen $\Delta\alpha$ mellan de närliggande punkter för hvilka mätningar i det följande utföras, är nemligen i allmänhet 30, i några fall 10 minuter.

Skalan för bestämmande af vridningsvinkeln ψ ordnades ursprungligen sålunda att denna vinkel bestämdes på 10 sekunder när; men inställningen af hårkorset på kurvan kan här ske mycket noggrannare, och då tillika värdet för denna vinkel är af vigt att känna möjligast noggrannt, infördes här en vanlig okularmikrometer som tillåter afläsning på en sekund; antalet hela grader afläses härvid på skalan; 5′ antydes af en index jemte dertill hörande skala, slutligen sekunderna afläsas på okularmikrometerns kolf eller trumma, derå hvarje intervall antyder en sekund och en vridning af tre hvarf eller 300 sekunder motsvarar en skaldel eller 5 minuter.

För att vidare på beqvämt sätt bestämma värdet för initialcirkelns radie S_0 finnes på slädapparaten en skala som tillåter afläsning på $^1/_{1000}$:dels centimeter.

Här må slutligen anmärkas att hårkorset genom vridning af mikroskopets okular kan inställas så att dess ena skenkel ligger längs det element af muskelkurvan som ses i mikroskopet. Emedan detta element $d\sigma$ har blott kort utsträckning, så visar det sig som en temligen rät linie och inställningen sålunda

att hårkorsets ena skenkel delar den mellersta afdelningen af elementet $d\sigma$ i två likastora, parallela hälfter, kan ske med ganska stor säkerhet, åtminstone på några få minuter när, såsom upprepade försök visa. I detta läge är hårkorsets ena skenkel tangent, och den andra normal till muskelkurvan. Förmedelst hårkorset kan sålunda den vinkel Θ skrifarmen ϱ i ett sekundärläge gör med muskelkurvans tangent i den punkt som i mikroskopet är inställd, mätas om mikroskopet förses med skala och okularet med en index jemte nonie. För utförande af mätningen ställes till en början mikroskoparmen i initialläget, så att mikroskopet är inställd för en punkt af den vid initialläget uppdragna cirkeln; i detta läge vrides skalan och hårkorset så att korsets ena skenkel sammanfaller med mikroskoparmens riktning och tillika skalans nollpunkt visar mot index. Detta läge fås lätt i dagen om den uppdragna diameterns skärningspunkt med cirkeln inställes i mikroskopet; i detta läge är nemligen ena skenkeln af hårkorset att gifvas diameterns riktning samt skalan att fixeras med nollpunkten mot noniens index. Denna skala för mätande af vinkeln Θ är anordnad efter alldeles samma princip som cirkelskalan. Vid afläsningen af vinklarna på hvardera af dessa skalor användes lup.

Hvad för öfrigt denna vinkel Θ har eller kan hafva för betydelse för de föreliggande uppgifterna komma vi till längre fram, då vi egna uppmärksamhet åt vissa geometriska förhållanden som muskelkurvan visar.

Detta instrument på hvilket den i fråga varande analysen egentligen stöder sig, har förfärdigats härstädes af Hrr Falck-Rasmussen med synnerlig omsorg. Figur 2 på planschen II visar instrumentet efter en fotografisk bild; och figur 1 på planschen III visar huru muskelkurvan, upptagen på sådan roterande skrifyta, gestaltar sig.

4. *Apparaternas noggrannhet* måste skildt undersökas då resultaten af mätningarna skola läggas till grund för beräkningarna.

1:o *Myografen.* Det rörliga systemets vridningsaxel skall vid instrumentets användning intaga horizontalt läge och dertill ställas vinkelrätt mot skrifytan; för att pröfva om vridningsaxeln innehar horizontalt läge må främst anmärkas, att vid utförande af försöken myografbordets yta alltid ställes i horizontal riktning förmedelst instrumentets ställskrufvar och libell; [den libell vi användt är en vanlig dubbel-rör-libell, hvars båda rör stå vinkelrätt mot hvarandra. Här må vidare nämnas att bordsytan i vårt instrument ej är så noggrannt plan att härvid libellen kan ställas på hvarje ställe deraf; det ställe vi funnit vara lämpligt är den sida deraf som vid utförandet af försöken är närmast skrifytan, ungefär i midten mellan bordshålet och den aflägsnare kort-

sidan]. Har instrumentet gifvits detta läge, så kan den i fråga varande pröfningen ske på följande sätt: framför den fria änden af stafven för de löpande vigterna ställes en lodlinie sålunda att vid visering stafvens öfra kant och lodlinien ligga i samma vertikalplan. Derefter höjes eller sänkes stafven, d. v. s. axeln vrides i någondera riktningen; då befinnes vid visering stafvens kant i hvarje läge för axeln ligga i samma vertikalplan genom lodlinien; häraf slutledningen att stafven resp. dess kant rör sig i ett vertikalplan genom lodlinien, samt att vridningsaxeln är vinkelrät mot detta plan och således innehar horizontal riktning, likaså att den är vinkelrät mot stafven, resp. dess kant. — Det må vidare tilläggas att mätning af afstånden från de spetsar mellan hvilka axeln rör sig till bordsskifvans nedra yta, som är parallel med den öfra, gifver samma värde för båda.

Understödes vidare stafven för de löpande vigterna förmedelst de ofvan nämnda stöden af samma höjd, så är stafvens öfra kant parallel med den kant af bordsskifvan som vid instrumentets användning är närmast skrifytan, såsom man finner om man ställer sitt öga sålunda till instrumentet att man kan se mellanrummet mellan båda; då befinnes detta mellanrum vara jemnbredt, och om de båda kanterna synas beröra hvarandra på ett ställe, så göra de detsamma öfverallt. Förmedelst denna egenskap kan myografen lokaliseras i det önskade läget invid skrifytan, sedan nemligen denna yta blifvit ställd i ett vertikalplan.

Det nämndes ofvan att den i fråga varande vridningsaxeln är ställd vinkelrätt mot den plan-parallela kolonn som uppbär dess (axelns) ena ände; pröfning att så förhåller sig hafva vi utfört genom följande förfarande: båda stafvarna aflägsnades och myografen vändes så att den plan-parallela kolonnen blef den bas på hvilken hela instrumentet hvilade på en glasskifva; för ändamålet användes en glasskifva ställd på apparaten för mätande af vinklarna α, ψ och Θ. Förmedelst libell och instrumentets ställskrufvar gafs sedan underlaget sådant läge att kolonnens plan-parallela ytor intogo horizontalt läge. Nu visade pröfning att en lodlinie i två godtyckliga lägen låg i samma vertikalplan genom systemets (idéella) axel.

2:o *Skrifytan och dess vridningsaxel.* Skrifytan skall vara plan och vinkelrät mot dess eller rotationsapparatens axel; den skall vidare vid utförande af försök ligga i ett vertikalplan. För att pröfva om så är fallet resp. ordna apparaterna så att detta inträffar, fästes skrifytan eller glasskifvan på rotationsapparatens axel och gifves till en början godtyckligt läge; vidare ställes en lodlinie helt nära skrifytan; sedan inställes instrumentet förmedelst dess fot- eller ställskrufvar så att lodlinien vid visering öfverallt befinner sig på samma

afstånd från ytan. Då sådant läge blifvit funnet vrides skifvan (från dess axel) för att tillse att det nämnda afståndet förblifver oförändradt i hvarje läge för skrifytan. Sådana försök hafva visat att hvarje af våra skifvor få anses hafva samma tjocklek (0.6 till 0.8 centimeter) öfverallt, och vidare att i det nämnda läget — hvilket vid utförande af försök alltid är att uppsökas — skrifytan är vinkelrät mot apparatens rotationsaxel. Det kan tilläggas att om skifvans tjocklek i alla fall i olika afdelningar något litet varierar, så har detta här ej inflytande, emedan vid instrumentets användning skrifstiftets spets är litet tilltryckt mot skrifytan och af den i paragraf 1 omnämnda spiralfjädern hålles i detta läge.

För pröfning om skrifytans vinkelhastighet, sålänge muskelkurvan uppdrages, är konstant, hafva vi användt den vanliga metoden att uppdraga en stämmgaffelkurva på skrifytan; för blotta ögat ser det ock ut såsom om våglängderna i gebitet af muskelkurvan skulle hafva samma längd, resp. samma vinkelmått. Förhållandet kan vidare noggrannare undersökas förmedelst cirkelskalan för mätande af tiden eller den deremot svarande vinkeln (dock ej noggrannare än på en minut när); sådan mätning har visat våglängderna vara så att säga likastora (t. ex. i ett fall uppmättes 26 våglängder, hvilka i gebitet af muskelkurvan omfattade en fjerdedel större vinkel än kurvan; hvarje af dessa våglängder hade ett vinkelmått af i det närmaste 2^0 21′. Här må vidare nämnas att förrän armen för uppfångande af fallvigten ordnades så som i paragraf 2 nämndes kunde våglängderna under samma förhållanden visa ganska stora differenser som framträdde utan bestämd ordning, och vid mätning kunde gå ända till 7 à 8 vinkelminuter. Dessa differenser berodde på de skakningar i hvilka rotationsapparaten försättes då armen för uppfångande af fallvigten är fästad vid dess stativ; skakningarna observerades härvid tydligt om handen hölls på någon del af stativet då apparaten var i verksamhet. Dessa förhållanden och observationer med mikroskopet af små oregelbundenheter jemväl på några ställen af muskelkurvan hafva gifvit anledning att anordna armen för uppfångande af fallvigten såsom ofvan i paragraf 2 nämndes).

Noggrannheten med hvilken systemets (eller skrifarmens och dervid fästade delars) rörelse upptecknas på skrifytan är vidare beroende deraf om drifkraften vid försöken är densamma, t. ex. då muskelkurvan uppdrages och likaså tidkurvan, emedan hvardera kurvan vid våra försök upptages skildt; likaså då på samma skrifyta successivt upptagas flera muskelkurvor och en tidkurva. För dessa ändamål är det ej nog att den fallande vigten har samma storlek; äfven fallhöjden måste vara densamma. Det senare uppnås genom att linda snöret, förmedelst hvilket den fallande vigten verkar på rotationsaxeln, på

samma sätt vid de skilda försöken, lämpligast och säkrast sålunda att vindningarna på rullen kring rotationsaxeln ligga i omedelbar beröring med hvarandra och i enkelt lager; [lindas deremot i ett af försöken snöret sålunda att något hvarf går på eller öfver de andra så förändras fallhöjden och skifvans hastighet].

3:o *Apparaten för utförande af mätningarna* eller analysatorn såsom den kanske kunde kallas med afseende på dess uppgift för i fråga varande ändamål sammansättes af flera delar som hvarochen måste skildt afses.

Till en början måste mikroskoparmen hafva samma längd som skrifarmen ϱ; detta uppfylles äfven noggrannt såvidt det kan utrönas genom direkt mätning (förmedelst noggrann stångcirkel) af afståndet mellan den pelare eller kolonn kring hvars midt vridningen sker och mikroskopet, samt af radierna för dessa delar.

Vidare skall hårkorset resp. dess korsningspunkt alltid vara inställd för samma punkt huru än okularet vrides; då detta läge blifvit funnet sker fixering förmedelst fyra små skrufvar i okularet.

Att mikroskopets förskjutning längs slädapparaten sker rätlinigt visar sig om mikroskoparmen inställd för nollpunkten (d. v. s. med noniens index mot 45^0 på skalan) förskjutes under det en af de fyra radier som bilda det ofvan nämnda vinkelräta korset på mätningsapparaten är inställd i mikroskopet (och således är parallel med slädapparatens riktning); denna radie ses nemligen i mikroskopet såsom en bred, mörk linie och hårkorset resp. dess korsningspunkt ligger i hvarje läge för mikroskoparmen på samma del af denna breda linie. — Detsamma visar sig om mikroskoparmen förskjutes längs slädapparaten och tillika en (för ändamålet afsedd) spets eller pigg ställd framför mikroskopets okular får uppdraga en radie på skrifytan; denna radie visar sig alltid hafva rätlinigt förlopp.

Vidare skola de båda vridningsaxlarna för cirkelskalan och mikroskoparmen vara parallela; är således den förra vertikal — såsom den alltid är vid instrumentets användning —, så skall äfven den senare vara detsamma. Pröfning i detta hänseende möter visst svårighet; visering med tillhjelp af en lodlinie mot ena gränsen af mikroskoptuben — som har cylindrisk form — visar dock att tubens riktning icke förändras med läget, utan sammanfaller med lodlinien, då nemligen cirkelskalans vridningsaxel är ställd i vertikal riktning. (Pröfning af detta förhållande förmedelst den kolonn kring hvars midt armens vridning sker, resp. borde ske, lämpar sig här mindre väl tillfölje af kolonnens koniska form.)

Pröfning af skalorna förmedelst deras nonier, resp. okularmikrometern visar noggrann öfverensstämmelse; 29 intervaller på skalan för mätande af vinkeln α upptaga i hvarje läge 30 intervaller på nonien; detsamma gäller skalan och nonien för mätande af vinkeln ϑ. Inställes slutligen okularmikrometern sålunda att de parallela linierna i dess okular ligga jemnt på två närliggande delstreck af skalan, och således deras afstånd från hvarandra är jemnt ett delstreck, så inträffar detsamma vid hvarje annat läge skalan gifves till okularmikrometern.

Pröfning af mikrometerskrufven i skalan för mätande af vinkeln ψ har icke skett; vi utföra nemligen mätningarna alltid sålunda att inställningen utföres nästan fullständigt förmedelst hand och att mikrometerskrufven anlitas blott för den sista inställningen, hvarvid endast en ringa bråkdel af så att säga samma skrufgänga kommer till användning vid alla mätningarna.

5. *Konstanterna för beräkningarna.* Vi afse här endast de konstanter som komma till användning i det längre fram anförda försöket; i detta försök användes ingen vigt mg och inga löpande vigter. Här hafva således m och T'_0 båda värdet noll. Vidare användes anordningen 1:o, hvarom ofvan i afdelning II var fråga; trådens längd behöfde således ej mätas.

1:o *Skrifarmens längd* ϱ är en gång för alla bestämd, nemligen 20 centimeter (från skrifspetsen till vridningsaxeln i vinkelrät riktning).

2:o *Radien för hjulet* är att mätas och härtill är radien för den använda (silkes-)tråden att adderas för att erhålla värdet för R i de ofvan — i afdelning II — uppställda eqvationerna. Detta värde befanns i medeltal af tre mätningar vara

$$R = 3.996 \text{ centimeter},$$

hvartill är att adderas trådens radie 0.012 centimeter för en måttligt utspänd tråd. Radien R i de ofvan angifna eqvationerna har sålunda värdet $R = 4.008$ centimeter. Mätningarna utfördes med stångcirkel.

3:o *Momentet Mga för det rörliga systemet* bestämdes förmedelst vägning; [här må anmärkas att vågens kupa måste hafva vid öppning i ena änden, för att myografen, ställd på dess stativ, tillräckligt skall kunna närmas vågbalken; för användning af fysiologiska laboratoriets kemiska våg blef det tillochmed nödigt att helt och hållet aflägsna kupan; vidare var vågbalken på de ställen der vigtskålarna hänga försedd med tvenne helt små, lika tunga krokar]. Vid utförandet af vägningen fick stafven för de löpande vigterna förmedelst en kokongtråd, som var fästad vid den ena af de ofvan nämnda krokarna, hänga

vid vågbalken. Förmedelst stativet samt med tillhjelp af lodlinier och libell ställdes sedan det rörliga systemet i initialläget, således med ϱ och a i ett horizontalplan genom vridningsaxeln, samt kokongtråden vinkelrätt mot detta plan. Sedan detta läge blifvit funnet, undersöktes huru stor vigt μg måste sättas på andra vigtskålen för att upphära systemet i initialläget; tillika observerades upphängningspunktens afstånd l från systemets vridningsaxel. För sistnämnda ändamål inställdes kokongtråden från början på ett af centimeterdelstrecken å stafvens yta; afståndet l kunde sålunda omedelbart afläsas på stafven. Produkten af vigten μg och afståndet l är då det moment som sträfvar att höja det rörliga systemet och är lika med det moment Mga som verkar i massmedelpunkten och sträfvar att sänka detsamma.

Sådana bestämningar utfördes för flera olika värden för l för att tillse att produkten $\mu g l$ antoge samma eller så att säga samma värde i hvarje fall. För bestämning af Ma är således

$$\mu_1 g l_1 = \mu_2 g l_2 = \ldots = Mga.$$

Enligt detta förfarande erhölls af tolf försök — utförda utan och med eqvilibrerade vigter — i medeltal

$$Ma = 224.540 \text{ och } Log\, Ma = 2.351\,293\,7 ;$$

således

$$Mga = 224.540 \,.\, g$$

der g för Helsingfors har värdet $g = 981.9$ centimeter.

4:o *Konstanten* $\frac{T}{Mga}$ (som tjenar till bestämning af värdet för tröghetsmomentet T, emedan i förevarande fall såsom redan nämndes m och T_0 i de allmänna eqvationerna i afdelning II hafva värdet noll) bestämdes genom att beräkna svängningstiden för det rörliga systemet. För ändamålet gafs myografen på dess stativ sådant läge att stafven för de löpande vigterna och skrifarmen hängde vertikalt nedåt; sådant läge uppsöktes med tillhjelp af en lodlinie. Sedan fick systemet utföra helt små svängningar hvilkas antal på viss tid observerades; deraf fås värdet för en (hel) period τ och dermed då här

$$\frac{T}{Mga} = \left[\frac{\tau}{2\pi}\right]^2$$

värdet för $\frac{T}{Mga}$. Sålunda erhölls i medeltal af tio observationer perioden lika med 1.013 3 sekunder med ett medelfel af 0.080. [Vid beräkningen af sistnämnda

qvantitet dividerades felqvadraternas summa med antalet observationer minskadt med en enhet, d. v. s. här med talet 9]. Deraf beräknas

$$Log\,\frac{T}{Mga} = 0.415\,556\,8 - 2\ ;\ \frac{T}{Mga} = 0.026\,034\,9$$

$$Log\,\frac{Mga}{T} = 1.584\,443\,2\,.$$

Här må slutligen anmärkas att det funna värdet för $\frac{T}{Mga}$ kan verifieras förmedelst muskelkurvan, nemligen den del deraf i hvilken muskeln icke inverkar på systemet, således — i öfverensstämmelse med hvad ofvan i paragraf 5, afdelning II — var fråga från tiden τ vid läget ψ_τ der systemets vinkelhastighet är ω_τ och vinkelacceleration ω'_τ intill kurvans högsta punkt. Från nämnda ögonblick är systemets rörelse, ensam för sig betraktad, en pendelrörelse. Muskelkurvan är sålunda sålänge muskeln icke verkar på systemet en sammansättning af systemets pendelrörelse och skrifytans rörelse; [detta är svaret på den i slutet af afdelning II fallet 1:o berörda frågan].

Sålänge muskeln icke verkar på systemet är således af eqvationerna 11d och 13b:

$$\frac{T}{Mga} = -\frac{\cos\psi}{\omega^2}\ ;\ \text{samt}\ \frac{T}{Mga} = \frac{\sin\psi_m - \sin\psi}{\frac{\omega^2}{2}}\,,$$

hvarmed det funna värdet för $\frac{T}{Mga}$ kan verifieras.

5:o *Tröghetsmomentet* T kan nu beräknas då värdena för $\frac{T}{Mga}$ och Mga äro kända; för att undvika stora tal bestämma vi dock i det följande den mekaniska energin icke i erg, utan i gramcentimeter, hvaraf densamma om så önskas fås uttryckt i erg genom multiplikation med g, d. v. s. med talet 981.9 centimeter. I öfverensstämmelse härmed beräkna vi här värdet för $\frac{T}{g}$ och T samt värdet för några koefficienter som vid tillämpningen komma till användning.

$$Log\,\frac{T}{g} = 0.766\,850\,5\ ;\ \frac{T}{g} = 5.845\,89\ ;\ T = 5740.0\ \text{gr(cm)}^2\,;$$

$$Log\,\frac{T}{2g} = 0.465\,820\,5$$

$$Log\,\frac{T}{gR} = 0.163\,922\,8\,.$$

I det sista uttrycket har R eller radien för hjulet värdet 4.008 centimeter såsom i början af denna paragraf nämndes.

6:o *Konstanterna som bestämmas af skrifytan* resp. förmedelst instrumentet för mätning af vinklarna α, ψ och Θ, äro trenne, nemligen radien S_0 för cirkeln vid initialläget, vidare skrifytans vinkelhastighet o samt tidsintervallen Δt som motsvarar den vinkelintervall $\Delta\alpha$ för hvilken mätning af vinklarna α, ψ och Θ blifvit utförd.

Radien S_0 för cirkeln vid initialläget bestämmes till dess längd genom afläsning på skalan vid slädapparaten i centimeter och tusendedelar deraf, såsom ofvan — i paragraf 3 — nämndes.

Skrifytans vinkelhastighet, som i det följande betecknas med o, bestämmes förmedelst tidkurvan, i hvilken hvarje (hel) våglängd i våra försök motsvarar en tid af $^1/_{128}$ sekund. För ändamålet uppmätes det vinkelmått α^0 antalet n våglängder som ligga under muskelkurvan (eller ett större antal af dem, t. ex. 20 stycken) upptaga; då är

$$o = \frac{\alpha^0}{\frac{n}{128}}.$$

Här är α^0 uttryckt i grader och vinkelminuter; i allmänhet behöfs dock vinkelhastigheten o i lineärt mått; α^0 är derföre i föregående relation att uttryckas i båglängd i en cirkel hvars radie är lika med enheten, här en centimeter.

Tidsintervallen Δt som motsvarar vinkelintervallen $\Delta\alpha$, för hvars hvardera ändpunkt mätningarna blifvit utförda, bestämmes af relationen

$$\Delta t = \frac{n}{128} \cdot \frac{\Delta\alpha}{\alpha^0}$$

eller äfven med tillhjälp af föregående relation af

$$\Delta t = \frac{\Delta\alpha}{o}.$$

Vid användningen af dessa relationer äro sjelffallet $\Delta\alpha$ och α^0 samt likaså $\Delta\alpha$ och o att båda bestämmas i samma enhet, vinkelmått eller lineärt mått; vi använda här endast det senare.

V.

Utförandet af försöken och mätningarna.

Såsom af det föregående framgår omfattar undersökningen tre olika uppgifter, nemligen utförandet af försöken, af mätningarna och slutligen af beräkningarna. I afseende på de båda förra göra vi här några tillägg till hvad redan ofvan härom blifvit nämndt; till frågan om beräkningarna återkomma vi längre fram (i afdelning VII).

1. *Försöken.* Sedan glasskifvan blifvit sotad uppdrages på densamma genom medelpunkten ett vinkelrätt kors; dessa linier afse bland annat noggrann lokalisation af myografen, resp. skrifspetsen vid utförandet af försöken. Lämpligast och säkrast utföres detta förmedelst mätningsapparaten; just förrän skifvan här fixeras, skjutes den mot fixeringsskrufven (som har samma diameter som rotationsapparatens axel) i riktningen af en af de fyra radierna på cirkelskalan; denna riktning utmärkes på skrifytan (t. ex. förmedelst samma siffra som står vid radiens ändpunkt); dernäst uppdrages ett vinkelrätt kors i samma riktningar som cirkelskalans fyra radier. För detta ändamål inställes cirkelskalan med dess ena nollpunkt mot noniens nollpunkt, likaså mikroskoparmen för dess initialläge, och framför mikroskopets frontlins inskjutes den ofvan nämnda spetsen; slutligen närmas mikroskopet skrifytan till dess spetsen helt lätt berör densamma. Derefter förskjutes mikroskoparmen längs slädapparaten så att en radie uppdrages på den sotade ytan. Efter vridning af skifvan 90^0 för hvarje gång uppdragas likaså de tre öfriga radierna. Slutligen kan ännu en cirkel med en radie af ungefär 12 centimeter uppdragas genom att vrida cirkelskalan jemte skrifytan ett hvarf.

Nu öfverföres skifvan på rotationsapparaten och anordnas här såsom i föregående afdelning paragraf 2 nämndes, med iakttagande af att den utmärkta

radien får vertikal riktning öfverst på skifvan, så att den kant i skifvans hål som blef skjuten mot fixeringsskrufven nu stöder sig mot rotationsaxeln.

Myografen (hvars vridningsaxel blifvit lätt fixerad, men utan att vickning kan ega rum) på dess stativ närmas skrifytan och ordnas invid den såsom ofvan — i paragraf 2 i föregående afdelning — blifvit nämndt; muskelpreparatet fixeras och härvid tillses (förmedelst en lodlinie) att tråden från det rörliga systemet till muskeln har vertikal riktning och att dess fortsättning går möjligast midt genom muskeln; här må anmärkas att för finnande af sådant läge stundom och tillochmed ofta os femoris måste omfattas med pinsett, klykan hvari det är fästadt något lösas, och benet vridas kring dess längdaxel). För bedömande af skrifarmens parallela läge med skrifytan lemnar den rektangulära formen för myografens bord och bas samt för stativets arm och fotställning, samt framför allt afståndet mellan myografbordets kant och skrifytan ledning. Den sista inställningen af skrifspetsen på den vertikalt ställda, utmärkta radien sker förmedelst de skrufvar i myografens stativ som afse förskjutning af dess pelare; spetsen är att inställas på den utmärkta, vertikalt ställda radien mellan 12 och 23 centimeter från axeln (för att mätningarna skola kunna ske i genomgående ljus som reflekteras från en under cirkelskalan ställd spegel).

För utförandet af sjelfva försöken som nu följa, behöfvas två personer, den ena för skötande af myografen resp. för dess aflägsnande i rätta ögonblicket från skrifytan genom att vrida på den härför afsedda skrufven, den andra för att sköta rotationsapparaten. Vid öfverenskommet tecken aflägsnas det kugghjul som fixerar rotationsapparatens axel åt sidan så att rörelsen, retningen och myogrammets uppdragande försiggå såsom i föregående afdelning paragraf 2 blifvit nämndt. Härunder är ljudet då kontakten slås upp den signal som tillkännagifver i hvilket ögonblick skrufven som aflägsnar skrifspetsen från skrifytan är att vridas i riktig riktning; för utförandet hålles handen färdig på denna skruf.

Tidpunkten t_0 för retningen är sedan att på vanligt sätt utmärkas. Slutligen uppdrages förmedelst en spets (densamma hvarom ofvan var fråga), insatt i lämpligt stativ, en cirkel med en radie af ungefär 12 eller flere centimeter; denna cirkel tjenar till att lokalisera skrifytan på mätningsapparaten så att rotationsaxeln går genom cirkelskalans medelpunkt.

Om ytterligare en eller flera muskelkurvor skola uppdragas på samma skifva så är samma förfarande att upprepas, sedan nemligen myografens läge för hvarje gång blifvit förändradt så att kurvorna icke upptecknas på samma ställe af skrifytan.

Sedan kurvorna blifvit uppdragna och för hvarje af dem tiden t_0 för retningen utmärkt, uppdrages tid- eller stämmgaffelkurvan; egentligen behöfs blott en enda sådan, hvar som helst på skifvan (mellan 12 och 23 centimeter från medelpunkten), dervid iakttages att alltid drifkraften (den fallande vigtens både storlek och fallhöjd) är densamma som vid försöken.

Slutligen löstages glasskifvan från rotationsapparaten och dess sotade yta öfvergjutes med lätt flytande fernissa för fixering af kurvor. linier och anteckningar å densamma. Nu eller efter det mätningarna blifvit gjorda kan afkopiering af kurvorna ske om sådan skall verkställas; vi hafva för detta ändamål användt i handeln förekommande, ljuskänsligt så kalladt blå-kopiepapper (hvarmed ritningar afkopieras). Vid utförandet sättes en annan dylik glasskifva på mätningsapparaten och ofvanpå denna den i fråga varande skifvan med skrifytan mot den förra; mellan båda instickes det ljuskänsliga pappret på stället för kurvorna, och skifvorna fixeras. Om 10 till 15 minuter vid vanlig dagsbelysning har reaktionen försiggått, då pappret uttages och nedsänkes i destilleradt vatten under några minuter med iakttagande att ljuset ej får inverka på den tecknade sidan. Kurvan på planchen III, figuren 1 är ursprungligen på detta sätt afkopierad.

2. *Mätningarna.* För utförande af mätningarna är glasskifvan att inställas på mätningsapparaten sålunda att cirkelskalans axel sammanfaller med den axel kring hvilken skrifytan roterade då myogrammet uppdrogs. För att finna detta läge skjutes glasskifvan i den utmärkta radiens riktning mot fixeringsskrufven och mikroskoparmen förskjutes eller vrides så att hårkorset (dess korsningspunkt) ligger på den uppdragna cirkeln; vridning af cirkelskalan ett hvarf visar i hvilken riktning skrifytan är att förskjutas för att inställningen skall blifva noggrann; för den sista inställningen kunna på cirkelskalan fyra små skrufvar fixeras hvarmed glasskifvan kan förskjutas om minimala distanser i två vinkelräta riktningar. Är läget funnet så fixeras skifvan; derefter behöfs ännu kontrollförsök för att tillse att läget icke rubbats vid fixeringen.

I afseende på utförandet af mätningarna må här till hvad ofvan i föregående afdelning, paragraferna 3, 4 och 5 nämndes, några tillägg göras; för att noggrannt inställa hårkorset på kurvans midt vrides hårkorset så att dess skenklar göra ungefär likastora vinklar med kurvan; sedan — under det ögat hålles på några centimeters afstånd från okularet — gifves mikroskopet sådant läge att de båda trianglar som hårkorsets skenklar afskära af muskelkurvan blifva kongruenta. För att derefter afläsa vinkeln Θ är okularet att vridas

— under det ögat åter aflägsnas — till dess att hårkorsets ena skenkel delar elementet $d\sigma$ i två likastora, parallela hälfter.

Här vore vidare att utreda på hvilken vinkelintervall $\Delta\alpha$ mätningarna äro att göras; i detta hänseende kan väl tillsvidare ej någon allmän regel uppställas; dock tro vi oss hafva funnit att man ej bör sträfva till alltför små vinkel- eller tidsintervaller. I allmänhet torde tillsvidare en vinkelintervall af 30 minuter som i våra försök motsvarar en tidsintervall Δt af ungefär 0.001 75 sekund motsvara ändamålet; i några fall hafva vi dock inskränkt intervallen till 10 vinkelminuter som motsvarar en tidsintervall af 0.000 58 sekund. Hvad vidare skilda ställen på kurvan som sålunda underkastas undersökning beträffar, så finnas på densamma — såsom i följande afdelning utredes — några utmärkta punkter (icke alldeles många); det är dem vi särskildt vid mätningarna afsett att utreda både derföre att de eller några af dem möjligen stå i samband med de punkter som i afdelning II uppvisades tillkomma intresse i fysiologiskt hänseende, och derföre att hvar och en af dessa punkter tillkommer någon karakteristisk egenskap.

3. *Noggrannheten vid undersökningens utförande* är sjelffallet väsendtligen beroende af det sätt på hvilket apparaterna användas, äfven om apparaterna hvar för sig äro fullt pålitliga. De vigtigaste hithörande förhållandena må här ännu sammanställas: hit hör till en början skrifytans lokaliserande på de båda apparaterna så att vridningsaxlarna i hvardera fallet intaga samma läge till skrifytan; vidare skrifytans inställning på rotationsapparaten så att den utmärkta radien intager vertikal riktning; myografens uppställande med bordsytan och skrifarmen i resp. horizontalplan; muskelns och trådens inställning i en vertikal; slutligen inställning af skrifstiftets spets mot den utmärkta radien på skrifytan och skrifarmens parallela läge med samma yta så att skrifarmen ϱ blifver en tangent till initialcirkeln. Hvarje af dessa omständigheter kunna gifva upphof till felkällor vid försöken, och behöfva derföre öfverses just förrän försöket utföres.

4. *Beräkningarna* af värdena för differentialkoefficienterna ω, ω', ω''... äro hvad här i främsta rummet afses för att härmed få de resultat som i fysiologiskt hänseende äro af intresse i dagen. Detta kan såsom ofvan blifvit antydt ske förmedelst numerisk interpolation, om nemligen mätningarna kunna utföras med tillräcklig noggrannhet; tillsvidare har dock detta vilkor ej blifvit uppfyldt; orsaken härtill anse vi vara att sökas — icke i bristande noggrannhet i apparaten för mätande af vinkeln ψ, utan — i oregelbundenheter i

muskelkurvan hvilka vi hittills ej lyckats fullständigt undvika. Under sådana förhållanden har det blifvit nödigt att söka andra metoder förmedelst hvilka man åtminstone någorlunda noggrannt kan utreda dessa koefficienters värden. För detta ändamål öfvergå vi i nästa afdelning till undersökning af muskelkurvan i geometriskt och mekaniskt eller kinematiskt hänseende; det gäller bland annat att undersöka hvilken betydelse den med mikroskopets hårkors uppmätta vinkeln Θ har eller kan hafva för de föreliggande uppgifterna.

VI.

Muskelkurvan; geometriska och kinematiska förhållanden.

1. *Beteckningar.* I figur 6 på planchen I betecknar O skrifytans medelpunkt eller noggrannare uttryckt skärningspunkten mellan denna yta och dess vridningsaxel. Radien för den cirkel skrifarmen ϱ uppdrager vid initialläget är betecknad med S_0; till denna cirkel är skrifarmen ϱ tangent ända till dess muskelryckningen begynner. Den prickade linien i figuren är ett stycke af muskelkurvan (t. ex. på dess uppstigande skenkel), och xy betecknar en punkt på densamma. Genom denna punkt är vidare en cirkel, koncentrisk med den förra uppdragen; dess radie betecknas med S. Skrifarmens vridningspunkt är i figuren betecknad med $x_c\, y_c$; denna punkt ligger på en cirkel, koncentrisk med de båda förra; dess radie är betecknad med S_1. De tre koncentriska cirklarna med O såsom gemensam medelpunkt beteckna vi kortligen med uttrycken: cirkeln (S_0), (S) eller (S_1).

På cirkeln (S_0) betecknar vidare t_0 det ögonblick då retningen sker, och t_1 det då ryckningen begynner, vinkeln α_0 mellan radierna för cirkeln (S_0) dragna till dessa punkter, bestämmer då latenta retningsstadiet; och tiden t som förflutit sedan ryckningen begynte mätes af den vinkel α om hvilken radien till punkten t_1 blifvit vriden under samma tid.

Skrifarmen i sekundärläget med vridningspunkten i $x_c\, y_c$ på cirkeln (S_1) och skrifspetsen i punkten xy på muskelkurvan är i figuren betecknad med ϱ'; uppdrages en cirkel med ϱ såsom radie och punkten $x_c\, y_c$ såsom medelpunkt så bestämmer dess (ena) skärningspunkt med cirkeln (S_0) vinkeln α och dermed tiden t som förflutit från ryckningens begynnelse till dess skrifarmen blifvit öfverförd till nyssnämnda sekundärläge; ϱ i figuren betecknar primärläget för skrifarmen i samma ögonblick ifall ingen muskelryckning egt rum; och vinkeln mellan ϱ och ϱ' är skrifarmens vridningsvinkel ψ vid tiden t.

I figuren betecknar vidare ζ den vinkel skrifarmen i ett primärläge gör med radien S_1 som från medelpunkten O drages till vridningspunkten $x_c y_c$ på cirkeln (S_1).

Slutligen beteckna vi med Θ den förmedelst mikroskopets hårkors uppmätta, spetsiga vinkeln mellan skrifarmen i sekundärläget ϱ' och kurvans tangent. Med o betecknas skrifytans vinkelhastighet $\frac{d\alpha}{dt}$, som här har konstant värde.

2. *Koordinatsystemet.* Läget i skrifytans plan definiera vi förmedelst ett rätvinkligt axelsystem xy hvars origo ligger i de koncentriska cirklarnas medelpunkt O; den positiva y-axeln är härifrån dragen genom punkten t_1, och den positiva x-axeln åt samma sida som muskelkurvan är belägen (åt höger i nyssnämnda figur); x-axeln är sålunda parallel med skrifarmen i det primärläge denna intager vid tiden t_1 då ryckningen begynner. I detta axelsystem äro xy koordinaterna för en punkt af muskelkurvan, samt $x_c y_c$ de samtidiga koordinaterna för skrifarmens vridningspunkt.

Såsom figuren 6 förtydligar gör skrifarmen i primärläget ϱ under här i fråga varande förhållanden vinkeln α med (den negativa) x-axeln och således i sekundärläget ϱ' vinkeln $\alpha + \psi$ med samma axel; radien S_1 från medelpunkten O till vridningspunkten $x_c y_c$ gör således vinkeln $\zeta - \alpha$ med x-axeln.

Det sålunda definierade axelsystemet deltager i skrifytans rörelse och förändras således ständigt till dess läge. Man kan dock härifrån öfvergå till ett fixt axelsystem genom att tillägga hela det sammansatta system som skrifarmen (jemte dervid fixerade delar) och skrifytan tillsamman bilda, en gemensam vridning kring skrifytans vridningsaxel vid O, med samma vinkelhastighet o som tillkommer skrifytan, men i motsatt riktning, — härvid förutsatt att skrifarmen i alla fall utför sin vridning kring punkten $x_c y_c$ på samma sätt som i verkligheten. Då får skrifytan och axelsystemet xy anses vara i hvila, men skrifarmen teckna muskelkurvan genom att samtidigt utföra tvenne vridningar kring parallela axlar, nemligen den verkliga kring punkten $x_c y_c$ med vinkelhastigheten ω samt en annan kring punkten O med vinkelhastigheten o i motsatt riktning mot skrifytans rörelse. Till dessa båda vridningar som skrifarmen under i fråga varande förhållanden samtidigt utför, återkomma vi längre fram; här må blott anmärkas att försöken äro så anordnade att sålänge skrifarmen höjes, ske båda vridningarna i samma riktning, och då den sänkes i motsatt riktning; det förra inträffar således under det muskelkurvans uppstigande skenkel uppritas ända till kurvans högsta punkt öfver cirkeln (S_0) eller topp, det senare från sistnämnda punkt till den nedstigande skenkelns ändpunkt.

3. *Allmänna eqvationer.* Med de sålunda införda beteckningarna och med tillhjelp af nyssnämnda figur framträda omedelbart vissa relationer, på hvilka den närmast följande undersökningen stöder sig. Figuren visar till en början att

$$\left.\begin{aligned} S_1 \sin\zeta &= S_0 \\ S_1 \cos\zeta &= \varrho \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 19_a \; ; \; \text{hvaraf:} \quad \left.\begin{aligned} tg\,\zeta &= \frac{S_0}{\varrho} \\ S_1 &= \sqrt{\varrho^2 + S^2_0} = \varrho \sqrt{1 + \left(\frac{S_0}{\varrho}\right)^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 19_b.$$

Häraf åter fås, om för de i det följande ofta återkommande uttrycken $S_1 \sin(\zeta + \psi)$ och $S_1 \cos(\zeta + \psi)$ införas de förkortade beteckningarna resp. h och k:

$$\left.\begin{aligned} S_1 \sin(\zeta + \psi) = h &= S_1(\sin\zeta\cos\psi + \cos\zeta\sin\psi) = S_0\cos\psi + \varrho\sin\psi \\ S_1 \cos(\zeta + \psi) = k &= S_1(\cos\zeta\cos\psi - \sin\zeta\sin\psi) = \varrho\cos\psi - S_0\sin\psi \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 20_a.$$

hvaraf

$$h^2 + k^2 = S^2_1 \; ; \; \text{och} \; \operatorname{tg}(\zeta + \psi) = \frac{h}{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 20_b.$$

Vidare visar samma figur att koordinaterna $x_c y_c$ för skrifarmens vridningspunkt hafva värdena

$$\left.\begin{aligned} y_c &= S_1 \sin(\zeta - \alpha) = S_0\cos\alpha - \varrho\sin\alpha \\ x_c &= S_1 \cos(\zeta - \alpha) = \varrho\cos\alpha + S_0\sin\alpha \end{aligned}\right\} \; ; \; \text{hvaraf} \quad \left.\begin{aligned} \operatorname{tg}(\zeta - \alpha) &= \frac{y_c}{x_c} \\ S^2_1 &= y^2_c + x^2_c \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 21.$$

De närmast föregående relationerna visa att följande uttryck som längre fram på några ställen förekomma hafva värdena h och k, nemligen

$$\left.\begin{aligned} y_c\cos(\alpha + \psi) + x_c\sin(\alpha + \psi) &= S_1\sin(\zeta + \psi) = h \\ x_c\cos(\alpha + \psi) - y_c\sin(\alpha + \psi) &= S_1\cos(\zeta + \psi) = k \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 22.$$

Slutligen visar figuren att koordinaterna x och y för den i fråga varande kurvpunkten äro bestämda af relationerna

$$\left.\begin{aligned} y - y_c &= \varrho'\sin(\alpha + \psi) \\ x_c - x &= \varrho'\cos(\alpha + \psi) \end{aligned}\right\}, \; \text{hvaraf fås:} \quad \left.\begin{aligned} y &= y_c + \varrho\sin(\alpha + \psi) \\ x &= x_c - \varrho\cos(\alpha + \psi) \end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad 23_a.$$

emedan ϱ' är lika med ϱ. Af de sista relationerna fås vidare, om vinkeln mellan radius vector S från medelpunkten O till kurvpunkten xy och x-axeln betecknas med $\angle\,(Sx)$

$$\left.\begin{aligned} S\sin\angle\,(Sx) &= y \\ S\cos\angle\,(Sx) &= x \end{aligned}\right\};\ \text{således:}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\angle\,(Sx) &= \frac{y}{x} = \frac{y_c+\varrho\sin(\alpha+\psi)}{x_c-\varrho\cos(\alpha+\psi)} \\ y^2+x^2 = S^2 &= y^2{}_c+x^2{}_c+\varrho^2-2\varrho\,[x_c\cos(\alpha+\psi)-y_c\sin(\alpha+\psi)] = \varrho^2+S^2{}_1-2\varrho k \end{aligned}\right\}.\ 23_{b.}$$

De sista relationerna bestämma sålunda den i fråga varande radius vector till riktning och storlek.

Af de sålunda funna uttrycken för h, k, $y_c\,x_c$ samt $y\,x$ härledas genom differentiation med afseende på tiden t nya relationer hvilka likaså i det följande finna användning, nemligen

$$\left.\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= S_1\,\omega\cos(\zeta+\psi) = \omega k \\ \frac{dk}{dt} &= -S_1\,\omega\sin(\zeta+\psi) = -\omega h \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ 24_{a.}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_c}{dt} &= -S_1\,o\cos(\zeta-\alpha) = -ox_c \\ \frac{dx_c}{dt} &= S_1\,o\sin(\zeta-\alpha) = oy_c \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ 24_{b.}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2y_c}{dt^2} &= -o\frac{dx_c}{dt} = -o^2y_c \\ \frac{d^2x_c}{dt^2} &= o\frac{dy_c}{dt} = -o^2x_c \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ 24_{c.}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -ox_c+\varrho\,(o+\omega)\cos(\alpha+\psi) \\ \frac{dx}{dt} &= oy_c+\varrho\,(o+\omega)\sin(\alpha+\psi) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ 24_{d.}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} &= -o^2y_c-\varrho\,(o+\omega)^2\sin(\alpha+\psi)+\varrho\omega'\cos(\alpha+\psi) \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -o^2x_c+\varrho\,(o+\omega)^2\cos(\alpha+\psi)+\varrho\omega'\sin(\alpha+\psi) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ 24_{e.}$$

Här må vidare den obekanta funktion som kan tänkas bestämma det sätt på hvilket muskelkurvans ordinata y beror af dess abskissa x, definieras förmedelst relationen

$$y = f(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 25_a.$$

samt $f'(x)$ och $f''(x)$ beteckna första och andra differentialkoefficienterna af denna funktion med afseende på x. Då här x och y äro funktioner af en och samma variabla nemligen tiden t, så äro värdena för dessa koefficienter bestämda af relationerna

$$f'(x) = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}\,; \text{ samt } f''(x) = \left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 25_b.$$

Betecknar derföre ϑ den vinkel tangenten i punkten xy af muskelkurvan gör med x-axeln samt r krökningsradien i samma punkt, så äro

$$\operatorname{tg}\vartheta = f'(x) = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}\,; \text{ och } r = \frac{\{1 + [f'(x)]^2\}^{3/2}}{f''(x)} = \frac{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} \quad \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}} \quad . \quad . \quad . \quad 25_c.$$

Med tillhjelp af dessa relationer kunna några kinematiska förhållanden i afseende på skrifstiftets rörelse längs muskelkurvan närmare utredas. Till en början beteckna $\frac{dy}{dt}$ och $\frac{dx}{dt}$ komponenterna längs axlarna af den hastighet hvarmed den i fråga varande rörelsen sker, och förhållandet mellan dem, således enligt föregående relation $tg\vartheta$, bestämmer hastighetens riktning. Betecknar derföre $d\sigma$ elementet af muskelkurvan i punkten xy, och således $\frac{d\sigma}{dt}$ hastigheten, så fås:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt}\sin\vartheta &= \frac{dy}{dt} \\ \frac{d\sigma}{dt}\cos\vartheta &= \frac{dx}{dt} \end{aligned}\right\}\text{; samt häraf: } \left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\vartheta &= \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} \\ \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 &= \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 [1 + \operatorname{tg}^2\vartheta] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 26_a.$$

Dessa båda eqvationer blifva tillfölje af relationerna 24 d samt 21

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt}\sin\vartheta &= -S_1\, o\cos(\zeta-\alpha) + \varrho\,(o+\omega)\cos(\alpha+\psi) \\ \frac{d\sigma}{dt}\cos\vartheta &= S_1\, o\sin(\zeta-\alpha) + \varrho\,(o+\omega)\sin(\alpha+\psi) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 26_b.$$

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{-S_1\, o\cos(\zeta-\alpha) + \varrho\,(o+\omega)\cos(\alpha+\psi)}{S_1\, o\sin(\zeta-\alpha) + \varrho\,(o+\omega)\sin(\alpha+\psi)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 26_c.$$

$$\left[\frac{d\sigma}{dt}\right]^2 = \varrho^2(o+\omega)^2 + S_1{}^2 o^2 - 2\varrho\, S_1\, o\,(o+\omega)\cos(\zeta+\psi) =$$
$$= \varrho^2(o+\omega)^2 + S_1{}^2 o^2 - 2\varrho\, o\,(o+\omega)\,k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 26_d.$$

Af eqvationerna 26 b härledas vidare

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt}\sin(\vartheta+\alpha+\psi) &= \varrho\,(o+\omega)-ok \\ \frac{d\sigma}{dt}\cos(\vartheta+\alpha+\psi) &= oh \end{aligned}\right\}; \quad \ldots\ldots\ldots 26_{e.}$$

den förra eqvationen fås genom att multiplicera de ofvan nämnda eqvationerna med resp. $\cos(\alpha+\psi)$ och $\sin(\alpha+\psi)$ samt sedan addera resultaten; den senare genom att multiplicera den förra med $\sin(\alpha+\psi)$, den senare med $\cos(\alpha+\psi)$ och sedan substrahera den förra från den senare.

Af de sålunda funna uttrycken för $\sin(\vartheta+\alpha+\psi)$ och $\cos(\vartheta+\alpha+\psi)$ fås slutligen

$$\operatorname{tg}(\vartheta+\alpha+\psi) = \frac{\varrho\,(o+\omega)-ok}{oh} \quad \ldots\ldots\ldots 26_{f.}$$

Likaså beteckna $\frac{d^2y}{dt^2}$ och $\frac{d^2x}{dt^2}$ i eqvationerna 24 e komponenterna längs axlarna af accelerationen eller den accelererande kraft som i kurvpunkten xy verkar på skrifspetsen. Till frågan om accelerationens storlek och riktning återkomma vi längre fram; här afse vi endast dess komponenter Φ_n och Φ_t längs normalen och tangenten. Den förra eller Φ_n har värdet $\frac{1}{r}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$, således tillfölje af eqvationerna 25 c och 26 a

$$\Phi_n = \frac{1}{r}\left[\frac{d\sigma}{dt}\right]^2 = \left[\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right]:\frac{d\sigma}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots 26_{g.}$$

Den senare komponenten eller Φ_t har värdet $\frac{d\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)}{dt}$, således tillfölje af eqvationen 26 a

$$\Phi_t = \frac{d\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)}{dt} = \left[\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right]:\frac{d\sigma}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots 26_{h.}$$

Med tillhjelp af dessa allmänna eqvationer gå vi främst att undersöka i hvilket samband den förmedelst mikroskopets hårkors uppmätta vinkeln Θ står med vinklarna ϑ, α och ψ samt några andra omständigheter i afseende på denna vinkel Θ.

4. *Vinkeln* Θ är — såsom i afdelning IV, paragraf 3 framhölls — den spetsiga vinkel skrifarmen i sekundärläget ϱ' gör med elementet dv eller med tangenten i den i fråga varande kurvpunkten xy. För bestämmande af det beroende i hvilket denna vinkel står till vinklarna ϑ, α och ψ måste det läge afses tangenten i olika gebit af muskelkurvan intager i förhållande till skrifarmen och x-axeln; tre, tillochmed flera olika fall äro här att skilja, nemligen:

A) I början af muskelkurvan intaga dessa tre linier det läge till hvarandra figur 7 *A* antyder, så att ϑ och $\alpha + \psi$ båda äro inre, spetsiga vinklar i den triangel de tre linierna bilda och Θ en motstående yttre; i detta fall är således

$$\vartheta + \alpha + \psi = \Theta \text{ ; och: } \operatorname{tg}(\vartheta + \alpha + \psi) = \operatorname{tg}\Theta .$$

Detta förhållande fortfar ända till dess att i en punkt på kurvans uppstigande skenkel tangenten blifver parallel med x-axeln, och således

$$\vartheta = \vartheta_0 = o \text{ , och tillika: } \alpha + \psi = \Theta .$$

B) Från denna punkt mot kurvans andra ände skär tangenten (den positiva) x-axeln under trubbig vinkel såsom figur 7 *B* förtydligar; i detta fall är:

$$\Theta = \vartheta - [\pi - (\alpha + \psi)] \text{ ; således: } \vartheta + \alpha + \psi = \pi + \Theta \text{ ; samt åter: } \operatorname{tg}(\vartheta + \alpha + \psi) = \operatorname{tg}\Theta ,$$

emedan Θ alltid är spetsig. Detta förhållande fortfar ända till dess att i en punkt på andra sidan om kurvans högsta punkt eller topp (och ej långt derifrån) vinkeln Θ antager värdet noll. I sistnämnda punkt sammanfaller tangenten med skrifarmen, så att

$$\vartheta = \pi - (\alpha + \psi) \text{ , eller: } \vartheta + \alpha + \psi = \pi \text{ ; och: } \operatorname{tg}(\vartheta + \alpha + \psi) = o = \operatorname{tg}\Theta .$$

C) Från denna punkt på kurvan mot nedstigande skenkelns ände förändras läget åter så att — såsom figur 7 *C* förtydligar — tangenten skär x-axeln närmare origo än skrifarmen gör det. I detta fall är

$$\Theta + \vartheta + \alpha + \psi = \pi \text{ ; eller: } \vartheta + \alpha + \psi = \pi - \Theta \text{ ; och således: } \operatorname{tg}(\vartheta + \alpha + \psi) = -\operatorname{tg}\Theta .$$

D) Ännu ett nytt läge kan tangenten intaga i förhållande till skrifarmen; dess skärningspunkt med x-axeln kan nemligen — efter att hafva närmat sig skrifarmens skärningspunkt — aflägsna sig från sistnämnda punkt åt andra sidan så att åter fallet *B)* i afseende på de tre liniernas läge till hvarandra inträder på samma sätt som i figur 7 *B*. [Här må anmärkas att detta fall *D)* hittills icke framträdt i de kurvor vi analyserat.]

I fallen *A)*, *B)* och *D)* är sålunda tillfölje af eqvationen 26 f:

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\varrho\,(o+\omega) - ok}{oh}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 27_{a.}$$

och i fallet *C)*

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{ok - \varrho\,(o+\omega)}{oh} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 27_{b.}$$

I hvardera fallet har qvadratroten ur summan af qvadraterna af täljarn och nämnarn i högra membrum värdet $\frac{d\sigma}{dt}$ i öfverensstämmelse med eqvationen 26 d; i de förra fallen *A)*, *B)* och *D)* fås derföre

$$\frac{d\sigma}{dt} \sin \Theta = \varrho\,(o+\omega) - ok$$

$$\frac{d\sigma}{dt} \cos \Theta = oh,$$

hvaraf

$$\left.\begin{aligned} o+\omega &= \frac{S_1\, o}{\varrho} \frac{\cos(\zeta+\psi-\Theta)}{\cos\Theta} \\ \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{oh}{\cos\Theta} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\ldots \ldots \ldots \quad 28_{a.} \\ &\ldots \ldots \ldots \quad 28_{b.} \end{aligned}$$

I fallet *C)* åter fås på samma sätt:

$$\left.\begin{aligned} o+\omega &= \frac{S_1\, o}{\varrho} \frac{\cos(\zeta+\psi+\Theta)}{\cos\Theta} \\ \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{oh}{\cos\Theta} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\ldots \ldots \ldots \quad 28_{c.} \\ &\ldots \ldots \ldots \quad 28_{d.} \end{aligned}$$

Båda fallen kunna sammanfattas i eqvationerna 28 a och 28 b om tecknet för vinkeln Θ afses.

Förmedelst dessa relationer kunna värdena för $o+\omega$ och $\frac{d\sigma}{dt}$ beräknas för hvarje punkt af kurvan för hvilken ψ och Θ blifvit uppmätta; öfriga häri ingående qvantiteter S_1, o, ϱ och ζ äro nemligen kända konstanter.

De funna värdena för $(\vartheta+\alpha+\psi)$ i de ofvan nämnda skilda fallen låta vidare bestämma den vinkel kurvpunktens normal f gör med x-axeln i α, ψ och Θ; denna vinkel, som vi beteckna med $\angle\,(fx)$, har i fallet *A)* värdet $\frac{\pi}{2}+\vartheta$ och i fallet *B)* värdet $\vartheta-\frac{\pi}{2}$, och är derföre, då ϑ elimeneras förmedelst de ofvan funna relationerna, i hvardera fallet bestämd af eqvationen

$$\angle(fx) = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \psi - \Theta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 28_e.$$

Slutligen är i afseende på vinkeln Θ att tilläggas att den kan anses vara sammansatt af tvenne delar, den ena Θ_1 mellan kurvans tangent och tangenten till cirkeln (S), samt den andra Θ_2 mellan sistnämnda tangent och skrifarmen i det sekundära läget ϱ', så att för hvarje punkt xy af muskelkurvan

$$\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 29_a.$$

För bestämmande af värdet för den senare af dessa vinklar Θ_2 fås af eqvationen för cirkeln (S)

$$x^2 + y^2 = S^2,$$

om w betecknar tangentens vinkel med x-axeln, och då tillika x och y äro bestämda af eqvationerna 23 a jemte 21,

$$\operatorname{tg} w = -\frac{x}{y} = \frac{\varrho \cos(\alpha + \psi) - S_1 \cos(\zeta - \alpha)}{\varrho \sin(\alpha + \psi) + S_1 \sin(\zeta - \alpha)} \quad \ldots\ldots 29_b.$$

Vidare är här, såsom man finner af figuren 6 på planchen I:

$$\Theta_2 = w - [\pi - (\alpha + \psi)] = w + \alpha + \psi - \pi$$

$$\operatorname{tg} \Theta_2 = \operatorname{tg}(w + \alpha + \psi) = \frac{\operatorname{tg} w + \operatorname{tg}(\alpha + \psi)}{1 - \operatorname{tg} w \operatorname{tg}(\alpha + \psi)},$$

eller då räkningen utföres

$$\operatorname{tg} \Theta_2 = \frac{\varrho - S_1 \cos(\zeta + \psi)}{S_1 \sin(\zeta + \psi)} = \frac{\varrho - k}{h} \quad \ldots\ldots\ldots 29_c.$$

Häraf och förmedelst värdet för S i eqvationen 23 b fås vidare

$$\left.\begin{aligned} S \sin \Theta_2 &= \varrho - k \\ S \cos \Theta_2 &= h \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 29_d.$$

$$S = \sqrt{h^2 + (\varrho - k)^2} = h\sqrt{1 + \left(\frac{\varrho - k}{h}\right)^2} = \frac{h}{\cos \Theta_2} \quad \ldots\ldots 29_e.$$

Sedan sålunda värdet för Θ_2 blifvit bestämdt af eqvationen 29 c, kan värdet för Θ_1 beräknas af eqvationen 29 a, som gifver

$$\Theta_1 = \Theta - \Theta_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 29_f.$$

5. *Vridningarnas sammansättning.* Då muskelkurvan — såsom ofvan i paragraf 2 framhölls — tänkes hafva uppkommit genom en dubbel vridning som skrifarmen utför, den ena, den verkliga med vinkelhastigheten ω kring skrifarmens vridningspunkt $x_c\, y_c$, den andra kring medelpunkten O med skrifytans vinkelhastighet o, men i motsatt riktning mot skrifytans rörelse, så kunna båda dessa vridningar kring parallela axlar sammansättas och ersättas af en enda vridning med vinkelhastigheten $o + \omega$ kring en axel, som är parallel med de båda ursprungliga vridningsaxlarna (genom punkterna $x_c\, y_c$ och O) och går genom en punkt af linien S_1 (resp. dess förlängning), dervid S_1 alltid sammanbinder de båda ursprungliga vridningspunkterna $x_c\, y_c$ och O. Denna resulterande vridning gestaltar sig vidare något olika allteftersom vinkelhastigheterna o och ω ske i samma eller motsatt riktning. I våra försök vrides skrifytan i motsatt riktning mot den som tillkommer visarene i ett vanligt ur; vinkelhastigheten o som är att tilläggas skrifarmen för att muskelkurvan skall uppstå genom dess dubbla rörelse, är således att anses ske i samma riktning som visarenes rörelse i ett ur. En sådan vridningsrörelse brukar man betrakta såsom positiv och har så i de föregående eqvationerna blifvit införd. Hvad deremot den andra vinkelhastigheten ω beträffar så vrider sig skrifarmen som visarn i ett ur endast sålänge vridningsvinkeln ψ tillväxer, d. v. s. under det muskelkurvans uppstigande skenkel uppritas; under detta förlopp har sålunda jemväl ω positivt värde, och deremot negativt tecken då den nedstigande skenkeln tecknas och ψ aftager. I förra fallet då ω är positiv ligger den sammansatta rörelsens vridningspunkt på linien S_1 mellan punkterna O och $x_c\, y_c$ samt närmare till den förra i samma mån o är större än ω; [här må anmärkas att vid våra försöksanordningar o är 3—4 gånger större än ω, tillochmed då ω har sitt maximala värde].

I förra fallet, då den sammansatta rörelsens vridningspunkt eller momentancentrum för systemets rörelse ligger mellan de ursprungliga vridningspunkterna, må d beteckna afståndet från denna punkt till O och δ till $x_c\, y_c$, så att

$$d + \delta = S_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 30_a.$$

då uppfylla vinkelhastigheterna o, ω och $o + \omega$ relationerna

$$\frac{o}{\delta} = \frac{\omega}{d} = \frac{o + \omega}{S_1},$$

hvaraf fås

$$\delta = \frac{S_1\, o}{o + \omega}\,;\; d = \frac{S_1\, \omega}{o + \omega}\,;\; \text{samt: } \frac{d}{\delta} = \frac{\omega}{o} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 30_b.$$

Dessa relationer kunna äfven anses omfatta det andra fallet då vridningarna ske i motsatta riktningar och momentancentrum ligger på förlängningen af S_1 från O.

Af de båda sammansatta vridningarna har egentligen blott den förra betydelse för de uppgifter här föreligga; detta fall egna vi derföre i det närmast följande större uppmärksamhet.

6. *Afstånden från momentancentrum till de ursprungliga vridningspunkterna och kurvpunkten;* de båda förra afstånden, δ till $x_c y_c$ och d till O, äro redan af eqvationerna 30 b bestämda i S_1, o och ω; för att likaså bestämma afståndet från momentancentrum till kurvpunkten xy må detta afstånd betecknas med f; af den triangel linierna f, ϱ och δ bilda, deri $\zeta + \psi$ är storleken för den vinkel som står mot sidan f, fås

$$f^2 = \varrho^2 + \delta^2 - 2\varrho\,\delta\cos(\zeta + \psi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 31\,\text{a}.$$

eller af eqvationen 30 b

$$f^2 = \varrho^2 + \frac{S_1^2\,o^2}{(o+\omega)^2} - \frac{2\varrho\,S_1\,o}{o+\omega}\cos(\zeta+\psi) = \varrho^2 + \frac{S_1^2\,o^2}{(o+\omega)^2} - \frac{2\varrho\,o}{(o+\omega)}k \quad . \quad . \quad 31\,\text{b}.$$

Af den sista relationen fås vidare då tillika värdet för $\frac{d\sigma}{dt}$ i eqvationen 26 d afses

$$f^2(o+\omega)^2 = \varrho^2(o+\omega)^2 + S_1^2\,o^2 - 2\varrho\,o\,(o+\omega)\,k = \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$$

d. v. s.: $f(o+\omega) = \frac{d\sigma}{dt}$; samt: $f(d\alpha + d\psi) = d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 31\,\text{c}.$

Kurvelementet $d\sigma$ i punkten xy kan således anses hafva uppkommit genom en vridning om vinkeln $d\alpha + d\psi$ kring den sammansatta rörelsens vridningspunkt eller momentancentrum.

Häraf framgår redan att linien f är normal till kurvan i punkten xy, och att således vinkeln mellan ϱ och f, som kortligen må betecknas med $\angle(\varrho f)$, har värdet

$$\angle(\varrho f) = \frac{\pi}{2} - \Theta,$$

emedan Θ är den vinkel skrifarmen i det i fråga varande sekundärläget gör med kurvelementet $d\sigma$. Detsamma kan härledas af triangeln som bildas af linierna f, ϱ och δ; häraf fås nemligen

$$\sin \angle(\varrho f) = \frac{\delta}{f} \sin(\zeta + \psi) = \frac{S_1 o}{f(o + \omega)} \sin(\zeta + \psi) = \frac{oh}{\frac{d\sigma}{dt}} = \cos \Theta,$$

der den sista likheten är vunnen af eqvationerna 28 b och 28 d; den närmast föregående likheten af värdet för $f(o + \omega)$ här ofvan i eqvationen 31 c samt af värdet för δ i eqvationen 30 b. Första och sista membrum i denna eqvation utsäger detsamma som den föregående. — För öfrigt står detta resultat i öfverensstämmelse med den allmänna regel för en rörelse af här i fråga varande beskaffenhet att momentancentrum är skärningspunkten mellan normalerna som i ändpunkterna af en linie ϱ dragas till de kurvor på hvilka dessa ändpunkter röra sig.

Sidorna i de tre trianglar som bildas af linierna ϱ, S_1 och S, af ϱ, δ och f samt af f, d och S kunna anses vara kända af de tidigare för S_1, S, d, δ och f funna uttrycken i ϱ, S_0, ψ samt o och ω. Vi föresätta oss att äfven bestämma alla vinklarna i de tre trianglarna; två af dem äro redan kända nemligen

$$\angle(\varrho S_1) = \zeta + \psi \text{ ; och } \angle(\varrho f) = \frac{\pi}{2} - \Theta \text{ ;}$$

dermed blifver

$$\angle(f\delta) = \pi - \left(\zeta + \psi + \frac{\pi}{2} \quad \Theta\right) = \frac{\pi}{2} - (\zeta + \psi - \Theta),$$

hvaraf åter fås

$$\angle(fd) = \pi - \left[\frac{\pi}{2} - (\zeta + \psi - \Theta)\right] = \frac{\pi}{2} + (\zeta + \psi \quad \Theta).$$

Då vidare f är normal till muskelkurvan i punkten xy och S normal till cirkeln (S) i samma punkt, samt Θ_1 vinkeln mellan tangenterna för dessa kurvor i den i fråga varande punkten, så är vinkeln mellan normalerna f och S bestämd af relationen

$$\angle(fS) = \Theta_1 \text{ ; således } \angle(\varrho S) = \angle(\varrho f) + \angle(fS) = \frac{\pi}{2} - \Theta + \Theta_1 = \frac{\pi}{2} - \Theta_2 \text{ ;}$$

der sista likheten fås förmedelst eqvationen 29 a. Härmed slutligen blifver

$$\angle(Sd) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \zeta + \psi - \Theta + \Theta_1\right) = \frac{\pi}{2} - (\zeta + \psi - \Theta_2).$$

Med de funna värdena för vinklarna fås:

$$f = \varrho \frac{\sin(\zeta+\psi)}{\sin \angle (fd)} = \varrho \frac{\sin(\zeta+\psi)}{\sin\left[\frac{\pi}{2} - (\zeta+\psi-\Theta)\right]} = \varrho \frac{\sin(\zeta+\psi)}{\cos(\zeta+\psi-\Theta)} \quad . \quad . \quad . \quad 32_a.$$

$$\delta = \varrho \frac{\sin \angle (\varrho f)}{\sin \angle (f\delta)} = \frac{\varrho \sin\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right)}{\sin\left[\frac{\pi}{2} - (\zeta+\psi-\Theta)\right]} = \varrho \frac{\cos\Theta}{\cos(\zeta+\psi-\Theta)} \quad . \quad . \quad . \quad 32_b.$$

$$d = S \frac{\sin \angle (fS)}{\sin \angle (fd)} = \frac{S \sin \Theta_1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \zeta + \psi - \Theta\right)} = S \frac{\sin\Theta_1}{\cos(\zeta+\psi-\Theta)} \quad . \quad . \quad . \quad 32_c.$$

De sålunda bestämda värdena för δ och d verifiera äfven eqvationen 30 a.

I samband med dessa relationer må här vidare värdet för uttrycket

$$\frac{\delta - \varrho\cos(\zeta+\psi)}{\varrho \sin(\zeta+\psi)} \text{ eller } \frac{\frac{S_1^2 o}{o+\omega} - \varrho k}{\varrho h},$$

hvilket på flera ställen längre fram förekommer, angifvas; dess betydelse framträder omedelbart om i figur 6 (Pl. I) en vinkelrät linie tänkes dragen från kurvpunkten xy mot radien S_1 (som från medelpunkten O går till vridningspunkten $x_c y_c$); då uppstår nemligen en rätvinklig triangel hvari linien f är hypotenusa och katetrarna hafva värdena

$$\delta - \varrho\cos(\zeta+\psi) \text{ samt } \varrho\sin(\zeta+\psi);$$

i denna triangel är vidare ena vinkeln invid hypotenusan

$$\angle (f\delta) = \frac{\pi}{2} - (\zeta+\psi-\Theta);$$

den andra vinkeln invid hypotenusan som ligger mellan den vinkelräta linien och f har sålunda värdet

$$\zeta + \psi - \Theta.$$

Häraf ses att

$$\frac{\frac{S_1^2 o}{o+\omega} - \varrho k}{\varrho h} = \frac{\delta - \varrho\cos(\zeta+\psi)}{\varrho\sin(\zeta+\psi)} = \operatorname{tg}(\zeta+\psi-\Theta); \quad \frac{\varrho\sin(\zeta+\psi)}{\delta - \varrho\cos(\zeta+\psi)} = \cot(\zeta+\psi-\Theta) \quad 32_d.$$

Slutligen må här en anmärkning göras i afseende på afstånden δ och d; af eqvationen 30 b ses att afståndet δ från momentancentrum till skrifarmens vridningspunkt $x_c y_c$ minskas, och således dess afstånd d från O ökas ju större värde tillkommer vinkelhastigheten ω. Under systemets rörelse, dervid radien S_1 vrides kring O och tillika momentancentrum förskjutes längs denna radie, antager sålunda afståndet d från detta centrum till O maximalt värde då ω uppnår sådant värde.

7. *Momentancentra vid de på hvarandra följande lägena för det rörliga systemet.* Vid den (sammansatta) rörelse, här är fråga om förblifver en linie i det rörliga systemet alltid med sina ändpunkter på två fixa kurvor som ligga i skrifytans plan; det är — såsom i föregående paragraf redan påpekades — skrifarmen, hvars ena ändpunkt $(x_c y_c)$ i hvarje läge ligger på cirkeln (S_1) och andra ändpunkt (xy) på muskelkurvan. Teorin för sådana rörelser i ett plan grundlades redan af Descartes och har på senare tid blifvit noggrannt genomförd (genom undersökningar af Transon år 1844, af Chasles och andra; i vissa väsendtliga delar förfullständigades denna teori år 1853 af Bresse). Från denna teori låna vi här några resultat som för de närmast föreliggande uppgifterna synas kunna finna användning, till en början följande: den i fråga varande rörelsen kan anses hafva uppkommit derigenom att en viss kurva som deltager i systemets rörelse och som man brukar benämna kurvan (Γ), rullar utan att glida på en i planet fix kurva, „kurvan (C)“; den senare kurvan är orten för de på hvarandra följande momentancentra; vidare hafva kurvorna (C) och (Γ) i den punkt der de beröra hvarandra gemensam tangent och normal; och slutligen äro kurvelementen ds_0 och ds'_0 hvarmed båda kurvorna under närmast följande tidselement dt beröra hvarandra, likastora. Vi gå att bestämma läget för dessa kurvor eller de punkter på desamma som motsvara eller tillhöra punkten xy på muskelkurvan.

Koordinaterna i det ofvan definierade axelsystemet för det momentancentrum på kurvan (C) som tillhör punkten xy på muskelkurvan, må betecknas med $x_0 y_0$; värdena för $x_0 y_0$ kunna omedelbart bestämmas; de äro nemligen projektionerna på axlarna af den i eqvationerna 30 a och 30 b definierade linien d som med x-axeln gör vinkeln $(\zeta - \alpha)$; sålunda fås

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= d \sin(\zeta - \alpha) = \frac{S_1 \omega}{o + \omega} \sin(\zeta - \alpha) = \frac{\omega}{o + \omega} y_c \\ x_0 &= d \cos(\zeta - \alpha) = \frac{S_1 \omega}{o + \omega} \cos(\zeta - \alpha) = \frac{\omega}{o + \omega} x_c \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 33_a.$$

För bestämning af tangenten i den sålunda definierade punkten $x_0 y_0$ på kurvan (C) fås, då här

$$\frac{d\left(\frac{\omega}{o+\omega}\right)}{dt} = \frac{\omega' o}{(o+\omega)^2}$$

och då tillika eqvationerna 24 b afses

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_0}{dt} &= -\frac{\omega o}{o+\omega} x_c + \frac{\omega' o}{(o+\omega)^2} y_c = \frac{o}{(o+\omega)^2}\left[-\omega(o+\omega) x_c + \omega' y_c\right] \\ \frac{dx_0}{dt} &= \frac{\omega o}{o+\omega} y_c + \frac{\omega' o}{(o+\omega)^2} x_c = \frac{o}{(o+\omega)^2}\left[\omega(o+\omega) y_c + \omega' x_c\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 33_b.$$

Häraf åter fås, om den vinkel tangenten till kurvan (C) i punkten $x_0 y_0$ gör med x-axeln betecknas med ε_0, och tillika $x_c y_c$ elimineras förmedelst eqvationerna 21:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_0 = \frac{-\omega(o+\omega)\cos(\zeta-\alpha) + \omega' \sin(\zeta-\alpha)}{\omega(o+\omega)\sin(\zeta-\alpha) + \omega' \cos(\zeta-\alpha)} \quad \ldots \ldots \quad 33_c.$$

Betecknar vidare s_0 bågen i kurvan (C) så är

$$\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dy_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2 = \frac{S_1^2 o^2}{(o+\omega)^4}\left[\omega^2 (o+\omega)^2 + \omega'^2\right]$$

Här bestämmer $\frac{ds_0}{dt}$ den hastighet hvarmed momentancentrum vexlar; man brukar beteckna denna hastighet med u; således

$$\frac{ds_0}{dt} = u = \frac{S_1 o}{(o+\omega)^2}\sqrt{\omega^2 (o+\omega)^2 + \omega'^2} \quad \ldots \ldots \quad 33_d.$$

Dessa relationer karakterisera — för de ändamål här afses — den fixa kurvan (C); för att likaså definiera den rörliga kurvan (I') som i det i fråga varande ögonblicket eller läget xy (för skrifstiftets spets) berör kurvan (C) i punkten $x_0 y_0$ tänkes ett rätvinkligt axelsystem $x' y'$ vara uppdraget med origo i midtpunkten m af skrifarmen; denna midtpunkt har koordinaterna

$$\frac{y_c + y}{2} \text{ och } \frac{x_c + x}{2}.$$

Detta axelsystem tänkes vidare vara fixt förenadt med det rörliga systemet (skrifarmen och dervid fixerade delar) och således deltaga i skrifarmens rörelser; dess abskissaxel x' får sammanfalla med skrifarmens riktning, och dess

positiva axlar äro vid primärläget t_1 (då ryckningen begynner) riktade åt samma håll som de positiva axlarna i det allmänna eller xy-systemet. Koordinaterna för den punkt i detta rörliga system som vid det i fråga varande sekundärläget sammanfaller med momentancentrum $x_0 y_0$ beteckna vi med $x'_0 y'_0$; värdena för dessa koordinater kunna bestämmas förmedelst projektionerna på y'- och x'-axlarna af den ofvan, i eqvationerna 30 a och 30 b definierade linien δ; denna linie δ gör med skrifarmen i sekundärläget ϱ', och således med x'-axeln, vinkeln $(\zeta + \psi)$, såsom figuren 6, planschen I, förtydligar; de i fråga varande projektionerna hafva derföre värdena

$$\delta \sin(\zeta + \psi) \text{ och } \delta \cos(\zeta + \psi);$$

härmed antaga koordinaterna y'_0 och x'_0 värdena

$$\left.\begin{aligned} y'_0 &= -\delta \sin(\zeta + \psi) = -\frac{S_1 o}{o + \omega} \sin(\zeta + \psi) = -\frac{o}{o + \omega} h \\ x'_0 &= -\delta \cos(\zeta + \psi) + \frac{\varrho}{2} = -\frac{S_1 o}{o + \omega} \cos(\zeta + \psi) + \frac{\varrho}{2} = -\frac{o}{o + \omega} k + \frac{\varrho}{2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad 34_a.$$

[Här må anmärkas att dessa värden äro oberoende af vinkeln α eller läget t_1 för muskelryckningens begynnelse, hvilket läge förmedelst den metod vi i det följande använda måhända ej alldeles säkert kan bestämmas.] Dessa uttryck bestämma således koordinaterna $x'_0 y'_0$ för den punkt (i det rörliga systemet) som i det i fråga varande ögonblicket eller sekundärläget ϱ' för skrifarmen sammanfaller med momentancentrum $x_0 y_0$ (i det fixa koordinatsystemet).

Af värdena för $y'_0 x'_0$ härledas vidare, emedan

$$\frac{d\left(\frac{o}{o + \omega}\right)}{dt} = -\frac{\omega' o}{(o + \omega)^2},$$

och med tillhjelp af eqvationerna 24 a:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy'}{dt} &= -\frac{\omega o}{o + \omega} k + \frac{\omega' o}{(o + \omega)^2} h \\ \frac{dx'}{dt} &= \frac{\omega o}{o + \omega} h + \frac{\omega' o}{(o + \omega)^2} k \end{aligned}\right\}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 34_b.$$

hvaraf om ε'_0 betecknar vinkeln som tangenten till kurvan (I') i punkten $x'_0 y'_0$ gör med x'-axeln (eller med skrifarmen ϱ'), fås

$$\operatorname{tg} \varepsilon'_0 = \frac{\omega\,(o+\omega)\,k + \omega' h}{\omega\,(o+\omega)\,h + \omega' k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 34\text{c.}$$

Denna tangent sammanfaller med den ofvan, eqvationen 33 c, bestämda tangenten till kurvan (C); vilkoret härför är nemligen:

$$\varepsilon'_0 = \varepsilon_0 + \alpha + \psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 34\text{d.}$$

(såsom figuren 8, planschen I, der (x) och (y) äro parallela med x- och y-axlarna och den prickade linien är tangenten, förtydligar); detta vilkor är verifieradt af de för $\operatorname{tg} \varepsilon_0$ och $\operatorname{tg} \varepsilon'_0$ funna värdena.

Betecknar slutligen s'_0 bågen för kurvan (I') så fås med afseende på eqvationen 20 b:

$$\left(\frac{ds'_0}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dy'_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx'_0}{dt}\right)^2 = S_1^{\,2}\, o^2 \left[\frac{\omega^2}{(o+\omega)^2} + \frac{\omega'^{\,2}}{(o+\omega)^4}\right]$$

d. v. s. vid jemförelse med eqvationen 33 d:

$$\frac{ds_0}{dt} = \frac{ds'_0}{dt} = u \;;\; \text{eller: } ds_0 = ds'_0 = u dt \quad \ldots\ldots\ldots 34\text{e.}$$

De funna uttrycken för $x_0 y_0$ och $x'_0 y'_0$ tillkomma sålunda de båda ofvan papekade egenskaperna i afseende på deras tangenter och i afseende på kurvelementen ds och ds'_0.

8. *Vinkelaccelerationen* ω'. Af värdet för $\operatorname{tg} \varepsilon_0$ i eqvationen 33 c kan värdet för ω' härledas; för detta ändamål införa vi till en början beteckningen

$$\frac{\omega'}{\omega\,(o+\omega)} = \operatorname{tg} \beta$$

hvarigenom den i fråga varande eqvationen kan skrifvas:

$$\frac{\sin \varepsilon_0}{\cos \varepsilon_0} = \frac{-\cos(\zeta-\alpha)\cos\beta + \sin(\zeta-\alpha)\sin\beta}{\sin(\zeta-\alpha)\cos\beta + \cos(\zeta-\alpha)\sin\beta} = -\frac{\cos(\zeta-\alpha+\beta)}{\sin(\zeta-\alpha+\beta)},$$

således:

$$\cos(\zeta-\alpha+\beta)\cos\varepsilon_0 + \sin(\zeta-\alpha+\beta)\sin\varepsilon_0 = \cos(\zeta-\alpha+\beta-\varepsilon_0) = 0$$

d. v. s.:

$$\zeta - \alpha + \beta - \varepsilon_0 = \frac{\pi}{2} \;;\; \text{eller: } \zeta - \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon_0 \,.$$

Då här ε_0 är tangentens vinkel med x-axeln, så bestämmer högra membrum i sista relationen, $\frac{\pi}{2}+\varepsilon_0$, den vinkel normalen till kurvan (C) i punkten $x_0 y_0$ gör med x-axeln; denna vinkel har sålunda äfven värdet $(\zeta-\alpha+\beta)$. Skrifves vidare den sista relationen under formen

$$\beta=\frac{\pi}{2}+\varepsilon_0-(\zeta-\alpha), \quad \ldots \quad 35_a.$$

så framträder den geometriska betydelse vinkeln β har; eqvationen visar nemligen att β är den vinkel normalen till kurvan (C) i punkten $x_0 y_0$ gör med radien S_1 som från medelpunkten O drages till vridningspunkten $x_c y_c$, emedan $\zeta-\alpha$ är vinkeln mellan S_1 och x-axeln.

Af den sista relationen och af värdet för $\operatorname{tg}\beta$ fås vidare:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\omega'}{\omega\,(o+\omega)}=\cot(\zeta-\alpha-\varepsilon_0)=\frac{1}{\operatorname{tg}(\zeta-\alpha-\varepsilon_0)} \quad \ldots \quad 35_b.$$

Alldeles på samma sätt som denna eqvation blifvit härledd af eqvationen 33 c fås af eqvationen 34 c:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\omega'}{\omega\,(o+\omega)}=\cot(\zeta+\psi-\varepsilon'_0)=\frac{1}{\operatorname{tg}(\zeta+\psi-\varepsilon'_0)} \quad \ldots \quad 35_c.$$

Jemförelse af dessa relationer gifver:

$$\zeta-\alpha-\varepsilon_0=\zeta+\psi-\varepsilon'_0$$

d. v. s. den ofvan i paragraf 7 funna eqvationen 34 d.

Hvardera af dessa eqvationer 35 b och 35 c kunde tjena för beräkning af värdet för ω', sedan värdet för ε_0 resp. ε'_0 blifvit bestämdt.

9. *Anmärkningsvärda punkter på muskelkurvan.* Till punkter som vid betraktande af kurvan i någon mån kunna till läget bestämmas höra: en inflexionspunkt i början af kurvans uppstigande skenkel; i denna punkt antager tangentens vinkel ϑ med x-axeln maximalt värde; vi beteckna derföre denna punkt med ϑ_{max} eller kortligen ϑ_m; hit hör vidare den punkt — hvarom ofvan redan var fråga — der kurvans tangent är parallel med x-axeln och således vinkeln ϑ har värdet noll; denna punkt beteckna vi med ϑ_0; hit hör slutligen den punkt der vridningsvinkeln ψ antager maximalt värde ψ_m; denna punkt, kurvans topp, ligger på längsta afstånd från initialcirkeln S_0. Dessutom finnas ett par punkter som vid utförandet af mätningarna omedelbart komma i dagen

och karaktäriseras af vissa värden för den förmedelst hårkorset uppmätta vinkeln Θ; denna spetsiga vinkel antager nemligen i en punkt på kurvans uppstigande skenkel maximalt värde Θ_m, och aftager sedan mer och mer tills den — såsom ofvan redan nämndes — i en punkt på nedstigande skenkeln (och ej långt från kurvans topp) antager värdet noll; denna punkt beteckna vi med Θ_0. Vid utförandet af beräkningarna visar sig vidare att vinkeln $(\zeta + \psi - \Theta)$ i en punkt på uppstigande skenkeln antager minimalt värde $(\zeta + \psi - \Theta)_m$; denna punkt ligger något närmare kurvans begynnelse än punkten Θ_m; likaså visar sig att mellan de båda sistnämnda punkterna $(\zeta + \psi - \Theta)_m$ och Θ_m vinkelhastigheten ω antager maximalt värde och vinkelaccelerationen ω' värdet noll; på samma sätt framgår att i en punkt på uppstigande skenkeln hastigheten $\frac{d\sigma}{dt}$ längs kurvan antager maximalt värde $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_m$, och i en annan punkt afståndet f från kurvpunkten xy till momentancentrum $x_0 y_0$ minimalt värde f_m.

De egenskaper som tillkomma dessa punkter äro att närmare utredas; vi gå härvid någorlunda i den ordning vi funnit dessa punkter följa efter hvarandra från kurvans början mot dess slut.

Punkten f_m. Vilkoret för att normalen f från kurvpunkten xy till momentancentrum $x_0 y_0$ skall antaga maximalt eller minimalt värde fås af eqvationen 31 b och blifver uträknadt

$$-\omega' [S_1^2 o - \varrho (o + \omega) k] + \varrho\omega (o + \omega)^2 h = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 36_a.$$

eller förmedelst eqvationerna 32 d och 35 b eller 35 c

$$\frac{\omega'}{\omega (o + \omega)} = \cot (\zeta + \psi - \Theta) = \operatorname{tg} \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 36_b.$$

Läget för denna punkt f_m på uppstigande skenkeln synes något variera under olika förhållanden men inträder alltid i kurvans begynnelse förrän vinkelhastigheten ω antagit maximalt värde. Den funna vilkorseqvationen 36 b tillåter beräkna vinkelaccelerationen ω' i denna punkt.

Sistnämnda eqvation gifver vidare

$$\beta = \frac{\pi}{2} - (\zeta + \psi - \Theta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 36_c.$$

som utsäger att i punkten f_m muskelkurvans normal f sammanfaller med (C)-kurvans normal; högra membrum bestämmer nemligen vinkeln $\angle (f\delta)$, som f

gör med δ eller S_1 såsom framhölls ofvan i paragraf 6; β åter betecknar vinkeln mellan (C)-kurvans normal och S_1.

Kurvans inflexion bestämmes af vilkoret

$$f''(x) = \frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = 0\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad 37\text{a.}$$

i öfverensstämmelse med det allmänna värdet i eqvationen 26 g för Φ_n utsäger denna eqvation att i denna punkt accelerationens komponent Φ_n längs normalen har värdet noll. Samma vilkor måste uppfyllas för att vinkeln ϑ skall antaga maximalt eller minimalt värde, emedan enligt eqvationen 26 a

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}.$$

Här må anmärkas att tillsvidare är osäkert om det finnes mer än en inflexionspunkt på kurvans uppstigande skenkel; i denna punkt, ej alldeles långt från kurvans begynnelse, har vinkeln ϑ maximalt värde ϑ_m.

Uträknadt blifver det ofvan stående vilkoret

$$\varrho^2(o+\omega)^3 - S_1^2 o^3 + \varrho o^2(o+\omega)k + \varrho o(o+\omega)^2 k + \varrho\omega' oh = 0\,, \quad \ldots \quad 37\text{b.}$$

hvaraf fås

$$\frac{\omega'}{(o+\omega)^2} = \frac{\varrho(o+\omega) - ok}{oh} + \frac{o}{o+\omega}\,\frac{\left(\frac{S_1^2 o}{o+\omega} - \varrho k\right)}{\varrho h} \quad \ldots\ldots \quad 37\text{c.}$$

eller tillfölje af eqvationerna 27 a och 32 d

$$\frac{\omega'}{(o+\omega)^2} = \operatorname{tg}\Theta + \frac{o}{o+\omega}\operatorname{tg}(\zeta + \psi - \Theta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 37\text{d.}$$

Denna eqvation kan äfven skrifvas

$$\frac{\omega'}{\omega(o+\omega)} = \frac{o+\omega}{\omega}\operatorname{tg}\Theta + \frac{o}{\omega}\operatorname{tg}(\zeta + \psi - \Theta) = \operatorname{tg}\beta \quad \ldots\ldots \quad 37\text{e.}$$

I det gebit af muskelkurvan der denna punkt ϑ_m är belägen är

$$\Theta = \vartheta + \alpha + \psi\,; \text{ hvaraf: } \vartheta = \Theta - (\alpha + \psi)\,; \quad \ldots\ldots \quad 37\text{f.}$$

med tillhjelp af den sista relationen kan läget för den i fråga varande punkten ϑ_m, resp. närliggande gränser mellan hvilka denna punkt ligger, närmare utredas. Är sålunda läget för denna punkt fastställdt, så kan värdet för vinkelaccelerationen ω' i denna punkt beräknas förmedelst eqvationen 37 d.

Minimalt värde $(\zeta+\psi-\Theta)_m$ *för vinkeln* $(\zeta+\psi-\Theta)$. För att finna vilkoret härför är främst värdet för $\operatorname{tg}(\zeta+\psi-\Theta)$ att beräknas af värdet för $\operatorname{tg}\Theta$ i eqvationen 37 a; detta värde, angifvet i eqvationen 32 d, kan skrifvas

$$\operatorname{tg}(\zeta+\psi-\Theta)=\frac{S_1\,o-\varrho\,(o+\omega)\cos(\zeta+\psi)}{\varrho\,(o+\omega)\sin(\zeta+\psi)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 38_a.$$

Häraf blifver det i fråga varande vilkoret

$$S_1\,\omega' o\sin(\zeta+\psi)-\omega\,(o+\omega)[\varrho\,(o+\omega)-S_1\,o\cos(\zeta+\psi)]=0 \quad . \quad . \quad . \quad 38_b.$$

hvaraf fås förmedelst eqvationen 27 a

$$\frac{\omega'}{\omega\,(o+\omega)}=\frac{\varrho\,(o+\omega)-ok}{oh}=\operatorname{tg}\Theta=\operatorname{tg}\beta\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 38_c.$$

eqvationen visar att i denna punkt ω' har positivt värde, emedan ω här är positiv och Θ är spetsig.

Maximalt värde Θ_m *för den med hårkorset uppmätta vinkeln* Θ. Vilkoret härför fås af eqvationen 27 a och blifver

$$\varrho\,\omega' h+\omega\,[S_1^{\,2}\,o-\varrho\,(o+\omega)\,k]=0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 39_a.$$

hvaraf förmedelst eqvationen 32 d fås

$$\frac{\omega'}{\omega\,(o+\omega)}=-\operatorname{tg}(\zeta+\psi-\Theta)=\operatorname{tg}\beta\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 39_b.$$

af denna eqvation får ω' negativt värde.

Mellan punkterna $(\zeta+\psi-\Theta)_m$ och Θ_m (hvilka i alla hittills analyserade fall visat sig ligga helt nära hvarandra) vexlar således ω' tecken; dermed antydes den kurvpunkt der vinkelaccelerationen ω' har värdet noll och vinkelhastigheten ω antager maximalt värde.

Eqvationen 39 b utsäger vidare att i denna punkt Θ_m muskelkurvans normal är tangent till (C)-kurvan; af eqvationen fås nemligen

$$\beta=\pi-(\zeta+\psi-\Theta)\,;$$

det allmänna värdet för β åter är enligt eqvationen 35 a (i paragraf 7, denna afdelning)

$$\beta=\frac{\pi}{2}+\varepsilon_0-(\zeta \quad \iota)\,;$$

i punkten Θ_m är således

$$\varepsilon_0 = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \psi - \Theta);$$

högra membrum i denna eqvation bestämmer enligt eqvationen 28 e (i paragraf 4, denna afdelning) den vinkel $\angle(fx)$ som muskelkurvans normal gör med x-axeln; i punkten Θ_m har sålunda ε_0 på (C)-kurvan samma värde som sistnämnda vinkel.

Tangentens parallela läge med x-axeln ϑ_0 karakteriseras såsom i paragraf 4 redan nämndes deraf att i denna punkt

$$\vartheta = \vartheta_0 = 0; \text{ samt: } \Theta = \alpha + \psi; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 40.$$

förmedelst detta värde för Θ är det i fråga varande läget ϑ_0, resp. ett par närliggande gränser för detsamma att uppsökas. Förmedelst eqvationerna 40 verifieras eqvationerna 26 b, då de allmänna värdena för $(o + \omega)$ och $\frac{d\sigma}{dt}$ i eqvationerna 28 deri införas.

Maximalt värde $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_m$ *för hastigheten* $\frac{d\sigma}{dt}$ *längs kurvan;* vilkoret härför fås till en början af eqvationen 26 a under formen

$$\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 41_a.$$

jemförelse med eqvationen 26 h visar härmed att i denna punkt accelerationens tangentiella komponent har värdet noll. Uträknadt förmedelst eqvationerna 24 d och 24 e blifver detta vilkor:

$$\omega' [\varrho (o + \omega) - ok] + \omega o (o + \omega) h = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 41_b.$$

hvaraf fås

$$\frac{\omega'}{\omega (o + \omega)} = -\frac{oh}{\varrho (o + \omega) - ok} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \Theta} = -\cot \Theta = \operatorname{tg} \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 41_c.$$

Af denna eqvation får ω' negativt värde.

Kurvans topp ψ_m der vridningsvinkeln ψ uppnår sitt största värde och dermed äfven radius vector S från medelpunkten O till kurvpunkten xy maximalt värde; sistnämnda omständighet gifver förmedelst värdet för S i eqvationen 23 b vilkoret

$$\frac{dS}{dt} = 0; \; 2\varrho S_1 \dot{\omega} \sin(\zeta + \psi) = 0; \text{ d. v. s. } \omega = 0 \; . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 42_a.$$

I denna punkt börjar skrifarmen falla och vinkelhastigheten ω förändrar tecken. Förmedelst eqvationen 42 a fås vidare af eqvationerna 27 a och 29 c

$$\text{tg}\,\Theta_2 = \frac{\varrho - k}{h} = \text{tg}\,\Theta\,;\ \text{d. v. s.}\ \Theta_2 = \Theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 42\text{b.}$$

och således af eqvationen 29 a

$$\Theta_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 42\text{c.}$$

Relationen 42 b skola vinklarna Θ och ψ verifiera; relationen 42 c åter visar att i denna punkt ψ_m muskelkurvan och cirkeln (S) hafva gemensam tangent; sistnämnda förhållande framträder äfven om värdena för tg ϑ i eqvationen 26 c och för tg w i eqvationen 29 b jemföras med hvarandra; båda antaga nemligen samma värde då ω har värdet noll. Härmed fås i denna punkt ψ_m tvenne uttryck för hastigheten längs kurvan, nemligen

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{oh}{\cos\Theta} = So\,; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 42\text{a.}$$

af eqvationen 31 c åter fås, då här ω har värdet noll, $fo = \frac{d\sigma}{dt}$, således af föregående eqvation:

$$f = S \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 42\text{e.}$$

Då vidare normalen i en punkt på en cirkelperiferi alltid går genom medelpunkten, kan härmed undersökas om ett förmodadt eller funnet värde för ψ_m är riktigt; för detta ändamål är vid detta läge ψ_m för skrif- (resp. mikroskop-)armen hårkorset att vridas så att dess ena skenkel är tangent till muskelkurvan, och således den andra skenkeln normal; sedan vrides skrifytan tills den uppdragna diametern för de koncentriska cirklarna ligger i hårkorset. Är det funna värdet för ψ_m riktigt, så sammanfaller den nyssnämnda normalen med denna diameters riktning; gör den det icke så är det funna läget och värdet för ψ_m att korrigeras. Tilläggas må att då värdet för ψ_m på enkelt sätt låter bedöma den mekaniska energi muskeln meddelar systemet — såsom eqvationen 13 b i afdelning II utvisar —, och dertill kan lemna upplysning om det värde som tillkommer konstanten $\frac{T}{Mga}$ — såsom i afdelning IV, paragraf 5 framhölls — är det af nytta för analysens utförande att noggrannt bestämma värdet för ψ_m.

Platå-bildning på muskelkurvan. I det föregående har den förutsättning blifvit gjord att vinkeln ψ i en enda punkt af muskelkurvan antager maximalt värde; undersökningar från senare tid hafva lärt känna att detta under vissa

förhållanden äfven kan inträffa i en följd af punkter; detta förhållande har man benämnt platå-bildning. Den närmast föregående undersökningen visar att i en sådan platå måste jemte ψ äfven Θ för hvarje punkt af platån antaga samma konstanta värde; tillika måste i hvarje punkt af platån normalen till muskelkurvan gå genom medelpunkten O för de koncentriska cirklarna (S_0), (S) och (S_1). Dessa förhållanden kunna måhända lemna någon ledning vid empirisk undersökning om tillvaron och utsträckningen af en platå på muskelkurvan.

Den punkt Θ_0 der vinkeln Θ har värdet noll och således — såsom redan ofvan nämndes — skrifarmen är tangent till kurvan, ligger på nedstigande skenkeln, ej långt från kurvans topp. Detta läge kommer omedelbart i dagen (någorlunda säkert) vid utförandet af mätningarna, och karakteriseras deraf att i detta läge

$$\Theta = \Theta_0 = 0\,;\ \text{och således: } \Theta_1 = -\Theta_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 43\text{a}.$$

tillfölje af eqvationen 29 a. Tillika fås af eqvationerna 27 a eller 27 b

$$o + \omega = \frac{ok}{\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 43\text{b}.$$

(deraf ω antager negativt tecken); samt af eqvationerna 28 b och 28 d

$$\frac{d\sigma}{dt} = oh \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 43\text{c}.$$

Af eqvationen 31 c fås härmed

$$f = \frac{\frac{d\sigma}{dt}}{o + \omega} = \varrho\,\frac{h}{k} = \varrho\,\mathrm{tg}\,(\zeta + \psi)\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 43\text{d}.$$

som visar att i denna punkt normalen f är vinkelrät mot ϱ, och således skrifarmen ϱ tangent till kurvan.

Hvarochen af dessa punkter på muskelkurvan har således någon karakteristisk egenskap som innefattas i relationerna 36—43; af särskild betydelse för här föreliggande uppgifter synas de punkter vara hvilkas egenskaper bestämma värdet för vinkelaccelerationen ω' i de funna värdena för ψ och Θ. Till punkter af sistnämnda beskaffenhet må derföre här några tilläggas för hvilka läget på muskelkurvan och värdet för ω' kan härledas af (C)-kurvan.

Den punkt der vinkelhastigheten ω uppnår maximalt värde och således vinkelaccelerationen ω' har värdet noll; tillfölje af sistnämnda omständighet fås af eqvationerna 35 b och 33 c

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\omega'}{\omega(o+\omega)} = 0\,;\ \operatorname{tg}\varepsilon_0 = -\cot(\zeta-\alpha)\,; \quad \ldots\ldots \quad 44\text{a.}$$

och deraf:

$$\beta = 0 \text{ samt: } \varepsilon_0 = \frac{\pi}{2} + (\zeta-\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 44\text{b.}$$

i ifrågavarande punkt är således linien S_1 som med x-axeln gör vinkeln $\zeta-\alpha$, normal till (C)-kurvan. Det framhölls redan ofvan att denna punkt ligger mellan $(\zeta+\psi+\Theta)_{min}$ och Θ_{max} på muskelkurvan; dess läge framträder omedelbart då värdet för $(o+\omega)$ beräknas förmedelst eqvationen 28 a.

Den punkt der ordinatan y_0 för (C)-kurvan uppnår maximalt värde $y_{0\,max}$; af den förra af eqvationerna 33 b och af 33 c fås i detta fall

$$\frac{dy_0}{dt} = 0\,;\ \varepsilon_0 = 0\,;\ \text{samt } \operatorname{tg}\beta = \frac{\omega'}{\omega(o+\omega)} = \cot(\zeta-\alpha)\,; \quad \ldots\ldots \quad 45.$$

läget är att bestämmas förmedelst de successiva värdena för y_0.

Den punkt der abskissan x_0 för (C)-kurvan antager maximalt värde $x_{0\,max}$ bestämmes på samma sätt som den föregående af eqvationerna 33 b och 33 c; häraf fås i detta fall

$$\frac{dx_0}{dt} = 0\,;\ \varepsilon_0 = \frac{\pi}{2}\,;\ \operatorname{tg}\beta = \frac{\omega'}{\omega(o+\omega)} = -\operatorname{tg}(\zeta-\alpha) \quad \ldots\ldots \quad 46.$$

Äfven andra relationer som kunde tjena till bestämning af ω' för bestämda punkter på muskelkurvan kunde härledas såsom speciella fall af de allmänna relationer (C)- och (Γ)-kurvorna måste uppfylla (och likaså af den relation krökningsradierna för kurvor af här i fråga varande beskaffenhet enligt Transon's observation uppfylla). Men en af de i fysiologiskt hänseende vigtigaste punkterna på muskelkurvan, den der muskelkraften uppnår maximalt värde, kan tillsvidare åtminstone ej på denna väg närmare karakteriseras.

10. *Accelerationen i punkten xy af muskelkurvan* bestämmes af eqvationerna 24 e; $\frac{d^2y}{dt^2}$ och $\frac{d^2x}{dt^2}$ äro nemligen dess komponenter längs de resp. koordinataxlarna. Betecknar derföre Φ accelerationen i den i fråga varande punkten samt μ den vinkel dess riktning gör med x-axeln, så äro

$$\left.\begin{aligned}\Phi\sin\mu &= \frac{d^2y}{dt^2}\\ \Phi\cos\mu &= \frac{d^2x}{dt^2}\end{aligned}\right\}\,;\ \text{samt } \operatorname{tg}\mu = \frac{d^2y}{dt^2}:\frac{d^2x}{dt^2}\,;\ \Phi^2 = \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 \quad \ldots\ldots \quad 47\text{a.}$$

Deraf fås förmedelst eqvationerna 24 e:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{-S_1 o^2 \sin(\zeta-\alpha) - \varrho(o+\omega)^2 \sin(\alpha+\psi) + \varrho\omega' \cos(\alpha+\psi)}{-S_1 o^2 \cos(\zeta-\alpha) + \varrho(o+\omega)^2 \cos(\alpha+\psi) + \varrho\omega' \sin(\alpha+\psi)} \quad . \quad . \quad 47_b.$$

$$\Phi^2 = S^2 o^4 + \varrho^2 (o+\omega)^4 + \varrho^2 \omega'^2 - 2\varrho S_1 o^2 (o+\omega)^2 \cos(\zeta+\psi) - 2\varrho S_1 o^2 \omega' \sin(\zeta+\psi) \quad 47_c.$$

den senare eqvationen kan förmedelst eqvationerna 20 a skrifvas

$$\Phi^2 = S^2 o^4 + \varrho^2 (o+\omega)^4 + \varrho^2 \omega'^2 - 2\varrho o^2 (o+\omega)^2 k - 2\varrho o^2 \omega' h \quad . \quad . \quad . \quad 47_d.$$

Här må anmärkas att samma värde för Φ framträder äfven om man utgår från det af Bresse upptäckta accelerationscentrum — en punkt i det rörliga systemet som under en elementär vridning kring momentancentrum $x_0 y_0$ bibehåller samma hastighet (till storlek och riktning) och således under i fråga varande tidselement dt icke har någon acceleration; tillika framträder den betydelse som tillkommer uttrycket $\frac{\omega'}{(o+\omega)^2}$, hvilket ingår i föregående eqvationer; detta uttryck bestämmer nemligen tangenten för den vinkel accelerationen Φ gör med den linie eller „stråle" som från accelerationscentrum drages till kurvpunkten xy. Härmed och då tillika strålens läge till x-axeln är kändt återfinnes det ofvan angifna värdet för $\operatorname{tg}\mu$.

Af värdena för $\Phi \sin\mu$ och $\Phi \cos\mu$ härledas vidare — genom samma förfarande som användes i paragraf 3:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\psi+\mu) = \frac{\varrho\omega' - S_1 o^2 \sin(\zeta+\psi)}{\varrho(o+\omega)^2 - S_1 o^2 \cos(\zeta+\psi)} = \frac{\varrho\omega' - o^2 h}{\varrho(o+\omega)^2 - o^2 k} \quad . \quad . \quad . \quad 47_e.$$

$$\Phi^2 = [\varrho\omega' - S_1 o^2 \sin(\zeta+\psi)]^2 + [\varrho(o+\omega)^2 - S_1 o^2 \cos(\zeta+\psi)]^2 =$$
$$= [\varrho\omega' - o^2 h]^2 + [\varrho(o+\omega)^2 - o^2 k]^2 ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 47_f.$$

den senare eqvationen kan förmedelst den förra skrifvas:

$$\Phi = [\varrho(o+\omega)^2 - o^2 k] \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha+\psi+\mu)} = \frac{[\varrho(o+\omega)^2 - o^2 h]}{\cos(\alpha+\psi+\mu)} \quad . \quad . \quad . \quad 47_g.$$

Dessa eqvationer äro beqvämare för beräkning af μ och Φ än de föregående; i dem betecknar $(\alpha+\psi+\mu)$ den vinkel accelerationen Φ gör med skrifarmen ϱ i det sekundära läget ϱ'.

Ännu må här egnas uppmärksamhet åt accelerationens tangentiella och normala komponenter Φ_t och Φ_n, hvilkas värden ofvan, i paragraf 3, angåfvos under allmänna former i eqvationerna 26 h och 26 g. För ändamålet kan man

utgå från den vinkel accelerationens riktning gör med tangenten; denna vinkel kan betecknas med $\mu - \vartheta$ (resp. med $\vartheta - \mu$); dermed fås:

$$\Phi_t = \Phi \cos(\mu - \vartheta) =$$
$$= -S_1 o^2 \cos[\zeta - (\alpha + \vartheta)] + \varrho (o + \omega)^2 \cos(\vartheta + \alpha + \psi) + \varrho\omega' \sin(\vartheta + \alpha + \psi) \quad 47_h.$$

$$\Phi_n = \Phi \sin(\mu - \vartheta) =$$
$$= -S_1 o^2 \sin[\zeta - (\alpha + \vartheta)] - \varrho (o + \omega)^2 \sin(\vartheta + \alpha + \psi) + \varrho\omega' \cos(\vartheta + \alpha + \psi) \quad 47_k.$$

Då Φ_n eller Φ_t i dessa eqvationer blifva lika med noll återfinnas förmedelst relationerna i paragraferna 4 och 6 de redan funna vilkoren för resp. ϑ_m och $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_m$.

VII.

Utförandet af beräkningarna. Tillämpning.

Metoder för bestämning af de konstanter som bero af apparaterna $\left(Ma, \frac{T}{2g}, \frac{Ma}{R}, \frac{T}{gR}\right)$ angåfvos ofvan i afdelning IV, paragraf 5. Likaså angåfvos i afdelning IV och VI eqvationer för beräkning af de konstanter som bero af försöket (o, ζ, S_1). Här egna vi uppmärksamhet endast åt metoderna för bestämning af vinkelhastigheten ω och accelerationen ω', samt de fysiologiska förhållanden som häraf bero nemligen muskelns mekaniska energi och muskelkraften.

1. *Vinkelhastigheten* ω *(och hastigheten* $\frac{d\sigma}{dt}$ *längs kurvan)* beräkna vi förmedelst eqvationerna 28 a och b resp. c och d i föregående afdelning.

2. *Vinkelaccelerationen* ω' beräkna vi förmedelst någondera af eqvationerna 35 b eller 35 c, sedan värdet för ε_0 eller ε'_0 blifvit utredt. För sistnämnda ändamål använda vi här endast ett approximativt förfarande, vi beräkna nemligen koordinaterna $x_0\, y_0$ för (C)-kurvan och $x'_0\, y'_0$ för (Γ)-kurvan för två närliggande punkter enligt eqvationerna 33 a och 34 a; beteckna Δx_0, Δy_0 samt $\Delta x'_0$, $\Delta y'_0$ koordinatdifferenserna för de i fråga varande punkterna så fås härmed approximativa värden för beräkning af ε_0 och ε'_0, nemligen

$$\operatorname{tg} \varepsilon_0 = \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} \text{ och } \operatorname{tg} \varepsilon'_0 = \frac{\Delta y'_0}{\Delta x'_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 46.$$

De förhållanden (C)- och (Γ)-kurvorna visa i afseende på deras inbördes läge till hvarandra synas vara mer öfverskådliga om man utgår från det läge de intaga vid ryckningens begynnelse, således vid tidpunkten t_1; då är nemligen

skrifarmen ϱ parallel med x-axeln, och således $x'_0y'_0$-axelsystemet parallelt med det allmänna axelsystemet xy, hvartill koordinaterna x_0y_0 för (C)-kurvan hänföra sig. För att hänföra äfven (I')-kurvan till detta axelsystem observeras att vid i fråga varande läge koordinaterna för midtpunkten m af skrifarmen (d. v. s. origo för axelsystemet $x'_0y'_0$) äro $\frac{\varrho}{2}$ och S_0; koordinaterna för punkter af (I')-kurvan kunna derföre uttryckas förmedelst: $x'_0+\frac{\varrho}{2}$ och y'_0+S_0 (der i förevarande fall y', och x', hafva negativa värden). Beteckna derföre $\xi_0\eta_0$ dessa koordinater så äro

$$\xi_0 = x'_0 + \frac{\varrho}{2}\,;\ \eta_0 = y'_0 + S_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 48_a.$$

eller tillfölje af eqvationerna 34 a:

$$\xi_0 = -\frac{ok}{o+\omega} + \varrho\,;\ \eta_0 = -\frac{oh}{o+\omega} + S_0 \quad \ldots\ldots\ldots 48_b.$$

Slutligen värdet för ω' beräkna vi af (I')-kurvan, således af eqvationen 35 c; värdet för ε'_0 fås i öfverensstämmelse med eqvationerna 48 a af relationen

$$\operatorname{tg}\varepsilon'_0 = \frac{\Delta\eta_0}{\Delta\xi_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 48_c.$$

der åter $\Delta\eta_0$, $\Delta\xi_0$ beteckna koordinatdifferenserna för två närliggande punkter.

3. *Energin* E som muskeln meddelar systemet fås af eqvationen 12 a i afdelning II

$$\frac{E}{g} = Ma\sin\psi + \frac{T\omega^2}{2g}.$$

4. *Muskelkraften* Q beräknas af eqvationen 11 i afdelning II

$$\frac{Q}{g} = \frac{Ma}{R}\cos\psi + \frac{T}{gR}\omega'.$$

I afseende på öfriga förhållanden som här kunna göras till föremål för beräkning äro de i föregående afdelningar funna relationerna att tillämpas.

5. *Tillämpning.* I det försök här nedan refereras afse vi hufvudsakligast den vigtigaste delen af kurvan, således dess uppstigande skenkel. Mätningarna utfördes ursprungligen för en intervall af $^1{}_2$ grad, för att närmare utreda läget

för de punkter, hvarom ofvan i paragraf 9, föregående afdelning, varit fråga; men beräkningarna i tabell I äro angifna för en intervall af en grad.

Sjelfva försöket utfördes den $^{11}/_{V}$ detta år; försöksdjuret, en fullväxt rana temporaria, hade några dagar tidigare blifvit infångadt, men visade vid preparationen något blek muskulatur; musculus gastrocnemius som vid försöket användes kan derför ej anses representera alldeles normala förhållanden. Det rörliga systemet var icke belastadt med de ofvan nämnda löpande vigterna, och var ej understödt i primärläget; fallvigten som satte rotationsapparaten i rörelse var två kilogram. Muskeln var anordnad i myografen så att muskelkraftens momentarm var konstant (enligt anordningen 1:o i afdelning II); retningen skedde från nervus ischiadicus med öppningsinduktionsslag förmedelst opolaliserbara elektroder.

Initialcirkelns radie S_0 befanns vara 22.545 centimeter, hvaraf då skrifarmen ϱ har 20 centimeters längd beräknas förmedelst eqvationerna 19 b

$$\zeta = 48^0\ 25'\ 23'', \text{ och } S_1 = 30.137 \text{ centimeter.}$$

Då vidare skrifytan var inställd på mätningsapparaten befanns märket t_0 bestämdt af siffran $36^0\ 1'$; åter läget för det ställe af kurvan der skrifspetsen begynnte höja sig, således läget för t_1, befanns vid siffran $41^0\ 8'$ på gradskifvan; [för bestämning af sistnämnda läge inställdes mikroskoparmen i initialläget och hårkorset för punkten t_0 på initialcirkeln S_0; sedan vreds gradskifvan jemte skrifytan till dess hårkorset låg utanför kurvan; dernäst skedde vridning i motsatt riktning till dess hårkorset åter låg på kurvan; om båda dessa lägen ligga nära hvarandra kan medeltalet af båda anses motsvara det sökta läget t_1; upprepning af sådana försök, tre gånger åt hvardera sidan gåfvo

$41^0\ 12'$	$41^0\ 7'$
41 11	41 5
41 11	41 6

hvaraf i medeltal $41^0\ 8'$]. Latenta retningsstadiet α_0 befanns sålunda vara $5^0\ 7'$. Hela kurvan från t_0 till den punkt der den skar initialcirkeln upptog $55^0\ 11'$. Vidare upptogo tjugu våglängder af stämmgaffelkurvan under muskelkurvan $47^0\ 11'$; häraf och af (hela) perioden $^1/_{128}$ dels sekund för stämmgaffeln beräknas skrifytans vinkelhastighet o till 5.339 31 centimeter, samt tiden för en vridning af en half grad till 0.001 634 4 sekund. Dessa data jemte de uppmätta värdena för α, ψ och Θ ligga till grund för beräkningarna af försöket.

I nedanstående tabell (tabell I) sammanfattas resultaten af mätningarna och beräkningarna; här hänför sig hvarje horizontalrad till en och samma

punkt af kurvan och angifver de qvantiteter för denna punkt som antydas af öfverskrifterna öfver vertikalkolumnerna. Den första kolumnen med öfverskriften α angifver sålunda punktens läge eller vinkelafstånd från t_1, då ryckningen begynnte: andra kolumnen med öfverskriften t angifver tiden t från nyssnämnda ögonblick t_1 till dess skrifspetsen vid kurvans uppdragande befann sig i den i fråga varande punkten af muskelkurvan. (Här och i alla tal som angifvas i decimaler har iakttagits att sista bibehållna decimalen ökats med en enhet ifall den första utelemnade decimalen var 5 eller större än 5.) För att af det sålunda bestämda värdet för t beräkna tiden från det ögonblick t_0 då retningen skedde är till t att adderas den tid som motsvarar latenta retningsstadiet α_0 eller $5^0\,7'$; denna tid blifver 0.0167.. eller i afrundadt tal 0.017 sekund. Tredje och fjerde kolumnen med öfverskrifterna ψ och Θ angifva de uppmätta värdena för dessa qvantiteter: dessa värden äro medeltal af åtminstone två mätningar. I afseende på de följande kolumnerna må till hvad här ofvan blifvit nämndt tilläggas att värdena för ω, $\frac{d\sigma}{dt}$ och f äro beräknade förmedelst eqvationerna 28 och 31 c. I sista kolumnen med öfverskriften „anmärkningar" angifvas de funna lägena för några af de punkter, hvarom i föregående afdelning, paragraf 9, var fråga.

Tabellen är uträknad för en intervall af en grad; för några af de i paragraf 9, föregående afdelning, omnämnda punkterna är en intervall af 30 minuter och i ett fall — vid Θ_0 — af 20 minuter i tabellen införd.

Med ledning af värdena för x_0, y_0 samt ξ_0, η_0 äro (C)- och (Γ)-kurvorna i figuren 2, planschen III, tecknade under formen af polygonala figurer; siffran invid polygonpunkterna antyder läget α för den punkt af muskelkurvan till hvilken polygonpunkten hör: siffran bestämmer nemligen antalet hela grader i värdet för α: härtill äro 52 minuter och för tvenne polygonpunkter — 40 och 41 — 22 minuter att adderas för att erhålla det fullständiga värdet för α. Det är dock endast hvarannan punkt som sålunda blifvit utmärkt med en siffra, nemligen i (C)-kurvan alla punkter för hvilka antalet grader i värdet för α uttryckes med jemnt tal, och för (Γ)-kurvan endast de punkter der detta tal är udda; läget för de mellanliggande punkterna är utmärkt förmedelst små tvärstreck. Vidare äro de punkter hvilkas intervall är en grad sammanbundna förmedelst en utdragen rät linie; der intervallen är större är den sammanbindande linien endast prickad.

Af dessa kurvor ses redan att bestämningen af punkternas lägen i några fall åtminstone ej utfallit alldeles noggrann, t. ex. för punkterna 21 och 22 och likaså 26 och 28: några omständigheter synas dock antyda att de funna

Ta-

α	t	ψ	Θ	ω	$Ma \sin \psi$	$\frac{T\omega^2}{2g}$	$\frac{E}{g}$	x_0	y_0	ξ_0
1°52′	0.006	0° 2′ 26″	1°55′ 0″	0.20	0.16	0.11	0.27	0.74	0.78	0.73
2 52	0.009	0 5 8	2 51 30	0.30	0.34	0.25	0.58	1.09	1.12	1.07
3 52	0.013	0 9 6	4 13 30	0.43	0.59	0.54	1.13	1.60	1.58	1.54
4 52	0.016	0 14 37	5 29 30	0.56	0 95	0.90	1.85	2.06	1.96	1.97
5 52	0.019	0 21 49	6 59 0	0 70	1.42	1.44	2.87	2.58	2.37	2.45
6 52	0.022	0 30 25	8 25 0	0.84	1.99	2.08	4 07	3.08	2.73	2.90
7 52	0 026	0 40 45	9 53 0	0.99	2.66	2.85	5.51	3.58	3.06	3.35
8 22	—	0 46 33	10 43 30	1.07	3.04	3.36	6.40	—	—	—
8 52	0.028	0 52 45	11 1 30	1.10	3.45	3.51	6.95	3.96	3.27	3.69
9 52	0 032	1 5 41	12 23 0	1.23	4.29	4.41	8.70	4.41	3.51	4.09
10 52	0.036	1 19 42	13 3 0	1.28	5.21	4 81	10.01	4.63	3.56	4.30
11 52	0.039	1 34 15	13 33 0	1.32	6.16	5.08	11.23	4.80	3.55	4.46
12 22	—	1 41 51	13 50 0	1.34	6.65	5.25	11.90	—	—	—
12 52	0.042	1 49 25	13 58 0	1.34	7.15	5 28	12.42	4.93	3.52	4.60
13 52	0.045	2 4 39	14 1 20	1.33	8.14	5.16	13.30	4.95	3.41	4.65
14 52	0.048	2 19 29	14 17 0	1.34	9.11	5.23	14.34	5.03	3.34	4.75
15 52	0.052	2 32 7	13 59 30	1.29	9.93	4.83	14.76	4.93	3.15	4.70
16 52	0.055	2 48 13	13 34 30	1.21	10.98	4.31	15.28	4.76	2.92	4.62
17 52	0.058	3 1 45	13 18 0	1.16	11.87	3.95	15.81	4.64	2.74	4.58
18 52	0.062	3 13 5	12 33 30	1.06	12.60	3.28	15.88	4.34	2.46	4.39
19 52	0.065	3 25 35	11 59 30	0.97	13.42	2.78	16.20	4.09	4.22	4.26
20 52	0.068	3 36 1	11 25 30	0.89	14.10	2.33	16.43	3.83	2.00	4.11
21 52	0 071	3 45 20	10 11 0	0.74	14.71	1.58	16.29	3.27	1.63	3.76
22 52	0.075	3 53 39	10 3 0	0.71	15.25	1.46	16.71	3.18	1.52	3 73
23 52	0.078	4 0 20	8 51 0	0.56	15.68	0.91	16.60	2.60	1.19	3.37
24 52	0 081	4 5 53	7 31 0	0.40	16.05	0.46	16.51	1.92	0.84	2.94
25 52	0.085	4 10 7	6 44 20	0.30	16 32	0.27	16.59	1.50	0.62	2.68
26 52	0.088	4 12 51	5 26 0	0.15	16.50	0.07	16.56	0.77	0.31	2.22
27 52	0.091	4 14 25	4 46 0	0.07	16 60	0.02	16.62	0.38	0.14	1.97
28 22	0.093	4 14 40	4 7 30	0.01	16.62	0.00	16.62	0.07	0.03	—
28 52	0.095	4 14 25	3 27 20	− 0.07	16.60	0.02	16.62	− 0.40	− 0.14	1.47
29 52	—	4 13 2	2 50 0	− 0.14	—	—	—	− 0.77	− 0.26	1.22
31 52	—	4 6 43	0 14 30	− 0.42	—	—	—	− 2.46	− 0.73	0.11
32 12	—	4 5 21	− 0 15 0	− 0.47	—	—	—	—	—	—
32 52	—	4 1 37	− 0 21 0	− 0.47	—	—	—	− 2 83	− 0.79	− 0.16
40 22	—	2 45 48	− 8 39 30	− 1.25	—	—	—	− 9.13	− 1.29	− 4.67
41 22	—	2 31 9	− 9 47 30	− 1.35	—	—	—	−10.10	− 1.25	− 5.40
42 52	—	2 7 23	−11 11 30	− 1.46	—	—	—	−11.24	− 1.09	− 6.33
43 52	—	1 50 44	−11 55 0	− 1.50	—	—	—	−11.76	− 0 94	− 6.80
44 52	—	1 33 18	−12 44 30	− 1 56	—	—	—	−12.40	− 0.77	− 7.37
45 52	—	1 15 29	−13 20 0	− 1.59	—	—	—	−12.74	− 0 57	− 7.75

bell I.

η_0	ε'_0	ω'	$\frac{Ma}{R}\cos\psi$	$\frac{T\varpi'}{gR}$	$\frac{Q}{g}$	$\frac{d\sigma}{dt}$	f	$\zeta+\psi-\Theta$	Anmärkningar
0.79	45° 50′ 13″	23.81	56.02	34.73	90.75	120.51	21.77	46° 32′ 49″	
1.14	45 51 59	35.62	56.02	51.95	107.97	120.66	21.43	45 39 1	
1.63	44 17 34	33.11	56.02	48.30	104.32	120.98	20.97	44 20 59	
2.05	43 53 39	39.20	56.02	57.31	113.32	121.38	20.59	43 10 30	
2.51	42 39 51	39.51	56.02	57.77	113.79	121.95	20.18	41 48 12	
2.93	41 34 5	40.40	56.02	58.92	114.94	122.63	19.83	40 30 48	Q_m
3.32	37 30 29	30.47	56.02	44.44	100.46	123.46	19.51	39 13 8	
—	—	—	—	—	—	123.97	19.34	38 28 26	ϑ_m
3.59	38 55 31	38.50	56.02	39.19	95.20	124.29	19.32	38 16 38	
3.91	23 29 54	16.52	56.01	24.08	80.10	125.30	19.08	37 8 4	
4.00	11 45 45	10.87	56.01	15.86	71.87	126.07	19.04	36 42 5	
4.03	1 29 40	7.76	56.00	11.33	67.33	126.78	19.04	36 26 38	ϑ_0 ; f_m
—	—	—	—	—	—	127.17	19.04	36 17 14	
4.04	−(67 10 57)	− 4.66	—	—	—	127.48	19.07	36 16 48	$(\zeta+\psi-\Theta)_m$
3.92	—	—	—	—	—	127.97	19.19	36 28 42	
3.88	—	—	—	—	—	128.58	19.26	36 27 52	Θ_m
3.68	—	—	—	—	—	128.80	19.49	36 58 0	
3.40	—	—	—	—	—	129.05	19.69	37 39 6	
3.19	—	—	—	—	—	129.03	19.89	38 9 8	
2.82	—	—	—	—	—	129.27	20.20	39 4 58	
2.50	—	—	—	—	—	129.36	20.49	39 51 28	
2.19	—	—	—	—	—	129.40	20.76	40 35 54	$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_m$
1.62	—	—	—	—	—	129.14	21.26	41 59 43	
1.48	—	—	—	—	—	129.35	21.39	42 16 2	Q_0
0.92	—	—	—	—	—	129.07	21.88	43 34 43	
0.29	—	—	—	—	—	128.80	22.45	45 0 16	
− 0.11	—	—	—	—	—	128.71	22.81	45 51 10	
− 0.75	—	—	—	—	—	128.47	23.40	47 12 14	
− 1.09	—	—	—	—	—	128.38	23.72	47 53 48	
—	—	—	—	—	—	128.27	24.03	48 25 23	ψ_m
− 1.75	—	—	—	—	—	128.17	24.33	49 12 27	
− 2.06	—	—	—	—	—	—	—	49 48 25	
− 3.41	—	—	—	—	—	127.72	25.95	52 17 36	Θ_0
—	—	—	—	—	—	127.68	26.23	52 45 44	
− 3.68	—	—	—	—	—	—	—	52 48 0	
− 8.12	—	—	—	—	—	—	—	59 50 41	
− 8.76	—	—	—	—	—	—	—	60 44 2	
− 9.45	—	—	—	—	—	—	—	61 44 16	
− 9.71	—	—	—	—	—	—	—	62 11 7	
−10.05	—	—	—	—	—	—	—	62 43 11	
−10.15	—	—	—	—	—	—	—	63 0 52	

värdena för vinkelhastigheten ω ej mycket skilja sig från de verkliga. Hit höra till en början de förhållanden som framträda i toppen ψ_m; denna punkt har i tabellen I lokaliserats vid $\alpha = 28^0\ 22'$; de positiva koordinaterna 0.07 och 0.03 samt de negativa: — 0.40 och — 0.14 för de till punkterna $28^0\ 22'$ och $28^0\ 52'$ hörande momentancentra antyda att i verkligheten punkten ψ_m ligger mellan båda dessa punkter, men närmare till den förra; här må derföre antagas att den förra punkten, i hvilken α har värdet $28^0\ 22'$ och ψ uppnår det största observerade värdet $4^0\ 14'\ 40''$, är ψ_m; (det må tilläggas att vid utförandet af mätningarna förskjutning af några vinkelminuter åt hvardera sidan från detta läge icke gaf större värde för ψ); då skola eqvationerna 42 b, c, d och e verifieras, d. v. s. följande relationer skola ega rum

$$\Theta_2 = \Theta\ ;\ \Theta_1 = 0\ ;\ S = f \text{ samt } So = \frac{d\sigma}{dt}.$$

Beräkning af värdena för Θ_2 och S förmedelst eqvationerna 29 c och 29 e samt för So gaf följande resultat som här äro sammanställda med de i tabellen angifna värdena för Θ, f och $\frac{d\sigma}{dt}$:

$\Theta_2 = 4^0\ 6'\ 48''$	$\Theta = 4^0\ 7'\ 30''$
$S = 24.03$	$f = 24.03$
$So = 128.27$	$\frac{d\sigma}{dt} = 128.27$

Vidare visade mätningarna att punkten Θ_0 ligger mellan kurvpunkterna $\alpha = 31^0\ 52'$ och $\alpha = 32^0\ 12'$; i förra fallet erhölls nemligen för Θ värdet $+ 0^0\ 14'\ 30''$, i senare åter värdet $- 0^0\ 15'\ 0''$. I denna punkt Θ_0 skola eqvationerna 43 a, b, c och d verifieras, således följande relationer:

$$\Theta = \Theta_0 = 0\ ;\ \Theta_2 = -\Theta_1\ ;\ o + \omega = \frac{ok}{\varrho}\ ;\ \frac{d\sigma}{dt} = oh \text{ samt } f = \varrho\frac{h}{k}.$$

Då i förevarande fall punkten Θ_0 är att lokaliseras midtemellan de i fråga varande gränserna, må beräkningarna utföras för hvardera gränsen; följande sammanställning visar resultaten, deri Θ_1 beräknats förmedelst eqvationen 29 f:

Vid läget $31^0\ 52'$:	Vid läget $32^0\ 12'$:
$\Theta_2 = 3^0\ 59'\ 10''$; $\Theta_1 = -[3^0\ 44'\ 40'']$	$\Theta_2 = 3^0\ 58'\ 2''$; $\Theta_1 = -[4^0\ 13'\ 2'']$
$o + \omega = 4.92$; $\frac{ok}{\varrho} = 4.89$	$o + \omega = 4.87$; $\frac{ok}{\varrho} = 4.90$
$\frac{d\sigma}{dt} = 127.72$; $oh = 127.72$	$\frac{d\sigma}{dt} = 127.68$; $oh = 127.68$
$f = 25.95$; $\varrho\frac{h}{k} = 26.10$	$f = 26.23$; $\varrho\frac{h}{k} = 26.08$

Vigtigare och af allmännare betydelse är undersökning af vinkelhastigheten ω i den del af muskelkurvan der muskeln ej mer verkar på systemet. Det ställe Q_0 på muskelkurvan der detta inträffar är enligt tabellen I lokaliseradt vid läget $\alpha = 22^0\ 52'$, emedan i denna punkt och följande ända intill toppen ψ_m energin $\frac{E}{g}$ har så att säga samma värde. 16.6 gramcentimeter, som i toppen. Från denna punkt mot toppen skall ω verifiera eqvationen 13 b (i afdelning II), som i förevarande fall (enligt hvad nämndes i paragraf 5, 4:o, afdelning IV) gifver relationen

$$\omega^2 = \frac{2Mga}{T}(\sin\psi_m - \sin\psi),$$

der ψ_m har det i tabellen angifna värdet $4^\circ\ 14'\ 40''$ och den konstanta koefficienten $\frac{2Mga}{T}$ värdet

$$Log\frac{2Mga}{T} = 1.885\,473\,2.$$

I följande tabell (tabell II) äro värdena för ω, beräknade såsom ofvan af ψ och Θ samt tillika af sistnämnda relation, sammanställda för alla punkter i den i fråga varande intervallen, för hvilka nödiga mätningar blifvit gjorda, tillsammans nio punkter på half eller en grads intervall; (stället mellan $\alpha = 23^0\ 22'$ och $\alpha = 26^0\ 52'$ låg på en af gradskifvans ekrar; för lägena $24^0\ 22$ och $25^0\ 22'$ blefvo derföre mätningar icke utförda).

Tabell II.

α	ψ	Θ	ω beräknad af		
			ψ och Θ	ψ, ψ_m och $\frac{2Mga}{T}$	
$22^0\ 52'$	$3^0\ 53'\ 39''$	$10^0\ 3'\ 0''$	0.71	0.68	Q_0
23 22	3 57 9	9 24 0	0.63	0.62	
23 52	4 0 20	8 51 0	0.56	0.57	
24 52	4 5 53	7 31 0	0.40	0.44	
25 52	4 10 7	6 44 20	0.30	0.32	
26 22	4 11 49	6 10 30	0.24	0.25	
26 52	4 12 51	5 26 0	0.15	0.20	
27 22	4 13 51	5 14 30	0.13	0.13	
27 52	4 14 25	4 46 0	0.074	0.075	

Endast vid läget $\alpha = 26^0\,52'$ framträder här större differens i de funna värdena för ω; vid de öfriga åtta lägena äro differenserna obetydliga. Häraf synes framgå att den använda metoden för bestämning af vinkelhastigheten ω äfven i öfriga delar af muskelkurvan kan anses motsvara ändamålet.

Hvad åter beträffar värdet för vinkelaccelerationen ω' så kan den allmänna metod vi här inslagit för dess beräknande gifva endast approximativa värden; i början af muskelkurvan, för hvilken de motsvarande delarna i (C)- och (I')-kurvorna hafva mer rätlinigt förlopp, kan dock metoden med större säkerhet användas. Deremot mot toppen i båda dessa kurvor, vid läget $\alpha = 11^0\,52'$, framträder en böjning om hvars orsak man till en början måste vara osäker, och vidare längre fram på den nedstigande skenkeln visa sig några oregelbundenheter såsom redan påpekades; derföre hafva värdena för ε'_0 resp. ω', beräknade genom den allmänna metoden, för detta gebit af kurvan icke blifvit införda i tabellen I; men i detta gebit af kurvan, började från $\alpha = 10^0$ à 11^0 mot toppen, äro flera af de punkter — f_m, $(\zeta + \psi - \Theta)_m$, ω_m, etc. — belägna, för hvilka ω' kan beräknas af de i paragraf 9, föregående afdelning, funna eqvationerna 36—46. Resultaten som på detta sätt vinnas äro sammanställda i tabell III.

Tabell III.

α	ψ	Θ	ω	ω'	$\frac{Ma\cos\psi}{R}$	$\frac{T\omega'}{gR}$	$\frac{Q}{g}$	
6° 52′	0° 30′ 25″	8° 25′ 0″	0.84	40.40	56.02	58.92	114.94	Q_m
8 22	0 46 33	10 43 30	1.07	34.99	56.02	51.03	107.05	ϑ_m
11 22	1 27 4	13 19 0	1.30	11.40	56.00	17.01	73.03	f_m
11 22	1 27 4	13 19 0	1.30	11.45	56.00	16.70	72.71	$y_{0\,m}$
12 52	1 49 25	13 58 0	1.34	2.23	55.99	3.02	59.01	$(\zeta+\psi-\Theta)_m$
12 52	1 49 25	13 58 0	1.34	0.00	55.99	0.00	55.99	ω_m
14 52	2 19 29	14 17 0	1.34	− 5.92	55.98	− 8.64	47.34	$x_{0\,m}$
14 52	2 19 29	14 17 0	1.34	− 6.60	55.98	− 9.63	46.35	Θ_m
20 52	3 36 1	11 25 30	0.89	−27.55	55.91	−40.18	15.73	$\frac{d\sigma}{dt}^m$
22 52	3 53 39	10 3 0	0.71	−38.32	—	—	0.00	Q_0
27 52	4 14 25	4 46 0	0.07	−38.30	—	—	0.00	
28 22	4 14 40	4 7 30	0 01	−38.30	—	—	0.00	ψ_m

I denna tabell äro äfven intagna värdena för ω' vid Q_m eller Q_{max}, Q_0, ψ_m samt för en mellan de båda sistnämnda belägen punkt. Värdet för ω' vid Q_m är det redan i tabellen I angifna; för Q_0 som såsom redan nämndes till

läget bestämmes deraf att i denna punkt energin $\frac{E}{g}$ uppnår konstant värde och således muskeln ej mer verkar på systemet, samt för alla följande punkter intill muskelkurvans topp är ω' bestämd förmedelst eqvationen 11 d (i afdelning II), som för ändamålet här antager formen

$$\omega' = -\frac{Mga}{T}\cos\psi\,.$$

Då lägena för de i fråga varande punkterna, ϑ_m, f_m etc. (antydda i första och sista kolumnen af denna tabell) icke alldeles noggrannt kunna bestämmas, så måste här främst undersökas om de af eqvationerna 36—46 funna (i tabellen III intagna) värdena för ω' kunna anses vara riktiga: för besvarande af frågan undersöka vi hvilket inflytande en förskjutning om en half eller hel grad af läget α för de i fråga varande punkterna utöfvar på värdet för ω'. Nedanstående tabeller (IV a och IV b) utvisa resultaten.

Tabell IV a.

ϑ_{max}		f_{min}		y_{0max}		$\frac{d\sigma}{dt^m}$	
α	ω'	α	ω'	α	ω'	α	ω'
7° 52′	34.55	10° 52′	11.39	10° 52′	11.04	18° 52′	−30.42
8 22	34.99	11 22	11.40	11 22	11.45	19 52	−28.97
8 52	35.18	11 52	11.89	11 52	11.83	20 52	−27.55
—	—	12 22	12.19	12 22	12.29	21 52	−24.83
—	—	12 52	12.24	12 52	12.57	22 52	−24.13

Tabell IV b.

$(\zeta+\psi-\Theta)_{min}$		Θ_{max}		x_{0max}	
α	ω'	α	ω'	α	ω'
12° 22′	2.20	14° 22′	− 6.55	14° 22′	− 5.98
12 52	2.23	14 52	− 6.60	14 52	− 5.92
13 22	2.23	15 22	− 6.41	15 22	− 5.54

För alla i fråga varande punkter, med undantag af punkten $\frac{d\sigma}{dt^m}$, visa dessa tabeller (IV a och IV b) att icke synnerliga differenser i värdena för ω' fram-

träda, fastän läget för de resp. punkterna förskjutes en half eller till och med hel grad åt någondera sidan från det läge de tillfölje af mätningar och beräkningar fått i tabellen III. För flertalet af dessa punkter äro vidare värdena för ω och ω' beroende blott af de observerade värdena för ψ och Θ, och blifva sålunda desamma hvarifrån än vinkeln α räknas; detta gäller punkterna Θ_m, $(\zeta+\psi-\Theta)_m$, f_m och äfven inflexionspunkten ϑ_m (och det kan tilläggas likaså punkten ω_m). Deremot för punkterna y_{0m} och x_{0m} beror värdet för ω' enligt eqvationerna 45 och 46 jemväl af vinkeln α, med andra ord af läget för punkten t_1 hvilket förmedelst den metod vi användt ej alldeles säkert kan bestämmas. Antages dock att punkten t_1 (och dermed vinkeln α) är noggrannt bestämd så visa tabellerna IV a och IV b att de funna värdena för ω' i punkterna Θ_m, $(\zeta+\psi-\Theta)_m$, f_m, ϑ_m, y_{0m} och x_{0m} motsvara ändamålet; härvid är dock att tilläggas att de i fråga varande punkterna icke noggrannt hafva det läge α tabellen III antyder, utan ligga i omgifningen deraf, i allmänhet inom gebitet af en half grad på någondera sidan om läget α. Under sådana förhållanden låta de funna värdena för ω' bedöma storleken af muskelkraften Q eller $\frac{Q}{g}$ i omgifningen af det läge α tabellen III antyder. [Tabellerna IV a IV b antyda till och med att värdet för ω' blifver ungefär detsamma äfven inom gebitet af någon grad; häraf synes framgå att mätningarna ej behöfva utföras med så liten intervall, en half grad, som i denna första analys kommit till användning; för de fysiologiska uppgifter som närmast föreligga till undersökning förmedelst denna metod synes en intervall af någon grad vid utförandet af mätningarna vara tillräcklig.]

Hvad vidare beträffar lokalisationen af de i fråga varande punkterna såsom tabellen II antyder så har den skett i öfverensstämmelse med hvad tidigare i detta hänseende blifvit framhållet. Tabellen I utvisar läget för $(\zeta+\psi-\Theta)_m$ och likaså för Θ_m då intervallen inskränkes till en grad; för en half grads intervall erhölls samma resultat såsom följande sammanställning visar:

För $(\zeta+\psi-\Theta)_m$				För Θ_m	
α	ψ	Θ	$\zeta+\psi-\Theta$	α	Θ
12° 22′	1° 41′ 51″	13° 50′ 0″	36° 17′ 14″	14° 22′	14° 6′
12 52	1 49 25	13 58 0	36 16 48	14 52	14 17
13 22	1 57 1	14 1 30	36 20 54	15 22	13 56

Läget för ϑ_m och likaså för ϑ_0 bestämdes enligt eqvationerna 37 f och 40 (i paragraf 9. föregående afdelning); de värden ϑ antager i närheten af ϑ_m och ϑ_0 för en intervall af en half grad visa tabellerna V a och V b.

Tabell V a.

α	ψ	Θ	$\alpha+\psi$	ϑ	
6° 52	0° 30′ 25″	8° 25′ 0″	7° 22′ 25″	1° 2′ 35″	
7 22	0 35 30	9 12 0	7 57 30	1 14 30	
7 52	0 40 45	9 53 0	8 32 45	1 20 15	
8 22	0 46 33	10 43 30	9 8 33	1 34 57	ϑ_m
8 52	0 52 45	11 1 30	9 44 45	1 16 45	
9 22	0 59 3	11 32 30	10 21 3	1 11 27	

Tabell V b.

α	ψ	Θ	$\alpha+\psi$	ϑ	
11° 22′	1° 27′ 4″	13° 19′ 0″	12° 49′ 4″	0° 29′ 56″	
11 52	1 34 15	13 33 0	13 26 15	0 6 45	
12 22	1 41 51	13 50 0	14 3 51	−(0 13 51)	ϑ_0
12 52	1 49 25	13 58 0	14 41 25	−(0 43 25)	

Enligt tabellen V a skulle sålunda ϑ antaga maximalt värde, 1° 34′ 57″, vid läget 8° 22′ eller i omgifningen af denna punkt. Tabellen V b åter visar att ϑ_0 är att lokaliseras mellan $\alpha = 11^0\ 52'$ och $\alpha = 12^0\ 22'$ men närmare till den förra punkten.

I punkten ϑ_m skall vidare accelerationens riktning sammanfalla med tangentens, såsom framhölls vid härledningen af eqvationerna 37 (i paragraf 9, föregående afdelning). För att undersöka om förhållandet är sådant beräknas värdet för ω' af eqvationen 37 d under förutsättning att det funna läget för ϑ_m är riktigt, och sedan af eqvationen 47 e vinkeln $(\alpha+\psi+\mu)$ som accelerationens riktning gör med skrifarmen; häraf slutligen fås värdet för μ. Detta värde befanns vara 1° 37′ 20″: mellan μ och ϑ förefinnes sålunda en differens af 0° 2′ 24″. De eqvationer hvaraf värdena för μ och ϑ närmast beräknas:

$\mu = (\alpha+\psi+\mu) - (\alpha+\psi)$ och $\vartheta = \Theta - (\alpha+\psi)$ gifva: $\mu - \vartheta = (\alpha+\psi+\mu) - \Theta$;

häraf ses att denna differens ej beror af vinkeln α eller läget för t_1, ty den ofvan definierade vinkeln $(\alpha + \psi + \mu)$ har samma värde hvarifrån än vinkeln α räknas. Värdet för $\mu - \vartheta$ antyder vidare att i fråga varande differens kan bero på felaktiga värden för ψ och Θ; en annan förklaring synes oss dock vara lika antaglig, den nemligen att maximala värdet för ϑ icke inträder noggrannt vid läget $\alpha = 8^0\ 22'$, såsom mätningarna med half grads intervall enligt tabell V a antyda, utan på endera sidan om detta läge i gebitet af närmaste halfva grad.

Läget för ω_m samt likaså för y_{0m} och x_{0m} antydes redan i tabellen I, då en intervall af en grad lägges till grund för beräkningarna; samma förfarande tillämpadt för en intervall af en half grad gaf de resultat nedanstående tabell (tabell VI) utvisar.

Tabell VI.

ω_m		y_{0m}		x_{0m}	
α	ω	α	y_0	α	x_0
12° 22′	1.339	10° 52′	3.557	14° 22′	4.970
12 52	1.344	11 22	3.560	14 52	5.031
13 22	1.340	11 52	3.554	15 22	4.904

I öfverensstämmelse härmed har det mellersta läget i denna tabell ansetts tillkomma dessa punkter.

Af tabellen I ses redan att punkten f_m ligger mellan $\alpha = 9^0\ 52'$ och $\alpha = 12^0\ 52'$; undersökning förmedelst half grads intervall gaf, då åter endast de närmaste gränserna anföras

vid $\alpha = 10^0\ 52'$, $f = 19{,}039$; vid $\alpha = 11^0\ 22'$, $f = 19.038$; och vid $\alpha = 11^0\ 52'$, $f = 19.043$.

I öfverensstämmelse härmed har f_m i tabellen III lokaliserats på samma ställe som y_{0m} vid läget $\alpha = 11^0\ 22'$. Dessa båda punkter sammanfalla dock ej här fullständigt; för att de skola sammanfalla måste nemligen eqvationerna 36 b och 45 verifieras förmedelst samma värden för ω och ω' samt α, ψ och Θ; vilkoret härför blifver således:

$$\frac{\omega'}{\omega\,(o + \omega)} = \cot(\zeta + \psi - \Theta) = \cot(\zeta - \alpha)\,;\ \text{hvaraf:}\ \alpha + \psi - \Theta = 0\,;$$

den sista relationen visar att de sammanfallande punkterna f_m och y_{0m} på (C)-kurvan ligga i momentancentrum för punkten ϑ_0 på muskelkurvan. Men läget för sistnämnda punkt befanns ofvan vara på annat ställe, nemligen ungefär en half grad mer mot toppen v_m. — Samma resultat att i fråga varande punkter i denna muskelkurva icke sammanfalla, framgår äfven af den egenskap som vilkorseqvationerna 36 för f_m innebära, den nemligen att i denna punkt normalerna till muskelkurvan och (C)-kurvan sammanfalla, såsom framhölls i paragraf 9, föregående afdelning. Beräkning af riktningen för muskelkurvans normal förmedelst eqvationen 28 e gifver vid läget ϑ_m $\angle (fx) = 91^0\ 34'\ 57''$ samt vid läget y_{0m} $\angle (fx) = 90^0\ 29'\ 56''$; åter (C)-kurvans normal befanns vid ϑ_m göra vinkeln $\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_0\right) = 118^0\ 57'\ 22''$ samt vid y_{0m} vinkeln $\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_0\right) = \frac{\pi}{2}$ med x-axeln; [för beräkning af $\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_0\right)$ vid ϑ_m beräknades först β förmedelst eqvationen 35 b och sedan $\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_0\right)$ af eqvationen 35 a i paragraf 8 föregående afdelning; vid y_{0m} åter fås värdet för $\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_0\right)$ omedelbart, emedan i denna punkt ε_0 har värdet noll enligt eqvationen 45.] Häraf ses att under öfvergången från ϑ_m till y_{0m} de i fråga varande normalerna sammanfalla och att detta inträffar nära till punkten y_{0m}, men på åtminstone en half grads afstånd; f_m och y_{0m} äro sålunda skilda punkter, men belägna helt nära hvarandra; tabellen IV a visar att dock värdena för ω' i dessa punkter endast obetydligt differera.

Enligt tabellen III skulle vidare punkterna $(\zeta + \psi - \Theta)_m$ och ω_m sammanfalla vid läget $\alpha = 12^0\ 52'$; värdena för ω' i tabellen, beräknade under denna förutsättning, visa dock att dessa punkter i verkligheten äro skilda; tydligare framgår detta af vilkorseqvationen 38 c för $(\zeta + \psi - \Theta)_m$; vid ω_m har nemligen ω' värdet noll; för att ω' i nyssnämnda eqvation skall antaga samma värde måste Θ hafva värdet noll; men detta vilkor uppfylles icke i detta gebit af muskelkurvan. Mellan dessa punkter finnes sålunda en intervall; enligt beräkningarna sammanfalla de emedan deras afstånd (i vinkelmått från punkten O) är mindre än den intervall, en half grad, för hvilken mätningarna äro utförda.

I den intervall som sålunda nödvändigt förefinnes mellan sistnämnda punkter, $(\zeta + \psi - \Theta)_m$ och ω_m, är vidare den punkt att lokaliseras i hvilken muskelkraften Q eller $\frac{Q}{g}$ återtager samma värde Q_1 resp. $\frac{Q_1}{g}$ som före kontraktionen; storleken för denna kraft är nemligen här (enligt hvad framhölls i af-

delning II, paragraf 6) $\frac{Ma}{R}$, således 56.02 gram; tabellen III antyder att detta värde antager $\frac{Q}{g}$ under öfvergången från $(\zeta+\psi-\Theta)_m$ till ω_m.

För punkterna x_{0m} och Θ_m, hvilka enligt tabellen III skulle sammanfalla vid läget $\alpha = 14^0\ 52'$, gäller detsamma som för de nyssnämnda punkterna, att de nemligen i verkligheten icke kunna — i detta fall — sammanfalla; detta antydes redan af de differenta värdena för ω' i tabellen III, härledda under förutsättning att båda punkterna sammanfalla såsom de omedelbara resultaten af de empiriska undersökningarna antyda; tydligare framgår detta af vilkorseqvationerna 46 och 39 b för dessa punkter, hvaraf fås då ω, ω', α, ψ och Θ i båda hafva samma värden

$$\frac{\omega'}{\omega\,(o+\omega)} = \operatorname{tg}(\zeta-\alpha) = -\operatorname{tg}(\zeta+\psi-\Theta);\ \text{således:}\ \alpha+\psi-\Theta = 0;$$

den sista af dessa relationer är nemligen icke verifierad för i fråga varande läge $\alpha = 14^0\ 52'$, utan ungefär tre grader tidigare (närmare muskelkurvans början), såsom ofvan framhölls vid punkten ϑ_1, då α har litet större värde än $11^0\ 52'$.

Läget slutligen för punkten $\frac{d\sigma}{dt}_m$ hör till de svårast bestämbara, emedan värdet för hastigheten $\frac{d\sigma}{dt}$ längs kurvan öfverhufvud, och isynnerhet i gebitet af denna punkt endast långsamt förändras. Tabellen I visar att de yttersta gränserna inom hvilka $\frac{d\sigma}{dt}_m$ är att lokaliseras omfatta ungefär sju grader, från $\alpha = 16^0\ 52'$ till $\alpha = 23^0\ 52'$, och det största värdet synes framträda vid läget $\alpha = 20^0\ 52'$, då beräkningen utföres med en intervall af en grad. Beräkning med half grads intervall gifver, så att säga sjelffallet, icke säkrare resultat; det nämnda läget $\alpha = 20^0\ 52'$ för $\frac{d\sigma}{dt}_m$ har derföre i tabellen III bibehållits.

Af det närmast föregående ses att punkterna y_{0m} och x_{0m} i denna muskelkurva icke lemna väsendtliga upplysningar i afseende på ω'. Häraf synes framgå att man vid analysens utförande helt och hållet kan undvika att använda (C)-kurvan, så mycket hellre som alla bestämningar härigenom blifva oberoende af utgångspunkten t_1 för vinkeln α, hvilken såsom ofvan nämndes här ej alldeles säkert blifver bestämd.

Slutligen må tilläggas att teckningarna af (C)- och (I')-kurvorna, figur 2, Pl. III, omedelbart antyda att den hastighet (u eller $\frac{ds_0}{dt}$ eller $\frac{ds'_0}{dt}$ i eqvatio-

nerna 33 d och 34 e) hvarmed momentancentra vexla, i de resp. kurvornas toppar (mellan punkterna 11 och 14) är minst; tiden Δt för (Γ)-kurvans vridning längs (C)-kurvan är nemligen för hvarje intervall af en grad densamma (såsom ofvan framhölls, i detta försök 0.003 sekund), men båglängderna Δs_0 eller $\Delta s'_0$ mellan två närliggande punkter på kurvorna äro minst i toppen; då förhållandet $\frac{\Delta s_0}{\Delta t}$ eller $\frac{\Delta s'_0}{\Delta t}$ angifver ett approximativt värde för denna hastighet, så ses härmed omedelbart af teckningen att t. ex. vid ϑ_{max} (punkten 8) i fråga varande hastighet är ungefär fyra gånger större än vid ω_{max} eller $(\zeta \mp \psi \quad \Theta)_{min}$ (punkten 12). Beräkning af denna hastighet u förmedelst eqvationen 33 d visar detsamma; vid ϑ_{max} har nemligen u värdet 132.15, men vid ω_{max} 32.36 och vid $(\zeta + \upsilon - \Theta)$, som så att säga sammanfaller med ω_{max}, 33.35 (centimeter).

K. Hallstén. Analys af muskelkurvor.

Fig. 1.

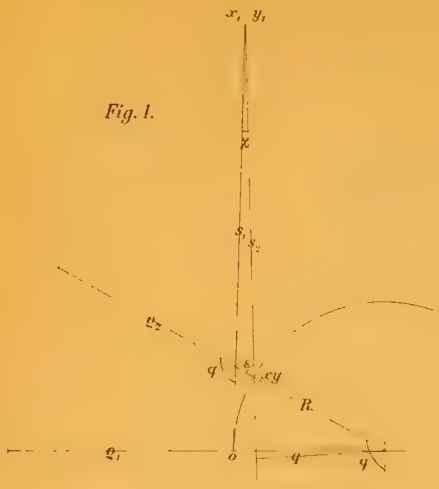


Fig. 3.

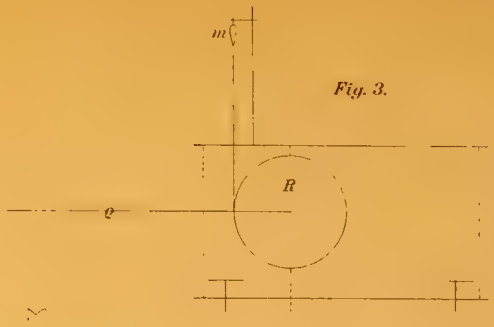


Fig. 4.

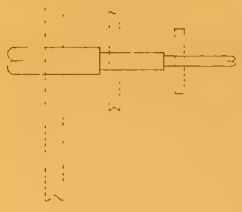


Fig. 5.

Fig. 2.

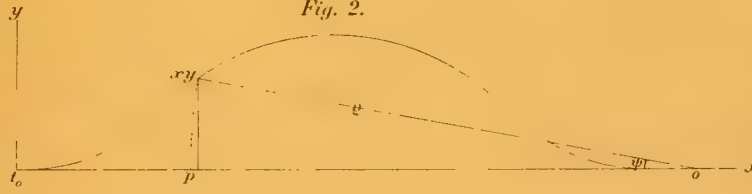


Fig. 8.

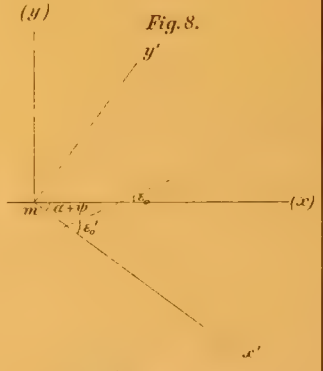


Fig. 6.

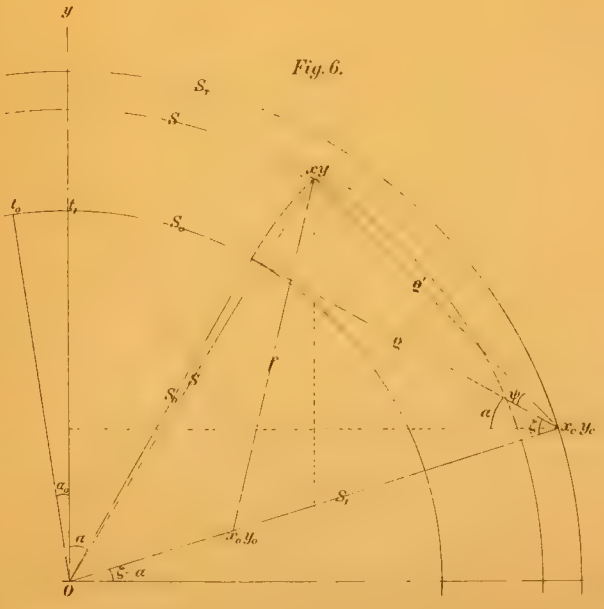


Fig. 7.A.

Fig. 7.B.

Fig. 7.C.

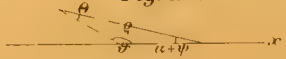


Fig. 1.

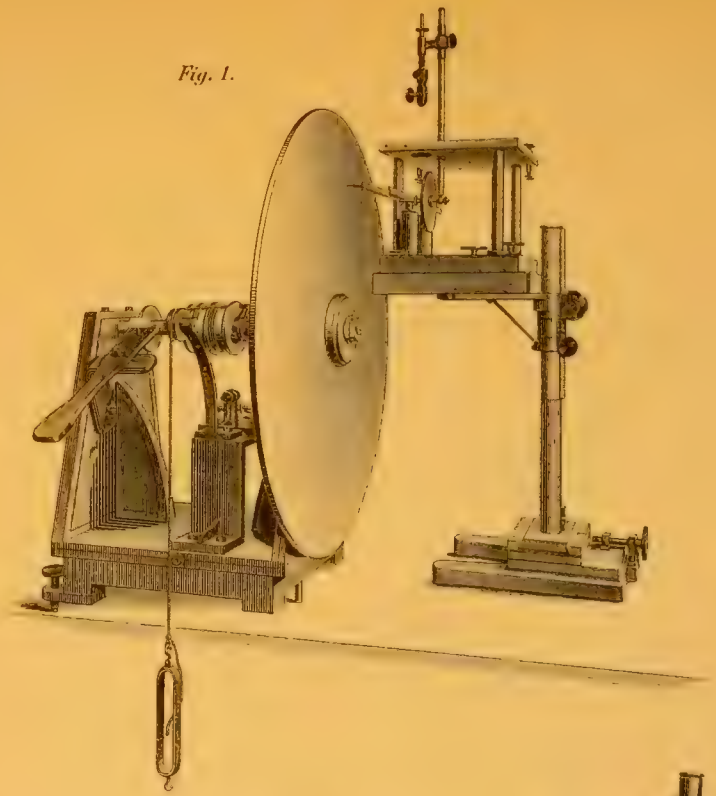


Fig. 2.

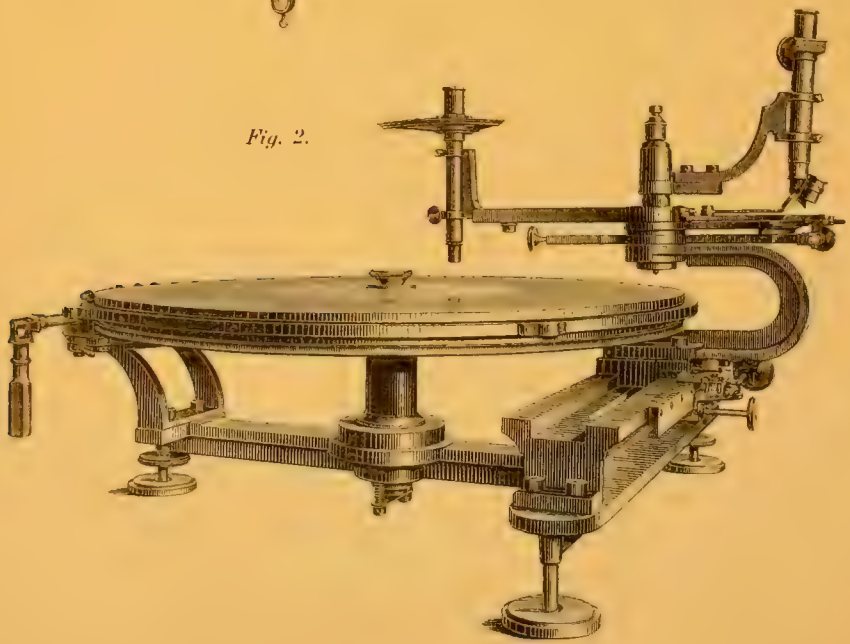


Fig. 1.

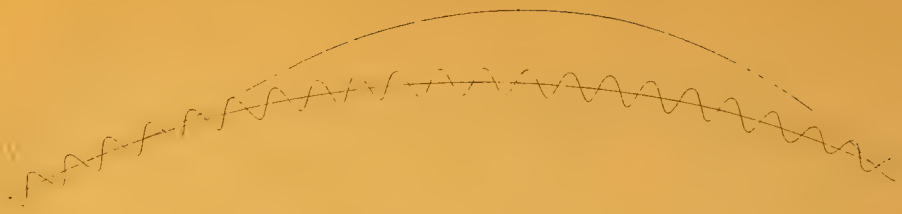
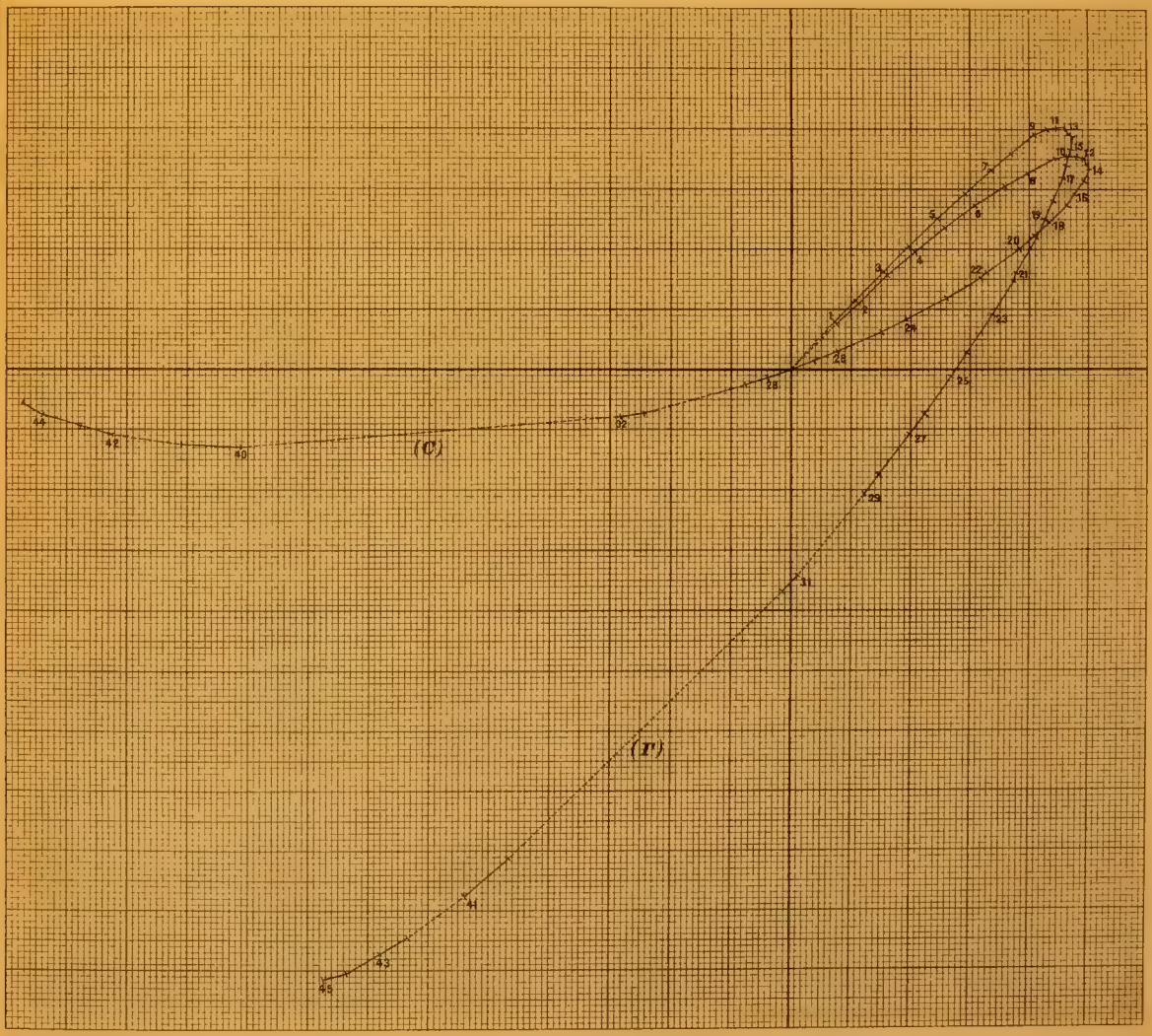


Fig. 2.



ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ.
TOM. XXIV. № 2.

CONTRIBUTIONS

TO THE

BRYOLOGICAL FLORA

OF

THE NORTH-WESTERN HIMALAYA.

BY

V. F. BROTHERUS.

Since the appearance, about forty years ago, of Mr. W. Mitten's fundamental work on the Mosses of East India [1]), very little has been published concerning the bryological flora of these regions.

For a period of about 5—6 years, I have had the opportunity of examining some ample collections from different parts of the Himalaya, sent me by some kind correspondents, first by Dr. D. Prain, Curator of the Botanical Museum of Calcutta, and later on, by Mr. J. F. Duthie, Director of the Forest Department for Northern India, Mr. J. S. Gamble, Conservator of Forests, and Mr. G. A. Gammie, Assistant of Government Cinchona Plantations, besides which Professor Ign. Urban gave me an opportunity of examining the most beautiful collections gathered by the late Dr. Wichura in Sikkim, and which belong to the Botanical Museum of Berlin.

In order to meet the wishes expressed by my excellent friend, Mr. J. F. Duthie, the indefatigable explorer of the flora of North-Western Himalaya, I have, in this paper, grouped the results of his researches in Kashmir during the summers of 1892—1893, adding also, some new species from Kumaun [2]). I have been all the more pleased to do so, as this territory seems to form one whole, and differs, in its bryological flora, in a high degree, from the other parts of the Himalaya. Even a cursory view of the list of species will show a total absence of tropical forms, so this territory, with regard to its bryological vegetation, comes nearest to Central Asia and Europe.

Mr. Duthie has been kind enough to give me an account of the characteristics of nature within this territory, which I take much pleasure in inserting here.

---

[1]) Journ. of the Proceed. of the Linn. Soc. Suppl. to Botany. Vol. I. London 1859.

[2]) Further details of these travels are to be found in „Records of the Botanical Survey of India". Vol. I, Nos 1 and 3. Calcutta 1893—94.

«The country of Kashmir is correctly speaking restricted to the valley of that name and to the slopes of the mountains which encircle it. The length of this valley is 84 miles, and it varies in width from 20—25 miles. Its elevation above the sea averages about 6 000 ft. The territories in possession of the Maharajah of Kashmir include also Jamu on the south, and the more recently acquired countries of Astor, Gilgit, Baltistán and Ladák on the north and east. The total length of this tract of country, taken from S. E. to N. W., is nearly 400 miles and its breadth from S. W. to N. E. is 350 miles.

This whole region is essentially a mountainous one, the main ranges extending in more or less parallel lines from N. W. to S. E. There are several peaks rising to altitudes of over 20 000 ft. [1]), and some of the largest glaciers in the world are to be found in their vicinity. The position of those lofty snowy ranges stretching across the country has a most marked influence on the climate of the northern Kashmir territories, and consequently the different character of the vegetation is at once noticeable to anyone after crossing this high barrier of mountains in the direction of Gilgit Baltistán or Ladák. The same conditions prevail throughout the Himalayan region, where the outer ranges receive the bulk of the rainfall. The vegetation of these outer ranges varies considerably from N. W. to S. E. owing partly to the heavier rainfall in the Eastern Himalaya, and partly to the increase of temperature due to the lower latitude. The vegetation of the dry minor ranges is much more uniform in character all along the northern limits. There is one remarkable feature worthy of notice both in Kashmir and amongst the Himalayan ranges generally, and that is the preponderance of forest growth on the slopes facing the north. Valleys extending north and south, and situated within the limits of tree growth, are equally clothed with forests on either side, whilst those running west to east are usually almost bare of forests on their slopes which face the south. The appearance therefore of the Himalayan ranges to any observer looking toward the north is that of a succession of bare slopes, frequently fringed along their summits with a dark serrated line. This dark line consists of the projecting tops of the uppermost trees which compose the more or less dense forests extending all along the northern slopes. The sun's rays are too powerful within the latitude of Northern India to enable mosses and such like plants to clothe the southern slopes to any extent, and to this may partly be attributed the absence of forests on these warm sunny slopes; for it

[1]) An enormous mountain known as K^2 at the head of the Baltoro glacier is 28 265 ft., and Nanga Parbat near Astor is considerably over 26 000 ft.

is well known that mosses and other allied cryptogams play an important part in bringing about the conditions which favour the initiatory stages of forest vegetation».

I hope soon to have an opportunity of giving an account of the interesting collections from Sikkim mentioned above.

I am happy to state that my excellent friend, Dr. G. Venturi, has had the kindness to determine all the *Orthotricha*.

WEISIACEAE.

Hymenostylium Brid. — Mitt. Musc. Ind. or. p. 32.

Hymenostylium curvirostre (Ehrh.). Mitt.

Astor: in valle Gudhai 11—12 000′ (n. 12 725).

Baltistán: Chatpáni nullah 12—13 000′ (n. 14 443, f. foliis nervo dorso papilloso).

Hymenostylium commutatum Mitt. l. c. p. 32.

Astor: inter Astor et Dashkin 7—9 000′ (n. 12 863).

Anoectangium (Hedw.) Br. eur.

Anoectangium Duthiei Broth. n. sp.

Dioicum; caespitosum, caespitibus compactis, latis, usque ad 10 cm. altis, ochraceis, apice obscure viridibus; *caulis* erectus, fere ad apicem fusco-radiculosus, dense foliosus, superne fastigiatim ramosus; *folia* sicca incurva, humida patula, e basi ovali, ventricosa sensim angustata, acuta, c. 1,2 mm. longa, marginibus inferne revolutis, integerrimis, nervo crasso, cum apice evanido, dorso laevi, cellulis incrassatis, subquadratis, papillosis, basilaribus rectangularibus teneris laevibus; *bracteae perichaetii* internae e basi late vaginante, crenulata subito anguste acuminatae, nervo tenui, cellulis elongatis, laevibus; *seta* lateralis, 2 mm. alta, stricta, lutea; *theca* deoperculata asymmetrica, ovalis, macrostoma, fuscidula, nitidiuscula, gymnostoma. Caetera ignota.

Astor: Alampi Lá 14—16 000′ (n. 12 717).

With regard to the place this species should occupy in the system, I have had certain doubts. Habitually, it comes nearer to *Pleuroweisia* than to *Anoectangium*, and therefore I first thought it right to classify it among the

former genus, and called it *Pl. kashmirensis*. The form of the leaves, however, indicates an *Anoectangium*, and as far as I can judge from some very young capsules, the calyptra stretches as far as the middle of these. At any rate, it is an excellent species, which cannot be mistaken for any known before.

Weisia Hedw.

Weisia Wimmeriana (Sendtn.) Br. eur.
Kashmir: supra Gulmarg 10—11 000′ (n. 11 314).
Weisia rutilans (Hedw.) Lindb.
var. *himalayana* Broth. n. var.
Folia brevius aristata.
Kashmir: Gulmarg 10—12 000′ (n. 11 256), in trajectu Trágbal 9—10 000′.

Eucladium Br. eur.

Eucladium verticillatum (L.) Br. eur.
Chitral: Markandi 6 000′ (Harriss n. 16 943).

Dicranoweisia Lindb.

Dicranoweisia cirrata (L.) Lindb.
Kashmir: Gulmarg 8—9 000′ (n. 11 232), in valle Burzil prope Minimarg 10—11 000′ (n. 14 405) et supra Sarwán 10—12 000′ (n. 14 305), in valle Kamri 10—12 000′ (n. 12 794), Tájwáz nullah prope Sonamarg 9—10 000′ (n. 14 247), in valle Sangam supra Liddarwat 13—14 000′ (n. 14 253).
Gilgit: in valle Niltar 9—11 000′ (n. 12 816, 12 676, 12 819).
Astor: in valle Astor supra Doyen 9—12 000′ (n. 12 771, 12 830).
Baltistán: Rimochagma nullah 12—13 000′ (n. 12 706), Suk nullah in valle Drás 11—12 000′ (n. 12 761).
The above-mentioned specimens differ, in habitus, from the type, by being smaller, and, sometimes, more rigid. I did, however, not dare to set up a new species, not being able to find any certain characteristics.

Oncophorus Brid.

Oncophorus virens (Sw.) Brid.

Kashmir: Badzulkod nullah in valle Liddar 12—13 000′ (n. 14 190).

Gilgit: in valle Niltar 10—12 000′ (n. 12 812).

Baltistán: in valle Drás 11—12 000′ (n. 12 767), Chatpáni nullah 12—13 000′ (n. 14 440), Shátung Lá 13—15 000′ (n. 12 786, 12 788), Rimochagma nullah 13—14 000′ (n. 12 742).

var. *serratus* Br. eur.

Kashmir: in valle Balsór supra Chilam 11—12 000′ (n. 14 436, 14 438—39), in valle Burzil prope Minimarg 10—11 000′ (n. 14 366, 14 409), Ferozepur nullah prope Gulmarg 9—10 000′ (n. 11 380), in jugo Kájnág 11—12 000′ (n. 11 014—15).

Astor: Mushkin in valle Astor 9—10,000′ (n. 12 852, 12 858).

Baltistán: Marpu nullah 11—13 000′ (n. 12 745, 12 749, 12 753), Rimochagma nullah 12—13 000′ (n. 12 709), Shátung Lá 13—15 000′ (n. 12 792).

Oncophorus Wahlenbergii Brid.

Syn. Leptotrichum Wahlenbergii Musc. Ind. or. p. 12.

Kashmir: In valle Kishenganga prope Gurais 8—9 000′ (n. 14 324).

RHABDOWEISIACEAE.

Oreas Brid.

Oreas Martiana (Hopp. Hornsch.) Brid. — Musc. Ind. or. p. 58.

Kashmir: in valle Musjid 12—14 000′ (n. 14 374—75).

Oreoweisia de Not.

Oreoweisia laxifolia (Hook). Par.

Syn. Didymodon laxifolius Musc. Ind. or. p. 23.

Kashmir: in valle Musjid 12—13 000′ (n. 14 401).

Kájnág: Taltal nullah 12—13 000′ (n. 11 117 p. p.).

DICRANACEAE.

Anisothecium Mitt.

Anisothecium varium (Hedw.) Mitt.

Syn. Dicranella varia Schimp.

Kashmir: in valle Kishenganga prope Gurais 8 000′ (n. 14 431).

Dicranum Hedw.

Dicranum kashmirense Broth. n. sp.

Dioicum; gracile, caespitosum, caespitibus ad 6 cm usque altis, densis, lutescenti-viridibus, nitidis; *caulis* erectus, ferrugineo-tomentosus, dense foliosus, parce ramosus; *folia*, praecipue comalia, falcata, canaliculato-concava, e basi lanceolata subulata, marginibus erectis, superne argute serratis, nervo basi c. 0,10 mm. lato, cum apice vel paulum infra apicem evanido, superne dorso alato, alis duabus, argute serratis, cellulis inferioribus linearibus, inter se porosis, superioribus subrhomboideis, alaribus magnis, numerosis, fusco-aureis; *bracteae perichaetii* e basi longe vaginante subito loriformiter acuminatae, integrae, nervo tenui; *seta* 2 cm. alta, tenuissima, stricta, sicca superne dextrorsum torta, lutea, demum rubella; *theca* arcuatula, subcylindrica, vix strumosa, castanea, laevis; *annulus* 0; *peristomium* simplex; *exostomii* dentes c. 0,5 mm. longi et c. 0,06 mm. lati, purpurei, paulum infra medium bifidi, cruribus inaequalibus; *spori* 0,015—0,020 mm., virides, papillosi; *operculum* rostratum, rostro thecam aequante vel paulum superante, obliquo, recto vel curvatulo; *calyptra* ad medium thecae producta, pallida, apice fuscidula, laevis.

Kashmir: Gulmarg, ad arbores 8—9 000′ (n. 11 227, 12 670, 12 825, 12 867—68, 14 283) in valle Gurais 8—9 000′ (n. 12 781), in trajectu Trágbal 8—9 000′ (n. 14 429), in valle Sind prope Sonamarg (n. 11 528), in valle Kishenganga 8—9 000′ (n. 12 697, 14 325), in valle Burzil supra Sarwán 10—12 000′ (n. 14 307) et prope Minimarg 9—10 000′ (n. 14 344), in valle Liddar prope Budzulkod nullah 12 000′ (n. 14 210), supra Pálgam 9—10 000′ (n. 14 393) et prope Sonsal nullah 13—14 000′ (n. 14 199).

Kájnág: Taltal nullah (n. 11 119).

Ex affinitate *D. scoparii* (L.) et *D. lorifolii* Mitt., ab hoc theca arcuatula, ab illo statura minore, foliis laxius areolatis, seta tenuissima nec non theca minore, angustiore dignoscendum.

It is only after much hesitation that I have proposed this species, as it seems rather curious to me that a species evidently so common could have escaped the attention of earlier explorers. The only species described earlier, with which it might be identical, is *D. lorifolium* Mitt. Musc. Ind. or. p. 15. As Mr. Mitten, however, states that the fruit of this species is erect, this being the case also with the specimens in my possession, I cannot but consider *D. kashmirense* to be identical with *D. lorifolium*.

Dicranum scoparium (L.) Hedw.

Kashmir: Gulmarg 10—11 000′ (n. 11 360), in valle Kishanganga prope Gurais 8—9 000′ (n. 12 698, 14 326), in valle Liddar supra Pálgam 9—10 000′ (n. 14 392).

Dicranum montanum Hedw.

Kájnág: Taltal nullah 12—13 000′ (n. 11 114). Sterile.

FISSIDENTACEAE.

Fissidens Hedw.

Fissidens crassipes Wils.

Kashmir: in trajectu Trágbal 9—10 000′.

Fissidens bryoides (L.) Hedw.

var. *Hedwigii* Limpr.

Kashmir: in valle Kishenganga prope Kajliban 8—9 000′ (n. 12 692).

Fissidens cristatus Wils. — Musc. Ind. or. p. 137.

Kashmir: in valle Liddar supra Pálgam 8—9 000′ (n. 14 229).

Fissidens grandifrons Brid. — Musc. Ind. or. p. 138.

Kashmir: in valle Sind 7—8 000′ (n. 11 477) et in valle Burzil 8—9 000′ (n. 14 015). Sterilis.

DITRICHACEAE.

Ceratodon Brid.

Ceratodon purpureus (L.) Brid.

Kashmir: in valle Kishenganga prope Kajliban 8—9 000′ (n. 12 693), Gulmarg 8—9 000′ (n. 12 894).

Ceratodon stenocarpus Mont.

Syn. Didymodon stenocarpus Musc. Ind. or. p. 24.

Kashmir: in trajectu Trágbal 9—10 000′ (n. 14 441), in valle Kishenganga prope Gurais 8—9 000′ (n. 12 803, 14 317, 14 319), Gulmarg 8—9 000′ (n. 11 237, 11 405, 13 030), in valle Karzeh supra Tilail 10—11 000′ (n. 14 272).

Ditrichum Timm.

Ditrichum glaucescens (Hedw.) Hamp.

Astor: in valle Astor supra Doyen 9—12 000′ (n. 12 826 p. p.), Alampi Lá 14—16 000′ (n. 12 719 p. p.

Distichium Br. eur.

Distichium capillaceum (Sw.) Br. eur.

Syn. Leptotrichum capillaceum Musc. Ind. or. p. 10.

Kashmir: supra Gulmarg 10—12 000′ (s. n.), in valle Kargeh supra Tilail 13—14 000′ (n. 14 262), Tájváz nullah prope Sonamarg 9—10 000′ (n. 14 248—49), in valle Liddar prope Badzulkod nullah 12—13 000′ (n. 14 191) et Sonsal nullah 13—14 000′ (n. 14 202, 14 206), in valle Burzil prope Minimarg 10—11 000′ (n. 14 372), Burzil Pan 13 000′ (n. 14 348), in valle Kishenganga prope Gurais 7—8,000′ (n. 12 694) in trajectu Yamháru 13—14 000′ (n. 14 258), in valle Musjid 12—14 000′ (n. 13 254, 14 378, 14 394, 14 396), in valle Kolahoi supra Liddarwat 9—12 000′ (n. 14 213, 14 216), in valle Kamri prope Kálapáni 10—12 000′ (n. 12 793) et in trajectu Kamri 11—13 000′ (n. 12 797), in jugo Kájnág 11—12 000′ (n. 11 017).

Gilgit: in valle Niltar 6—9 000′ (n. 12 805) et 9—12 000′ (n. 12 675, 12 811).

Astor: Mushkin in valle Astor 9—10 000′ (n. 12 847) et supra Doyen 9—12 000′ (n. 12 770), inter Astor et Dashkin 7—9 000′ (n. 12 864), in valle Chugám 8—9 000′ (n. 12 840), Alampi Lá 14—16 000′ (n. 12 721).

Baltistán: Marpu nullah 11—13 000′ (n. 12 746) et 13—15 000′ (n. 12 742 p. p.), Lamchan nullah supra Drás 11—12 000′ (n. 14 285), in valle Drás 11—12 000′ (n. 11 657) et Suk nullah 11—12 000′ (n. 12 757), Satpur nullah prope Skárdu 10—13 000′ (n. 12 872), in valle Shatang 8—11 000′

(n. 12 732), Rimochagma nullah 12—13 000′ (n. 12 708) et in valle Rimochagma 13—14 000′ (n. 12 737).

var. *brevifolium* Br. eur.

Kashmir: in valle Kargeh supra Tilail 13—14 000′ (n. 14 262 p. p.).

Distichium inclinatum (Ehrh.) Br. eur.

Syn. Leptotrichum inclinatum Musc. Ind. or. p. 10.

Kashmir: in valle Kurzeh supra Tilail 13—14 000′ (n. 14 264), in valle Liddar prope Shisha nág 12—13 000′ (n. 13 341), in valle Kamri 10—12 000′ (n. 12 796), in valle Sind prope Baltal 10—11 000′ (n. 11 633).

Baltistán: Rimochagma nullah 12—13 000′ (n. 12 705).

POTTIACEAE.

Timmiella (de Not.) Limpr.

Timmiella anomala (Br. eur.) Limpr.

Syn. Tortula anomala Musc. Ind. or. p. 28.

Kashmir: Limbar nullah in jugo Kájnág 7—8 000′ (n. 11 139).

Kájnág: Taltal nullah 8—9 000′ (n. 11 112 p. p.).

Gilgit: in valle Niltar 6—9 000′ (n. 12 806).

Chitral: in valle Dir (Harriss n. 16 921), in trajectu Lowari 10 500′ (n. 16 952), Jambatai 6 000′ (n. 16 942), Bundai 4 000′ (n. 16 917) et Mirza 9 000′ (n. 16 947).

Tortella (C.-Müll.) Limpr.

Tortella tortuosa (L.) Limpr.

Syn. Barbula tortuosa W. M.

Kashmir: prope Gurais 7—8 000′ (n. 12 700), Sonsal nullah in valle Liddar 13—14 000′ (n. 14 203). Sterilis.

Tortella fragilis (Drumm.) Limpr.

Syn. Tortula Drummondii Musc. Ind. or. p. 27.

Astor: Alampi Lá 14—16 000′ (n. 12 719 p. p.). Sterilis.

Barbula Hedw.

Barbula rubella (Hoffm.) Mitt.

Syn. Weissia recurvirostris Musc. Ind. or. p. 27.

Kashmir: in valle Kishenganga prope Gurais 8 000′ (n. 14 338 p. p.), prope Sonamarg 8—9 000′ (n. 14 240), prope Gulmarg 8—9 000′ (n. 11 402), in valle Musjid 12—13 000′ (n. 14 395), in valle Liddar supra Tanin 10—11 000′ (n. 13 306) et prope Shisha nág 12—13 000′ (n. 14 380 p. p.), in valle Jhelam prope Pirni 5—6 000′ (n. 10 912), in jugo Kájnág 10—12 000′ (n. 10 995—7, 10 980).

Kájnág: Limbar nullah 10—11 000′ (n. 11 063).

Chitral: Burdai 8 000′ (Harriss n. 16 926), Dir 10 000′ (n. 16 959 p. p.) et Guger 9 500′ (n. 16 904).

Astor: in valle Astor supra Doyen 9—12 000′ (n. 12 772).

Baltistan: Marpu nullah supra Drás 11—13 000′ (n. 12 886).

Barbula alpigena (Vent.).

Syn. Didymodon alpigenus Vent. Rev. bryol. 1879, p. 53.

Chitral: Dir 10,000′ (Harriss n. 16 959 p. p.). Sterilis.

Astor: Mushkin in valle Astor 9—10 000′ (n. 12 849). Sterilis.

Desmatodon Brid.

Desmatodon latifolius (Hedw.) Brid. — Musc. Ind. or. p. 37.

Kashmir: in trajectu Yamháru 13—14 000′ (n. 14 259), Sonsal nullah in valle Liddar 12—13 000′ (n. 13 342), supra Kainmul 11—12 000′ (n. 13 112 p. p.).

Astor: in valle Gudhai 11—12 000′ (n. 12 735).

Baltistán: Marpu nullah 13—14 000′, Bari Lá 15 000′ (n. 12 876), Rimochagma nullah 13—14 000′ (n. 12 739), Suk nullah in valle Drás 11—12 000′ (n. 12 756 p. p.), Deosai prope lacum Sheosár 12—13 000′ (n. 14 298).

Chitral: Guger 9 500′ (Harriss n. 16 903).

var. *muticus* Brid.

Baltistán: Suk nullah in valle Drás 11—12 000′ (n. 12 756).

Tortula Hedw.

Tortula atrovirens (Sm.) Lindb.

Kashmir: Pirni in valle Jhelam 5—6 000′ (n. 10 922).

Tortula inermis (Brid.) Mont.

Syn. Desmatodon inermis Musc. Ind. or. p. 37.

Kashmir: Tahti Suleiman 5—6 000′ (n. 10 834).

Chitral: Bundai 4 000′ (Harriss n. 16 918) et Ashreth 5—6 000′ (n. 16 901).

Tortula subulata (L.) Hedw.

Kájnág: Limbar nullah 7—8 000′ (n. 11 139).

Tortula ruralis (L.) Ehrh.

Syn. Syntrichia ruralis Musc. Ind. or. p. 39.

Kashmir: in valle Burzil prope Minimarg 10—11 000′ (n. 14 357). Sterilis.

Baltistán: Bari Lá 15 000′ (n. 12 880 p. p.). Sterilis.

Tortula montana (Nees.) Lindb.

Chitral: Ashreth 5—6 000′ (Harriss n. 16 902).

GRIMMIACEAE.

Cinclidotus Palis.

Cinclidotus acutifolius Broth. n. sp.

Dioicus; caespitosus, caespitibus rigidis, densis, late extensis, atroviridibus, haud nitidis; *caulis* dichotome ramosus, ramis plerumque densissime ramulosis, ramulis patulis, brevissimis, dense foliosis; *folia* sicca imbricata, humida erecto-patentia, apice recurvatula, carinato-concava, elongate ligulata, acuta, marginibus erectis, integerrimis, limbata, limbo incrassato, c. 5-seriato, nervo crasso, basi c. 0,10 mm. lato, cum apice evanido, cellulis basilaribus breviter rectangularibus, caeteris rotundato-hexagonis, 0,010—0,015 mm., chlorophyllosis, laevissimis; *bracteae perichaetii* majores, basi semivaginante longiore, cellulis basilaribus angustioribus, teneris; *seta* 7 mm. alta, stricta, crassa, sicca dextrorsum torta, lutea; *theca* erecta, oblonga, asymmetrica, sordide fuscescenti-lutea, sicca

corrugata; *annulus* 0; *peristomium* simplex; *exostomii* dentes rubelli, usque ad basin liberi, divisionibus filiformibus 2—4, basi trabeculis inter se connexis, glabris; *spori* 0,025—0,030 mm., olivacei, papillosi; *operculum* elongate conicum, acutum; *calyptra* fusca, dimidiam partem thecae obtegens.

Planta mascula perigoniis acrogenis.

Kashmir: prope Gurais 8—9 000′ (n. 12 701).

Species a *C. riparia* (Host) Arn. proxima rigiditate foliisque acutis nec obtusis, mucronatis facillime dignoscenda.

Grimmia Ehrh.

Grimmia commutata Hüb. — Musc. Ind. or. p. 44.

Srinagar: Tahti Suleiman 5—6 000′ (n. 10 830).

Kájnág: Limbar nullah 7—8 000′ (n. 11 136).

Chitral: Mirza (Harriss n. 16 951) et in trajectu Lowari 10 500′ (n. 16 953).

Grimmia leucophaea Grev. — Musc. Ind. or. p. 43.

Chitral: Bundai 8 000′ (n. 16 928).

Grimmia pulvinata (L.) Sm.

Chitral: Chakdára (Harriss n. 16 961).

ORTHOTRICHACEAE.

Amphidium (Nees.) Schimp.

Amphidium lapponicum (Hedw.) Schimp.

Kashmir: prope Gulmarg 8—9 000′ (n. 11 398), in valle Burzil prope Minimarg 10—11 000′ (n. 14 355, 14 365, 14 371), in valle Musjid 12—13 000′ (n. 13 215), Chatponsal nullah in valle Liddar 11—12 000′ (n. 14 373).

Kájnág: Taltal nullah 12—13 000′ (n. 11 109).

Gilgit: in valle Niltar 9—11 000′ (n. 12 672, 12 820).

Astor: in valle Kamri 10—11 000′ (n. 12 836), in valle Chugám 8—9 000′ (n. 12 837), Alampi Lá 14—16 000′ (n. 12 715—16, 12 718).

Baltistán: in valle Karpuchi 13—14 000′ (n. 12 871), Suk nullah in valle Drás 11—12 000′ (n. 12 763).

Chitral: Ashreth 5—6 000′ (Harriss n. 16 898), Ziárat 10 000′ (n. 16 954) et Mirza 9 000′ (n. 16 946).

Drummondia Hook.

Drummondia Thomsoni Mitt. — Musc. Ind. or. p. 46.

Kashmir: Limbar nullah in jugo Kájnág 7—8 000′ (n. 11 133).

Astor: in valle Astor 8—9 000′ (n. 12 713).

Chitral: in valle Dir (Harriss n. 16 919).

Orthotrichum Hedw.

Orthotrichum anomalum Hedw. — Musc. Ind. or. p. 48.

Kashmir: in valle Jhelam prope Pirni 5—6 000′ (n. 10 910—11), prope Gulmarg 8—9 000′ (n. 12 668).

Astor: in valle Astor inter Doyen et Harcho 9—11 000′ (n. 12 845).

Baltistán: Suk nullah in valle Drás 11—12 000′ (n. 12 759).

Chitral: Mirza (Harriss n. 16 951 p. p.) et in trajectu Lowari 10 500′ (n. 16 953 p. p.).

Orthotrichum Duthiei Vent. n. sp. in Rev. Br. 1896, p. 27.

»Caespites pulvinantes, atrovirides, rupincoli, 2 ad 3 cm alti. Folia e basi ovata elongato-lanceolata, acuminata, monostromatica, cum margine ad apicem usque reflexo; nervus in apice solutus; areolatio superne e cellulis ovato-hexagonis bene distinctis, 8—10 microm. latis, ad basim versus elongatis quadrangulis composita; superficies cellularum cum 2 vel 3 papillis prominentibus vel furcatis. — Folia perichaetii longiora, basi latiora et longius acuminata. Capsula emergens, cum collo brevi ovato-oblonga vel cylindrica, 1,5 mm attingens; pedicellus 1,5 mm longus, cum vaginula nuda cylindracea et cum ochrea brevi. Pericarpium cum 8 striis flavis e 4 cellularum seriebus compositis; stomata immersa et fere clausa ad sporangii basim. Annulus adnatus e bina cellularum serie. Operculum e basi conica apiculatum. Calyptra parce pilosa, flavo-virens, sporangium obtegens. Peristomium sine praeperistomio, siccitate erectum vel divergens, duplex; dentes externi 8, tandem in linea mediana soluti; crures dentium pallescentes, in superficie exteriore minute sed distincte papillosi; stratus interior longitudinaliter lineolatus et lineolae saltem in apice distinctae. Cilia 8 filiformia, flavescentia, e bina cellularum serie composita. Sporae minutae, 6—8 microm. metientes«.

Kashmir: Gulmarg 8—9 000′ (n. 11 241).

Orthotrichum Schubartianum Lor.

var. *himalayanum* Vent. Rev. Br. 1895, p. 53.

»Touffes denses d'un vert foncé; tiges ramifiées-fastigiées, d'une longueur de 2 à 3 cent.; feuilles lancéolées, très aiguës, plus longues et plus denses au sommet des rameaux, étalées-arquées à l'état humide avec les bords révolutés; aréolation de la moitié supérieure hexagonale avec les cellules remplies de chlorophylle et faiblement papilleuses; capsule immergée, largement pyriforme, la partie supérieure aussi longue que large, avec 16 bandes, chacune de deux séries de cellules; le col de la longueur du sporange et défluent dans le pédicelle, muni de stomates profonds et presque couverts par les cellules environnantes; pédicelle de la longueur du col, couvert de l'ochrea, provenant de la vaginule ovale munie de poils jaunes papilleux; anneau double, persistant. Exostome composé de 16 dents jaunes, dressées à l'état sec, entières, mais avec les bords sinuolés, sans lamelles extérieures qui pourtant peuvent être couvertes par l'anneau; surface des dents papilleuses à la base, vers la pointe avec des papilles mêlées à des linéoles très peu prononcées; endostome composé de 8 cils jaunes, lisses, longs comme l'exostome, composés de deux séries de cellules; opercule plan, rostellé; coiffe pâle, hémisphérique, couvrant le sporange et munie de poils jaunes dressés; spores d'un diamètre de 12 à 13 microm.»

Kashmir: Liddarwat in silva 9—10 000′ (n. 14 219).

Orthotrichum alpestre Hornsch.

Kashmir: in valle Gudhai 11—12 000′ (n. 12 728), in valle Kishenganga prope Gurais 8 000′ (n. 14 434).

var. *dilatatum* Vent. n. var.

»Folia obtusa, lata.» Venturi in litt.

Kashmir: in valle Kishenganga prope Gurais 8 000′ (n. 13 988), in valle Kargeh 10—11 000′ (n. 14 271), in valle Burzil supra Garwán 10—12 000′ (n. 14 303).

Orthotrichum fastigiatum Bruch. — Musc. Ind. or. p. 48.

Kashmir: in valle Kishenganga prope Gurais 7—8 000′ (n. 14 343).

Orthotrichum rupestre Schleich. — Musc. Ind. or. p. 48.

Kashmir: in valle Burzil prope Minimarg 10—11 000′ (n. 14 364, 14 369).

Baltistán: prope Shátung Lá 13—15 000′ (n. 12 789).

Astor: in valle Gudhai 11—12 000′ (n. 12 724).

Orthotrichum Sturmii Hornsch.

Astor: in valle Astor 7—9 000′ (n. 12 842).

Orthotrichum Schlotthaueri Vent. Botan. Centralbl. 1890, n. 51.

Astor: in valle Astor supra Doyen 9—12 000′ (n. 12 829).

Baltistán: Bari Lá 15 000′ (n. 12 878).

Orthotrichum speciosum Nees. — Musc. Ind. or. p. 48.

Kashmir: in valle Gurais 8 000′ (n. 14 312).

Orthotrichum leiocarpum Br. eur.

Kashmir: Gulmarg, ad truncum *Piceae excelsae* 8—9 000′ (n. 11 230), in valle Liddar infra Liddarwat 9—10 000′ (n. 14 233).

Orthotrichum virens Vent. n. sp.

»Pulvinuli vix 2 cm alti, densi, fastigiati, intense virides; folia e basi ovata lanceolata, apice rotundata, ligulata; areolatio e cellulis densis chlorophyllosis rotundato-angulosis, 10—13 microm. metientibus, papillis brevibus simplicibus notatis. Folia perichaetii latiora, basi 0,75 mm lata, 2 mm longa, apice rotundato-ligulata. Flores masculi complures in ramulo proprio. Vaginula nuda, brevissima; ochrea crasse papillosa. Capsula vix apice foliis obtecta emergens, ovato-elongata, cum collo in pedicellum brevissimum defluens. Striae 8 e 4 seriebus cellularum, annulus duplex persistens. Stomata immersa et fere clausa. Peristomium duplex flavum: dentes externi 8 bigeminati integri apice fenestrati, superne papillis in lineolis dispositis, inferne dense et minute papillosi; cilia 8 laevia, cum ciliis intermediis minoribus. Spori 13—14 microm. metientes. Calyptra omnino laevis flava.

Species *O. pallenti* et *O. Rogeri* affinis, ab hoc sporis minoribus, ab illo stomatibus immersis, ab ambabus foliorum forma dignoscenda.» Venturi in litt.

Kashmir: in valle Kargeh supra Tilail 10—11 000′, ad truncum *Salicis* (n. 14 235).

Orthotrichum venustum Vent. n. sp.

»Pulvinuli virescentes 1 cm alti; folia e basi ovata lanceolata acuminata, marginibus ad apicem fere revolutis; cellulis superne rotundato-hexagonis 7—9 microm. papillis simplicibus vel furcatis acutis, basin versus elongatis quadrangulis parietibus haud incrassatis; folia perichaetii ab aliis vix diversa. Capsula immersa pyriformis collo sporangii longitudine raptim in pedicello constricto; pedicellus brevissimus, vaginula nuda, ochrea brevis pedicellum obtegens. Striae 8 flavae e 4 seriebus cellularum compositae; stomata ad basin capsulae, immersa, non bene clausa. Dentes externi 8 in linea media fissi, cruribus etiam in linea divisurali lacunosis, inferne papillis densis et minutis e medio ad apicem lineas serpentinas efficientibus. Cilia 8 e seriebus cellularum duabus composita. Calyptra campanulata pallida pilosa.

Species *O. alpestri* affinis, sed capsulae forma nec non peristomii structura dignoscenda.» Venturi in litt.

Kashmir: prope Gulmarg 8—9 000′ (n. 11 404).

ENCALYPTACEAE.

Encalypta Schreb.

Encalypta vulgaris (Hedw.) Hoffm. — Musc. Ind. or. p. 40.
Kashmir: in valle Jhelam prope Pirni 5—6 000′ (n. 10 918).
Baltistán: Satpur nullah prope Skárdu 10—13 000′ (n. 12 874).
Encalypta tibetana Mitt. Musc. Ind. or. p. 42.
Pamir: sine loco designato 13—14 000′ (n. 17 801).
Gilgit: in valle Niltar 9—11 000′ (n. 12 677).
Encalypta rhabdocarpa Schwaegr. — Musc. Ind. or. p. 42.
Baltistán: Bari Lá 15 000′ (n. 12 880).
var. *leptodon* (Bruch.) Limpr.
Gilgit: in valle Niltar 10—11 000′ (n. 12 673).
Encalypta commutata Br. germ. — Musc. Ind. or. p. 42.
Astor: in valle Astor supra Doyen 9—12 000′ (n. 12 828), in valle Gudhai 11—12 000′ (n. 12 726).
Encalypta ciliata (Hedw.) Hoffm. — Musc. Ind. or. p. 42.
Kashmir: in valle Liddar supra Kainmul 11—12 000′ (n. 14 389) et Sonsal nullah 13—14 000′ (n. 14 205).
Encalypta contorta (Wulf.) Lindb.
Gilgit: in valle Niltar 10—11 000′ Sterilis.

SPLACHNACEAE.

Tayloria Hook.

Tayloria Froelichiana (Hedw.) Mitt.
Syn. Dissodon Froelichianus Grev. Arn.

Kashmir: in valle Kargeh supra Tilail 13—14 000′ (n. 14 263, 14 265), in trajectu Burzil 13 000′ (n. 14 349).

FUNARIACEAE.

Funaria Schreb.

Funaria hygrometrica (L.) Sibth. — Musc. Ind. or. p. 56.

Kashmir: in valle Gurais 8—9 000′ (n. 12 860), in valle Kishenganga prope Kajliban 8—9 000′ (n. 12 695), prope Gulmarg 8—9 000′ (n. 12 669, 12 895), Gumbliáli 7—8 000′ (n. 11 164) et 10—11 000′ (n. 11 189), in valle Burzil prope Minimarg 10—11 000′ (n. 14 413), Pirni in valle Jhelam 5—6 000′ (n. 10 913, 10 925), in jugo Kájnág 11—12 000′ (n. 10 992).

Gilgit: in valle Niltar 6—9 000′ (n. 12 807).

Astor: in valle Gudhai 12 000′ (n. 12 723).

Baltistán: in valle Shagarthang 8—11 000′ (n. 12 733), in valle Shingo 10—11 000′ (n. 12 882).

Chitral: Bundai 4 000′ (Harriss n. 16 922) et Drosh 8 000′ (n. 16 923).

Funaria (Eufunaria) capillipes Broth. n. sp.

Autoica; caespitosa, caespitibus humilibus, mollibus, laete viridibus; *caulis* 3—4 mm altus, infima basi fusco-radiculosus, simplex; *folia* inferiora minuta, comalia multo majora, patentia, concaviuscula, oblongo-spathulata, obtusiuscula, apiculata, marginibus integerrimis, elimbata, nervo viridi, infra summum apicem evanido, cellulis laxis, ovali- vel oblongo-hexagonis, basilaribus elongate rectangularibus, omnibus parce chlorophyllosis; *seta* 3 cm alta, tenuissima, sicca superne dextrorsum torta, lutea, nitidiuscula; *theca* erecta, subsymmetrica, pyriformis, cum collo thecam aequante c. 3 mm alta, microstoma, sicca tenuiter plicata, pallide fusco-lutea, nitidiuscula; *annulus* duplex, revolubilis; *peristomium* duplex; exostomii dentes lanceolato-subulati, obliqui, purpurei, apice hyalini; *endostomium* luteum, processus dentibus aequilongi; spori $0{,}_{020}$—$0{,}_{022}$ mm, ferruginei; *operculum* minutum, $0{,}_{7}$ mm diam., plano-convexum, cellulis spiraliter dispositis. *Calyptra* ignota.

Kashmir: in valle Sind prope Sonamarg 8—9 000′ (n. 14 236—37).

Species distinctissima, seta tenuissima nec non theca symmetrica, erecta facillime dignoscenda.

BRYACEAE.

Mielichhoferia Hornsch.

Mielichhoferia himalayana Mitt. — Musc. Ind. or. p. 65.

Astor: Alampi Lá 14—16 000′ (n. 12 719).

Leptobryum (Br. eur.) Wils.

Leptobryum pyriforme (L.) Wils.

Syn. Webera pyriformis Musc. Ind. or. p. 66.

Kashmir: in valle Gurais 8—9 000′ (n. 12 801 p. p.).

Astor: in valle Astor supra Doyen 9—12 000′ (n. 12 773).

Baltistán: Rimochagma nullah 12—13 000′ (n. 12 710), Chatpáni nullah prope Drás 12—13 000′ (n. 14 441) et in valle fl. Indus prope Katzura 8—9 000′ (n. 12 729).

Pohlia Hedw.

Pohlia elongata Hedw.

Syn. Webera elongata Musc. Ind. or. p. 65.

Kashmir: in valle Burzil prope Minimarg 10—11 000′ (n. 14 353, 14 404), in valle Liddar supra Kainmul 11—12 000′ (n. 13 111, 13 153), Kainmul nullah 9—10 000′ (n. 13 167)′ et supra Pilgam 9—10 000′ (n. 13 093), in valle Musjid 12—13 000′ (n. 14 397), Gulmarg 8—12 000′ (n. 11 311, 12 679), in valle Kishenganga prope Gurais 8—9 000′ (n. 14 320).

Pohlia polymorpha Hopp. Hornsch.

Syn. Webera polymorpha Musc. Ind. or. p. 65.

Kashmir: supra Gulmarg 10—12 000′, Tájwáz nullah prope Sonamarg 9—10 000′ (n. 14 246), Kainpatri nullah prope Zoji Lá 12 000′ (n. 14 257), Sonsal nullah in valle Liddar 12—13 000′ (n. 14 384).

Gilgit: in valle Niltar 10—12 000′ (n. 12 809).

Astor: in valle Gudhai 11—12 000′ (n. 12 727).

Baltistán: Marpu nullah supra Drás 11—15 000′ (n. 12 742, 12 887), Suk nullah in valle Drás 11—12 000′ (n. 12 762 p. p.), Shátung Lá 13—15 000′ (n. 12 791), Deosai prope lacum Sheosár 12—13 000′ (n. 14 289—92, 14 302).

var. *brachycarpa* (Hopp. Hornsch).

Astor: Alampi Lá 14—16 000′ (n. 12 719 p. p.).

Baltistán: Rimochagma nullah 13—14 000′ (n. 12 740), in valle Drás 11—12 000′.

Pohlia longicollis (Sw.) Lindb.

Syn. Webera longicolla Hedw.

Kashmir: in valle Liddar prope Budzulkod nullah 12 000′ (n. 14 211) et prope Sonsal nullah 13—14 000′ (n. 14 194 p. p.).

Kájnág: Taltal nullah 12—13 000′ (n. 11 115—16, 11 117 p. p.).

Astor: in valle Astor supra Doyen 9—12 000′ (n. 12 831).

Pohlia cruda (L.) Lindb.

Syn. Webera cruda Musc. Ind. or. p. 66.

Kashmir: supra Gulmarg 10—12 000′, in valle Burzil prope Minimarg 10—11 000′ (n. 14 353, 14 407), Limbar nullah in jugo Kájnág 7—8 000′ (n. 11 134).

Kájnág: Taltal nullah 11—12 000′ (n. 11 125).

Astor: in valle Astor supra Doyen 9—12 000′ (n. 12 779, 12 833).

Baltistán: Marpu nullah 13—15 000′ (n. 12 742 p. p.).

Chitral: Mirza 9 000′ (Harriss n. 16 945), Broz 7 000′ (n. 16 956) et Ziárat 9 000′ (n. 16 932).

Pohlia nutans (Schreb.) Lindb.

Syn. Webera nutans Hedw.

Kashmir: Gulmarg 8—9 000′ (n. 11 247), in valle Burzil prope Minimarg 9—11 000′ (n. 14 346, 14 353 p. p.) et supra Sarwán 10—12 000′ (n. 14 309), in valle Kishenganga prope Gurais 8—9 000′ (n. 14 321).

var. *bicolor* (Hopp. Hornsch.).

Baltistán: Deosai prope lacum Sheosár 12—13 000′ (n. 14 295).

Pohlia cucullata (Schwaegr.) Bruch.

Syn. Webera cucullata Schimp.

Baltistán: Deosai prope lacum Sheosár 12—13 000′ (n. 14 295 p. p.).

Pohlia gracilis (Schleich.) Lindb.

Syn. Webera gracilis De N.

Baltistán: Suk nullah in valle Drás 11—12 000′ (n. 12 764), in valle Karpuchu 13—14 000′ (n. 12 869), Bari Lá 15 000′ (n. 12 877).

Mniobryum (Schimp.) Limpr.

Mniobryum albicans (Wahlenb.) Limpr.

Syn. Webera albicans Musc. Ind. or. p. 66.

Kashmir: in valle Kamri prope Kálapáni 11—12 000′ (n. 12 834), Burzil Pan 13 000′ (n. 14 347).

Astor: inter Astor et Dashkin 7—9 000′.

Baltistán: Suk nullah in valle Drás 11—12 000′ (n. 12 754).

Bryum Dill.

Bryum pendulum (Hornsch.) Schimp.

Syn. Br. cernuum Musc. Ind. or. p. 71.

Pamir: in reg. alp. 13—14 000′ (Alcock n. 17 799 p. p.).

Bryum cernuum (Sw.) Lindb.

Syn. Br. uliginosum Br. eur.

Pamir: in reg. alp. 13—14 000′ (Alcock n. 17 799 p. p.).

Bryum affine (Bruch) Lindb.

Syn. Br. cuspidatum Schimp.

Kashmir: in valle Kargeh supra Tilail 10—11 000′ (n. 14 276), in jugo Kájnág 11—12 000′ (n. 10 992 p. p.).

Baltistán: Lamchan nullah supra Drás 11—12 000′ (n. 14 284).

Bryum cirratum Hopp. Hornsch.

Baltistán: Marpu nullah supra Drás 11—13 000′, Rimochagma nullah 12—13 000′ (n. 12 710 p. p.).

Bryum pallescens Schleich.

Kashmir: Tájwáz nullah prope Sonamarg 9—10 000′ (n. 14 250 a), Limbar nullah in jugo Kájnág 7—8 000′ (n. 11 138) et in trajectu Kamri 11—13 000′ (n. 12 798).

Gilgit: in valle Niltar 9—11 000′ (n. 12 814, 12 818 p. p.).

Baltistán: in valle Shagarthang 8—11 000′ (n. 12 732).

Bryum tibetanum Mitt. — Musc. Ind. or. p. 72.

Kashmir: Sonsal nullah in valle Liddar 13—14 000′ (n. 14 200), Ferozepur nullah prope Gulmarg, ad rupes irrorates 10—11 000′ (n. 11 377).

Baltistán: Suk nullah in valle Drás 11—12 000′ (n. 12 762).

Bryum caespiticium L. — Musc. Ind. or. p. 71.

Kashmir: Gulmarg 8—9 000′ (n. 11 236, 11 249, 11 254) et 10—11 000′ (n. 11 319), Gumbliáli 10—11 000′ (n. 11 169, 11 190), Bába marishi 7—8 000′ (n. 12 679), in valle Kamri 10—12 000′ (n. 12 795).

Kájnág: Limbar nullah 9—10 000′ (n. 11 061), Taltal nullah 8—9 000′ (n. 11 128).

Astor: Mushkin in valle Astor 9—10 000′ (n. 12 853).

Gilgit: in valle Niltar 9—11 000′ (n. 12 817 p. p.).

Baltistán: Rimochagma nullah 14 000′ (n. 12 729).

Bryum capillare L.

Kashmir: Gulmarg (n. 11 421).

Bryum (Eubryum) evanidinerve Broth. n. sp.

Dioicum; gracile, caespitosum, caespitibus densissimis, mollibus, humilibus, lutescenti-viridibus, nitidis; *caulis* ad 1 cm usque altus, erectus, basi fusco-radiculosus, dense foliosus, ramosus; *folia* sicca imbricata, humida erecto-patentia, concava, oblongo-lanceolata, acuta vel obtusinscula, marginibus erectis, integerrimis, summo apice denticulis nonnullis praeditis, nervo tenui, infra summum apicem evanido, cellulis teneris, laxis, superioribus rhomboideis, marginalibus angustis, limbum indistinctum efformantibus, basilaribus rectangularibus, infimis subquadratis. Caetera ignota.

Kashmir: distr. Kajnág, Taltal nullah ad rupes 8—9 000′ (n. 11 124).

Species *Br. Mühlenbeckii* Br. eur. affinis, sed nitore foliisque marginibus erectis jam dignoscenda, a *Br. alpino* et *Br. Mildeano* foliis nervo infra apicem evanido faciliter distinguenda.

Bryum argenteum L. — Musc. Ind. or. p. 69.

Kashmir: Gulmarg 8—9 000′ (n. 14 280), in valle Liddar supra Kainmul 11—12 000′ (n. 13 152).

Chitral: Bundai 4 000′ (Harriss n. 16 916).

var. *lanatum* (Palis.) Br. eur.

Kájnág: Taltal nullah 8—9 000′ (n. 11 123). Sterile.

Bryum (Eubryum) kashmirense Broth. n. sp.

Dioicum; gracile, caespitosum, caespitibus laxis, humilibus, pallide fuscescenti-viridibus; *caulis* 3 mm. altus, basi fusco-radiculosus, apice dense foliosus, innovationibus pluribus, brevibus julaceis; *folia* imbricata, concava, ovata, breviter acuminata, marginibus erectis, integerrimis, nervo crasso, rufescente, cum vel infra apicem evanido, cellulis teneris, laxis, rhomboideis, basilaribus subrectangularibus, marginalibus angustioribus; *seta* 15 mm. alta, flexuosula, rubra; *theca* pendula, turgide ovalis, collo brevi et crasso, sanguinea, exothecii cellulis hexagono-rotundatis vel subquadratis, leptodermibus; *annulus* 0,075 mm. latus; *peristomium* duplex; *exostomii* dentes c. 0,45 mm. longi, lutei, apice hyalini lamellis c. 25; *endostomium* sordide luteum; processus latiuscule perforati; *cilia* bene evoluta, appendiculata; *spori* 0,012—0,015 mm., lutei, laeves; *operculum* cupulatum, mamillatum.

Kashmir: in valle fl. Sind prope Báltal 9—10 000′ (n. 11 635, 12 890).

Species cum *Br. argenteo* comparanda, sed foliis nervo crasso, cum vel paulum infra apicem evanido cellulisque exothecii brevibus latis, leptodermibus jam optime diversa.

Bryum (Eubryum) amoenum Broth. n. sp.

Dioicum; caespitosum, caespitibus densis, mollibus, humilibus, latis, glauco-viridibus, haud nitidis; *caulis* vix ultra 5 mm. altus, inferne dense radiculosus, apice dense foliosus, innovationibus brevibus, erectis, inferne remote, apice dense foliosis; *folia* flaccida, cochleariformi-concava, breviter oblonga vel obovato-oblonga, nervo excedente longe aristata, marginibus anguste revolutis, integerrimis, limbata, limbo angusto, e seriebus duabus cellularum composito, nervo crassiusculo, lutescente, in aristam plus minusve elongatam, recurvulam, integram producto, cellulis leptodermibus, superioribus laxe hexagonis, c. 0,$_{06}$ mm. longis et c. 0,$_{025}$ mm. latis, basilaribus rectangularibus; *bracteae perichaetii* multo minores, lanceolatae, nervo excedente aristatae, integrae, angustius areolatae; *seta* 7—12 mm. alta, flexuosa, rubra, nitida; *theca* nutans, elongate pyriformis, asymmetrica, longicollis, cum collo c. 3 mm. longa, lutea, aetate castanea, sicca sub ore haud constricta; *annulus* c. 0,$_{075}$ mm. latus, per partes secedens; *peristomium* duplex; *exostomii* dentes c. 0,$_{38}$ mm. longi et c. 0,$_{075}$ mm. lati, lutei, apice hyalini, lamellis ultra 20; *endostomium* sordide lutescens, minute papillosum; *processus* anguste perforati; *cilia* bina, bene evoluta, longe appendiculata; spori 0,$_{017}$—0,$_{02}$ mm., ochracei, laeves; *operculum* cupulatum, mamillatum, luteum.

Kashmir: in trajectu Kamri 13—14 000′, ad terram (n. 12 799).

Species pulcherrima, colore glauco-viridi, foliis teneris, cochleariformi-concavis, laxe reticulatis nec non theca longicolli, lutea facillime dignoscenda, cum *Br. Funckii* et *Br. elegante* comparanda.

Bryum (Eubryum) Gamblei Broth. n. sp.

Dioicum; gracile, caespitosum, caespitibus densis, humilibus, latis, pallide viridibus, haud nitidis; *caulis* 2—3 mm. altus, basi radiculosus, dense foliosus, innovationibus brevibus, erectis, julaceis; *folia* imbricata, concava, ovata vel oblongo-ovata, breviter cuspidata, marginibus erectis, integerrimis, nervo sat tenui, rufescente, plerumque breviter excedente, cellulis teneris, laxis, superioribus rhombeis vel rhomboideis, basilaribus rectangularibus, marginalibus angustis, limbum indistinctum efformantibus; *seta* 10—12 mm. alta, tenuis, strictiuscula, nitida, rubra; *theca* pendula, oblongo-pyriformis, collo thecam aequante, lutea demum fusca; *annulus* 0,$_{09}$ mm. latus; *peristomium* duplex; *exostomii* dentes c. 0,$_{47}$ mm. longi et c. 0,$_{08}$ mm. lati, lutei, apice hyalini, lamellis c. 25; *endostomium* hyalinum; *processus* late perforati; *cilia* bina, appendiculata; *operculum* cupulatum, mamillatum, luteum, demum fuscum.

Kashmir: in valle Kargeh supra Tilail 13—14 000′ ad terram (n. 14 268), in valle Kamri prope Kálapáni 11—12 000′ (n. 12 835).

Baltistán: Chatpáni nullah 12—13 000′ (n. 14 442).

Species *Br. Funckii* affinis, sed gracilitate, foliis nervo tenuiore nec non seta multo breviore jam dignoscenda.

Bryum Duvalii Voit.

Kashmir: Budzulkod nullah in valle Liddar 12—14 000′.

Bryum turbinatum (Hedw.) — Musc. Ind. or. p. 73 excl. varr.

Kashmir: prope Gurais 7—8 000′ (n. 12 681, f. robusta).

Chitral: Ashreth 5—6 000′ (Harriss n. 16 903) et Guger 9 000′ (n. 16 934).

Bryum Schleicheri Schwægr.

Syn. Br. turbinatum var. Schleicheri Musc. Ind. or. p. 73.

Kashmir: in valle Burzil supra Sarwán 10—12 000′ (n. 14 306), in valle Kargeh supra Tilail 13—14 000′ (n. 14 267), in valle Kolahoi supra Liddarwat 11—12 000′ (n. 14 218), in valle Liddar prope Shishanág 12—13 000′ (n. 14 381, 14 383).

Kájnág: Limbar nullah 9—10 000′ (n. 11 060), Taltal nullah 11—12 000′ (n. 11 126).

Chitral: Mirza 7 700′ (Gatacre n. 17 858).

Baltistán: Marpu nullah 11—13 000′ (n. 12 747).

var. *latifolium* Schimp.

Syn. Br. turbinatum var. latifolium Musc. Ind. or. p. 73.

Kashmir: in valle Burzil prope Minimarg 10—11 000′ (n. 14 370).

Bryum Thomsoni Mitt. — Musc. Ind. or. p. 73.

Kashmir: prope Gurais 8—9 000′ (n. 12 703), supra Gulmarg 10—11 000′ (n. 11 318).

Baltistán: Satpur nullah prope Skardu 9 000′ (n. 12 734).

Bryum pseudotriquetrum (Hedw.) Schwægr. — Musc. Ind. or. p. 73.

Kashmir: in valle Kishenganga prope Gurais 7—8 000′ (n. 12 686).

Astor: Mushkin in valle Astor 9—10 000′ (n. 12 857).

Baltistán: Marpu nullah 11—13 000′ (n. 12 745 p. p.), in valle Drás 11—12 000′ (n. 12 766).

Bryum (Anomobryum) astorense Broth. n. sp.

Dioicum; caespitosum, caespitibus humilibus, densis, lutescenti-viridibus, sericeis; *caulis* humillimus, innovationibus vix ultra 5 mm. longis, julaceis, dense foliosis, curvatulis, acutis; *folia* sicca et humida imbricata, ovata vel ovato-lanceolata, acuta, nervo excedente breviter cuspidata, marginibus infima basi

revolutis, integris vel subintegris, nervo rufescente, breviter excedente, cellulis elongate et anguste rhomboideis, infimis laxioribus, rectangularibus; *seta* 1 cm. alta, tenuis, sicca flexuosula, rubra; *theca* suberecta, pyriformis, macrostoma, sicca plicata. Caetera ignota.

Astor: inter Astor et Dashkin 7—9 000′ (n. 12 865).

Species *Br. nitido* Mitt., mihi e descriptione tantum cognito, affinis, sed seta brevi, theca pyriformi, suberecta dignoscenda.

MNIACEAE.

Mnium Dill., L.

Mnium orthorrhynchum Brid. — Musc. Ind. or. p. 142.

Kájnág: Taltal nullah 12—13 000′ (n. 11 113). Sterile.

Mnium lycopodioides (Hook.) Schwægr. — Musc. Ind. or. p. 142.

Kashmir: Gulmarg 8—9 000′ (n. 11 233, 12 680), in valle Liddar supra Pálgam 8—9 000′ (n. 14 225), in valle Burzil prope Minimarg 10—11 000′ (n. 14 415).

Baltistán: Suk nullah in valle Drás 11—12 000′ (n. 12 758).

Mnium riparium Mitt.

Chitral: Jambatai 4,000′ (Harriss n. 16 939). Planta mascula.

Mnium serratum Schrad. — Musc. Ind. or. p. 142.

Kashmir: in valle Sind prope Báltal 10—11 000′ (n. 11 632).

Astor: in valle Astor 8—9 000′ (n. 12 712), Mushkin 9—10 000′ (n. 12 859), supra Doyen 9—12 000′ (n. 12 778), inter Astor et Dashkin 7—9 000′ (n. 12 862), in in valle Chugám 8—9 000′ (n. 12 838), in valle Gudhai 11—12 000′ (s. n.).

Gilgit: in valle Niltar 9—11 000′ (n. 12 821).

Mnium rostratum Schrad. — Musc. Ind. or. p. 143.

Kashmir: Gulmarg 7—8 000′ (n. 12 785).

Kájnág: Taltal nullah 12—13 000′ (n. 11 112).

Astor: Mushkin in valle Astor 9—10 000′ (n. 12 860 p. p.).

Mnium medium Br. eur. — Musc. Ind. or. p. 144.

Kashmir: Ferozepur nullah prope Gulmarg ad rupes irroratas 9—10 000′ (n. 11 378), in valle Burzil prope Minimarg 10—11 000′ (n. 14 354).

Astor: Mushkin in valle Astor 9—10 000′ (n. 12 860 p. p.).

Chitral: Ziárat 7 400′ (Harriss n. 16 905).

Mnium trichomanes Mitt. — Musc. Ind. or. p. 144.

Kashmir: in valle Liddar 6—7 000′ (n. 13 076).

The specimens differ from the typical *Mnium trichomanes* by their more serrated leaves and their longer points, which made me consider this a separate species (*Mn. kashmirense* n. sp.). Having, however, had opportunity of stating that the development of the teeth of the leaves varies, in specimens from different parts of Japan, I consider it best to classify the specimens of Liddar among *Mn. trichomanes*.

Mnium punctatum (L., Schreb.) Hedw. — Musc. Ind. or. p. 144.

Kashmir: in valle Kishenganga prope Gurais 8—9 000′ (n. 14 332 p. p.).

AULACOMNIACEAE.

Aulacomnium Schwægr.

Aulacomnium palustre (L.) Schwægr.

Baltistán: Deosai prope lacum Sheosár 12—13 000′ (n. 14 293).

BARTRAMIACEAE.

Philonotis Brid.

Philonotis fontana (L.) Brid. — Musc. Ind. or. p. 63.

Kashmir: supra Gulmarg 10—11 000′ (n. 11 316) et Ferozepur nullah prope Gulmarg 9—10 000′ (n. 11 376), Budzulkod nullah in valle Liddar 12—13 000′ (n. 14 189).

Kájnág: Limbar nullah 9—10 000′ (n. 11 059).

Baltistán: Marpu nullah 11—13 000′ (n. 12 751, 12 884).

Philonotis calcarea (Br. eur.) Schimp. — Musc. Ind. or. p. 63.

Kashmir: supra Gulmarg 10—12 000′ (n. 11 361).

Astor: Mushkin in valle Astor 9—10 000′ (n. 12 850).

Philonotis falcata (Hook.) Mitt. — Musc. Ind. or. p. 62.

Baltistán: Deosai prope lacum Sheosár 12—13 000′ n. 14 294).

Chitral: Mirza (Harriss n. 16 897), Bundai 4 000′ (n. 16 914) et Dir 10 000′ (n. 16 960).

Afghanistan: in valle Kurram (Haroukh s. n.).

Bartramia Hedw.

Bartramia Halleriana Hedw. — Musc. Ind. or. p. 58.
Kashmir: in trajectu Yamháru 13—14 000′ (n. 14 261).
Kájnág: Taltal nullah 12—13 000′ (n. 11 111).
Bartramia ithyphylla (Hall.) Brid.
Kashmir: Gulmarg 8—9 000′.
Bartramia subpellucida Mitt. — Musc. Ind. or. p. 59.
Baltistán: Rimochagma nullah 14 000′ (n. 12 731).
Bartramia subulata Br. eur. — Musc. Ind. or. p. 58.
Baltistán: Deosai prope lacum Sheosár 12—13 000′ (n. 14 300).
Bartramia Oederi (Gunn) Sw.
Kashmir: in valle Musjid 12—13 000′ (n. 14 399), in valle Sind prope Báltal 10—11 000′ (n. 11 631), Sonsal nullah in valle Liddar 13—14 000′ (n. 14 207).
Gilgit: in valle Niltar 9—11 000′ (n. 12 671).
Chitral: Mirza 9 000′ (Harriss n. 16 950).
var. *condensata* Brid.
Kashmir: Sonsal nullah in valle Liddar 13—14 000′ (n. 14 195).

TIMMIACEAE.

Timmia Hedw.

Timmia bavarica Hessl.
Kashmir: in valle Burzil supra Sarwán 10—12 000′ (n. 14 304, 14 308) et prope Minimarg 10—11 000′ (n. 14 359, 14 402, 14 412), prope Gulmarg 9—10 000′ (n. 11 342), in valle Musjid 12—14 000′ (n. 14 376), Ronishikar, Satpur nullah 13 000′ (n. 12 787), in trajectu Trágbal 8—9 000′ (n. 14 424, 14 426, 14 428), in valle Liddar supra Palgám 8—9 000′ (n. 14 221, 14 227), supra Tanin 10—11 000′ (n. 14 379), Sonsal nullah 13—14 000′ (n. 14 193), W. Shisha 11—12 000′ (n. 14 385) et Chatponsál nullah 11—12 000′ (n. 13 188), in valle Sind infra Sonamarg 7—8 000′ (n. 11 514).
Astor: in valle Astor supra Doyen 9—12 000′ (n. 12 774), Mushkin 9—10 000′ (n. 12 859 p. p.), Alampi Lá 14—16 000′ (n. 12 720), in valle Gudhai 11—12 000′ (n. 12 724).

Gilgit: in valle Niltar 9—11 000′ (n. 12 818).

Baltistán: Satpur nullah prope Skárdu 10—13 000′ (n. 12 873), Lamchan nullah supra Drás 11—12 000′ (n. 14 286).

Chitral: Ziárat 7 400′ (Harriss n. 16 910, 16 929) et Mirza 9 000′ (n. 16 949).

POLYTRICHACEAE.

Polytrichum Dill.

Polytrichum juniperinum Willd.

Kashmir: in valle Kishenganga prope Gurais 8—9 000′ (n. 14 392), supra Gumbliali prope Gulmarg 10—12 000′ (n. 11 194, 11 197), Sonamarg 8—9 000′ (n. 11 529), in jugo Kájnág, ad nives liquescentes 12—13 000′ (n. 11 016).

Kájnág: Limbar nullah 8—9 000′ (n. 11 048), prope Viji 12—13 000′ (n. 11 023).

Gilgit: in valle Niltar 9—11 000′ (n. 12 813).

Astor: supra Doyen 9—11 000′ (n. 12 841).

Baltistán: Bari Lá 15 000′ (n. 12 881, 12 879 p. p.).

var. *alpinum* Schimp.

Baltistán: Deosai prope lacum Sheosár 12—13 000′ (n. 14 299).

Catharinaea Ehrh.

Catharinaea obtusula C.-Müll.

Kashmir: in valle Kishenganga prope Gurais 8—9 000′ (n. 14 328) Gulmarg 8—9 000′ (n. 11 226, 11 242, 11 315), prope Gumbliáli 9—10 000 (n. 11 168), Traghal 8—9 000′ (n. 14 430).

Chitral: Bundai 8 000′ (Harriss n. 16 924).

CRYPHAEACEAE.

Leucodon Schwægr.

Leucodon sciuroides (L.) Schwægr. — Musc. Ind. or. p. 124.

Kashmir: Gulmarg 8—9 000′ (n. 12 678). Sterilis.

Astor: in valle Astor supra Doyen 9—12 000′ (n. 12 769).

NECKERACEAE.

Neckera Hedw.

Neckera pennata (L.) Hedw.
Kashmir: In valle Liddar supra Palgám 8—9 000′ (n. 13 165, 14 228), prope Gulmarg 8—9 000′ (n. 11 243, 11 420).

LESKEACEAE.

Myurella Br. eur.

Myurella julacea (Vill.) Br. eur.
Kashmir: Sonsal nullah in valle Liddar 13—14 000′ (n. 14 201). Sterilis.

Anomodon Hook. Tayl.

Anomodon viticulosus (L.) Hook. Tayl. — Musc. Ind. or. p. 126.
Kashmir: in valle Kishenganga prope Gurais 8 000′ (n. 14 340). Sterilis.
Kájnág: Taltal nullah 8—9 000′ (n. 11 131). Sterilis.

Leskea Hedw.

Leskea Duthiei Broth. n. sp.
Autoica; caespitosa, caespitibus densiusculis, mollibus, fuscescenti-viridibus, haud nitidis; *caulis* elongatus, repens, flexuosus, fasciculatim fusco-radiculosus, dense foliosus, vage ramosus, ramis teretibus, pinnatim ramulosis, ramulis brevibus, obtusis; *folia* sicca imbricata, humida patula, concaviuscula, cordato-ovata, acuta, marginibus ubique erectis, integerrimis, nervo crasso, viridi, infra apicem evanido, cellulis subrotundis, amplis, 0,015—0,020 mm., pellucidis, chlorophyllosis, laevibus; *bracteae perichaetii* erectae, hyalinae, e basi vaginante setaceo-acuminatae, nervo tenui, ante apicem evanido, cellulis teneris, superioribus elongatis; *seta* vix ultra 5 mm. alta, pallide rubra; *theca* erecta, symmetrica, ovali-oblonga, c. 2 mm. longa et c. 0,6 mm. lata, leptodermis, pallide fusca, ore rubra; *peri-*

stomium duplex; *exostomii* dentes sicci incurvi, humidi recurvi, c. 0,2 mm. longi et c. 0,05 mm. lati, albidi, dense lamellati, papillosi; *endostomium? spori* 0,02 mm., lutei, laeves; *operculum* conicum, obtusum.

Kashmir: in valle Sind 6—7 000′ (n. 11 459), in valle Liddar prope Tischmakan 6 000′, ad truncum *Juglandis* (n. 13 062).

Species distinctissima, habitu *L. polycarpae* Ehrh. similis, sed foliis imbricatis, marginibus ubique erectis, cellulis majoribus, laevibus, seta brevi nec non exostomii dentibus multo brevioribus facillime dignoscenda.

Leskea nervosa (Brid.) Myr.

Kashmir: in valle Kishenganga prope Gurais 8—9 000′ (n. 12 783 p. p., 14 433), prope Gulmarg 8—9 000′ (n. 11 234 p. p., 12 824, 12 892, 13 027), in valle Burzil prope Minimarg 10—11 000′ (n. 14 361, 14 367), in trajectu Trághal 8—9 000′ (n. 14 427), in valle Liddar supra Pálgam 9—10 000′ (n. 14 390).

Pterigynandrum Hedw.

Pterigynandrum filiforme (Timm) Hedw.
var. *decipiens* (Web. Mohr) Limpr.
Kashmir: in valle Burzil prope Minimarg 10—11 000′ n. 14 368).
Kájnág: Taltal nullah 8—9 000′ (n. 11 132).

Lescuraea Br. eur.

Lescuraea striata (Schwægr.) Br. eur.
Kashmir: Gulmarg 8—9 000′ (n. 11 239).

Pseudoleskea Br. eur.

Pseudoleskea atrovirens (Dicks.) Br. eur.

Kashmir: in valle Burzil prope Minimarg 9—10 000′ (n. 14 352), in valle Liddar supra Kainmul 11—12 000′ (n. 13 112). Sterilis.

Kájnág: Taltal nullah 11—12 000′ (n. 11 127). Sterilis.

Baltistán: Bari Lá 15 000′ (n. 12 875). Sterilis.

Thuidium Br. eur.

Thuidium abietinum (Dill., L.) Br. eur.
Gilgit: in valle Niltar 9—10 000′ (n. 12 804). Sterile.

HYPNACEAE.

Pylaisia Bruch. Schimp.

Pylaisia polyantha (Schreb.) Br. eur.
Kashmir: in valle Kargeh supra Tilail 13—14 000′ (n. 14 271 a).

Orthothecium Br. eur.

Orthothecium intricatum (Hartm.) Br. eur.
Kashmir: in valle Musjid 12—14 000′ (n. 14 377), prope Gulmarg 8—9 000′. Sterile.

Hypnum Dill., Mitt.

Hypnum strigosum Hoffm.
Kashmir: in valle Kishenganga prope Gurais 8—9 000′ (n. 14 330).
Chitral: Guger 9 500′ (Harriss n. 16 904).
Hypnum salebrosum Hoffm. — Musc. Ind. or. p. 79.
Kashmir: in valle Burzil in silvis prope Minimarg 9—10 000′ (n. 14 345, 14 363), in valle Kishenganga prope Gurais 8—9 000′ (n. 12 782, 14 323 p. p.), in valle Gurais 8—9 000′ (n. 12 687 b), Gulmarg 8—9 000′ (n. 11 231) et 9—10 000′ (n. 11 212), Gumbliáli nullah prope Gulmarg 11—12 000′ (n. 11 193).
Srinagar: Tahti Suleiman 5—6 000′ (n. 10 832).
Astor: Mushkin in valle Astor 9—10 000′ (n. 12 855).
Chitral: Mirza 9 000′ (Harriss n. 16 948).
Hypnum procumbens Mitt. — Musc. Ind. or. p. 79.
Kashmir: in valle Kishenganga prope Gurais 8—9 000′ (n. 14 323 p. p., 14 329).

Hypnum (Brachythecium) falcatulum Broth. n. sp.

Autoicum; robustiusculum, caespitosum, caespitibus laxiusculis, depressis, lutescenti-viridibus, nitidis; *caulis* elongatus, repens, dense foliosus, dense pinnatim ramosus, ramis patulis, vix ultra 1 cm. longis, strictiusculis, complanatis, dense foliosis, obtusis; *folia* disticha, falcatula, sicca plicata, humida concaviuscula, patula, *caulina* e basi brevissime decurrente, subcordata ovato-lanceolata, breviter acuminata, acumine angusto, interdum semitorto, marginibus infima basi tantum parce revolutis, ubique serrulatis, nervo crassiusculo, viridi, longe ultra medium vel infra apicem producto, cellulis elongatis, angustissimis, flexuosulis, alaribus laxis, abbreviatis, *ramea* minora, angustiora, ovato-lanceolata; *bracteae perichaetii* internae e basi vaginante anguste acuminatae, acumine recurvulo, minute serrulato, enerves; *seta* 12 mm. alta, sicca flexuosula, tenuis, rubra, laevissima; *theca* cernua, turgide ovalis, asymmetrica, sordide fusca, deoperculata curvata, atro-fusca, sub ore baud constricta; *annulus* c. 0,06 mm. latus, rufescens; *peristomium* duplex; *exostomii* dentes c. 0,7 mm. longi et c. 0,12 mm. lati, aurantiaci, apice hyalini; *endostomium* sordide luteum; *processus* latiuscule perforati; cilia terna, longa, hyalina, remote nodulosa vel breviter appendiculata; *spori* virides, 0,010—0,0125 mm., minutissime punctulati; *operculum* conicum, acutum.

Kashmir: ad truncos arborum et ligna putrescentia prope Gulmarg 8—9 000′ (n. 11 228 p. p., 11 231 p. p., 11 240, 11 249 p. p., 11 255), in valle Kishenganga prope Gurais 7—8 000′ (n. 12 699) et 8—9 000′ (n. 14 334), in valle infra Liddarwat 9—10 000′ (n. 14 231), Trágbal 9—10 000′ (n. 14 420).

Species distinctissima, caule regulariter pinnato, ramis brevibus, complanatis nec non foliis distichis, falcatulis primo intuitu cognoscenda.

Misled by a specimen determined wrongly, I considered this beautiful species to be identical with *H. Bellii* Mitt. in sched. Having received, later on, an original specimen of the said species from its discoverer, I have found *H. falcatulum* to be something quite different. As *H. Bellii* has not been described yet, as far as I know, I now take much pleasure in doing so.

Hypnum (Brachythecium) brachycladum Broth. n. sp.

Dioicum; gracile, caespitosum, caespitibus densis, latissimis, laete viridibus, nitidiusculis, caulibus intertextis; *caulis* elongatus, repens, arcuato-flexuosus, dense foliosus, pinnatim ramosus, ramis horizontalibus, brevibus, vix ultra 5 mm. longis, dense foliosis, strictiusculis, subteretibus, obtusis; *folia* sicca laxe adpressa, laevia, humida patentia, concava, *caulina* e basi longe decurrente late cordato-ovata, in cuspidem angustum, longiusculum subito attenuata, marginibus

infima basi tantum indistincte revolutis, ubique minutissime serrulatis, nervo tenui, viridi, ad vel paulum ultra medium evanido, cellulis angustis, alaribus numerosis, laxis, abbreviatis, *ramulina* minora, angustiora, ovato-lanceolata, breviter acuminata, argutius serrulata; *bracteae perichaetii* internae e basi oblonga, vaginante subito setaceae, apice serrulatae, enerves; *seta* 1 cm. alta vel paulum ultra, tenuis, rubra, laevissima; *theca* cernua, oblonga, sicca curvata, sub ore haud constricta, pallide fusca; *annulus* c. 0,05 mm. latus, rufescens; *peristomium* duplex; *exostomii* dentes c. 0,5 mm. longi et c. 0,09 mm. lati aurantiaci, apice hyalini; *endostomium* sordide luteum; processus anguste perforati; *cilia* bina, elongata, hyalina, remote breviter appendiculata; *spori* 0,010—0,012 mm., virides, minutissime punctulati; *operculum* alte conicum, acutum.

Kashmir: in valle Burzil prope Minimarg in silvis 9—10 000′ (n. 14 352) et 10—11 000′ (n. 14 410).

Species *H. erythrorrhizoni* (Br. eur.) sat similis, sed minor et notis supra allatis optime diversa.

Adn. In androeciis plantae masculae archegonia nonnulla interdum observantur.

Hypnum (Brachythecium) Bellii Mitt. n. sp. in sched.

Dioicum; robustulum, caespitosum, caespitibus mollibus, pallide viridibus, nitidis; *caulis* repens, vage ramosus, ramis adscendentibus, arcuatis, teretibus, attenuatis, dense foliosis, parce ramulosis, ramulis brevibus, arcuatis, teretibus, attenuatis, dense foliosis; *folia* sicca plicatula, laxe adpressa, humida erecto-patentia, subsecunda, concaviuscula, *ramea* decurrentia, late cordato-ovata, in cuspidem longum, loriformem subito attenuata, marginibus erectis, minutissime serrulatis vel subintegris, nervo tenui, viridi, supra medium evanido, cellulis laxiusculis, rhomboideo-hexagonis, medii folii 0,01—0,05 mm. longis et 0,007—0,010 mm. latis, basilaribus laxis, abbreviatis, alaribus vix diversiformibus; *bracteae perichaetii* tenerae, hyalinae, internae e basi vaginante subito longissime setaceae, integrae, enerves; *seta* 15—20 mm. alta, strictiuscula, tenuis, purpurea, laevissima; *theca* cernua, breviter oblonga, asymmetrica, pallide fusca; *annulus* 0; *peristomium* duplex; *exostomii* dentes c. 0,5 mm. longi et c. 0,08 mm. lati, lutei, apice hyalini; *endostomium* sordide luteum; *processus* anguste perforati; *cilia* terna, bene evoluta, hyalina, nodulosa; *spori* 0,010—0,015 mm., ochracei, laeves; *operculum* alte conicum, acutum.

N. W. Himalaya: ad fontes fl. Jumna 8—10 000′, Oct. 1868 detexit W. Bell.

Species *H. Buchanani* Hook. affinis, sed statura robustiore, foliis laxius reticulatis optime diversa.

Hypnum (Brachythecium) glabratum Broth. n. sp.

Autoicum; gracile, caespitosum, caespitibus densis, laete viridibus, nitidis; *caulis* elongatus, repens, arcuato-flexuosus, densiuscule foliosus, pinnatim ramosus, ramis haud complanatis, dense foliosis, brevibus, patulis, strictis, obtusis; *folia* sicca laxe adpressa, laevia, humida patentia concaviuscula, *caulina* ovato-lanceolata, longe subulato-acuminata, marginibus infima basi tantum paulum revolutis, integris, nervo viridi paulum ultra medium evanido, cellulis angustis, elongatis, basilaribus infimis laxis, teneris, hyalinis, alaribus vix diversiformibus, *ramulina* angustiora, marginibus inferne distinctius revolutis, apice serrulatis; *bracteae perichaetii* internae e basi longe vaginante subito longissime setaceae, integrae, nervo brevi, tenui vel indistincto; *seta* usque ad 15 mm. alta, strictiuscula, tenuis purpurea, laevissima; *theca* cernua, subcylindrica, curvata, fuscidula, aetate atrofusca, sicca deoperculata sub ore haud contracta; *annulus* angustissimus; *peristomium* duplex; *exostomii* dentes c. 0,75 mm. longi et c. 0,08 mm. lati, aurantiaci, apice hyalini; *endostomium* sordide luteum; *processus* anguste perforati; *cilia? operculum* alte conicum, acutum.

Kashmir: in valle Kishenganga prope Gurais ad truncos arborum 8 000′ (n. 14 351).

Species *H. populeo* habitu persimilis, sed foliis nervo paulum ultra medium evanido, seta laevissima nec non thecae forma optime diversa.

Hypnum (Brachythecium) spurio-populeum Broth. n. sp.

Autoicum; pergracile, caespitosum, caespitibus densis, pallide viridibus, nitidis; *caulis* elongatus, repens, densiuscule foliosus, dense pinnatim ramosus, ramis perbrevibus, suberectis, haud complanatis, strictiusculis, dense foliosis, obtusis; *folia* sicca laxe adpressa, laevia, humida patentia, concaviuscula, *caulina* ovato-lanceolata, longe subulato-acuminata, marginibus basi anguste revolutis, integris, nervo tenui, viridi, longe ultra medium evanido, cellulis elongatis, angustis, basilaribus infimis laxis, abbreviatis, alaribus numerosis, subquadratis, *ramulina* eisdem caulinis subsimilia, sed marginibus minutissime serrulatis; *bracteae perichaetii* internae e basi longe vaginante subito longissime setaceae, acumine reflexo, integro, enerves; *seta* usque ad 1 cm. alta, strictiuscula, tenuis, purpurea, laevissima; *theca* cernua, minuta, ovalis, asymmetrica, sicca deoperculata sub ore contracta, fusca; *peristomium H. populei; operculum* alte conicum, acutum.

Kashmir: Sonamarg 8—9 000′ (n. 11 509).

Species tenella, *H. populeo* simillima, sed seta laevissima dignoscenda. Ab *H. glabrato*, quocum seta laevi convenit, thecae forme jam primo intuitu distinguitur.

Hypnum populeum Hedw.

Kashmir: in valle Kishenganga prope Gurais 8 000′ (n. 14 399 p. p.).

Hypnum reflexum Stark.

Kashmir: in valle Kargeh supra Tilail 10—11 000′ (n. 14 274).

Hypnum collinum Schleich.

Baltistán: Marpu nullah 13—15 000′ (n. 12 743).

Gilgit: in valle Niltar 9—10 000′ (n. 12 822).

Astor: in valle Astor supra Doyen 9—12 000′ (n. 12 827), in trajectu Alampi Lá 14—16 000′ (n. 12 714).

Hypnum velutinum L.

Kashmir: in valle Jhelam prope Pirni 5—6 000′ (n. 10 914), in trajectu Tragbal 8—9 000′ (n. 14 425 p. p.).

Hypnum pseudo-plumosum Brid.

Syn. H. plumosum Musc. Ind. or. p. 79.

Kájnág: Taltal nullah 8—9 000′ (n. 11 129 p. p.).

Chitral: Jambatai 4 000′ (Harriss n. 16 940).

Hypnum rutabulum L. — Musc. Ind. or. p. 79.

Chitral: Ziárat 7 400′ (Harriss n. 16 907 p. p.).

Hypnum rivulare Bruch.

Kashmir: in valle Kishenganga prope Kajliban 8—9 000′ (n. 12 689 p. p.), in valle Burzil prope Minimarg 10—11 000′ (n. 14 362), in valle Gurais 8—9 000′ (n. 12 687 a).

Hypnum curtum Lindb.

Kashmir: in valle Burzil prope Minimarg 9—10 000′ (n. 14 352).

Hypnum (Brachythecium) kashmirense Broth. n. sp.

Autoicum; robustiusculum, caespitosum, caespitibus densiusculis, depressis, l tescenti-viridibus, nitidis; *caulis* elongatus, repens, flexuosus, dense foliosus, dense pinnatim ramosus, ramis patulis, vix ultra 1 cm. longis, strictis vel curvatulis, plus minusve complanatis, dense foliosis, obtusis; *folia* disticha, falcatula, sicca plicata, humida concaviuscula, patula, *caulina* e basi vix decurrente, subcordata late ovato-lanceolata, acuminata, acumine angustissimo, marginibus ubique erectis et minutissime serrulatis, nervo crassiusculo, viridi, infra apicem evanido, cellulis elongatis, angustissimis, alaribus laxis, abbreviatis, *ramea* minora, angustiora, ovato-lanceolata, distinctius serrulata; *bracteae perichaetii* internae e basi oblongo-vaginante anguste acuminatae, acumine recurvulo, enerves: *seta* usque ad 15 mm. alta, strictiuscula, rubra, ubique scaberrima; *theca* cer-

nua, ovalis, asymmetrica, sicca curvatula, pallide fusca. Caetera ut in *H. falcatulo*.

Kashmir: prope Gurais 7—8 000′ (n. 12 865 p. p.), Gumbliáli nullah prope Gulmarg 10—11 000′ (n. 11 118), Sonsal nullah in valle Liddar 13—14 000′ (n. 14 204), Tájwág nullah prope Sonamarg 9—10 000′ (n. 14 245), in jugo Kájnág ad truncos *Abietis Webbianae* 11—12 000′ (n. 10 994).

Gilgit: in valle Niltar 9—11 000′ (n. 12 815 p. p.).

Baltistán: in valle Drás 11—12 000′ (s. n.).

Species *H. falcatulo* simillima, sed seta ubique scaberrima facillime dignoscenda.

Hypnum (Brachythecium) curvatulum Broth. n. sp.

Autoicum; gracile, caespitosum, caespitibus densis, molliculis, laete viridibus, nitidiusculis; *caulis* repens, dense ramosus, ramis adscendentibus, dense fasciculatim ramulosis, ramis et ramulis fragilibus, teretibus, curvatulis, dense foliosis, obtusis; *folia* sicca laxe adpressa, plicatula, humida erecto-patentia, subsecunda, ovato- vel oblongo-lanceolata, subulato-acuminata, marginibus e basi ad medium folii late revolutis, infime minute, apice argute serrulatis, nervo viridi, tenui, ultra medium evanido, cellulis elongatis, angustis, basilaribus infimis brevioribus et latioribus, alaribus numerosis, quadratis; *bracteae perichaetii* e basi longe vaginante subito longissime setaceae, acumine serrulato, enerves; *seta* vix ultra 1 cm. alta, flexuosula, tenuis, purpurea, ubique scabra; *theca* cernua, ovalis, sicca curvata, deoperculata sub ore paulum constricta, fuscidula; *annulus* c. 0,05 mm. latus, rufescens; *peristomium* duplex; *exostomii* dentes c. 0,5 mm. longi et c. 0,1 mm. lati, aurantiaci, apice hyalini; *endostomium* sordide luteum; *processus* anguste perforati; *cilia* hyalina, elongata, nodulosa; *spori* 0,010—0,012 mm., virides, minutissime punctulati; *operculum* conicum, acutum.

Kashmir: Tahti Suleiman sub rupes 5—6 000′ (n. 10 831).

Species distinctissima, habitu *Lescuraeae saxicolae* sat similis, cum nulla alia commutanda.

Amblystegium Br. eur., de Not.

Amblystegium filicinum (L.) Lindb.

Syn. Hypnum filicinum Musc. Ind. or. p. 83.

Kashmir: Gulmarg 8—9 000′ (s. n.) et 10—12 000′ (s. n.), in valle Kaigeh supra Tilail 10—11 000′ (n. 14 277), in valle Burzil prope Minimarg 10—11 000′ (n. 14 411 p. p.), in valle Liddar supra Kainmul 10—11 000′

(n. 13 094), in valle Kishenganga prope Gurais 7—8 000′ (s. n.), Kainpatri nullah prope Zoji Lá 12 000′ (n. 14 256).

Kájnág: Taltal nullah 8—9 000′ (n. 11 120).

Astor: Mushkin in valle Astor 9—10 000′ (n. 12 846, 12 854) et supra Doyen 9—12 000′ (n. 12 777 p. p.).

Baltistán: Suk nullah in valle Drás 11—12 000′ (n. 12 765).

Chitral: Bundai 4 000′ (Harriss n. 16 911—12) et Broz 7 000′ (n. 16 955).

Afghanistan: Para Chenár in valle Kurram (Harsoukh n. 15 012).

Amblystegium falcatum (Brid.).

Syn. Hypnum falcatum Brid.

Kashmir: in valle Sind infra Báltal 9—10 000′ (n. 12 889), in valle Kargeh supra Tilail 13—14 000′ (n. 14 269).

Amblystegium uncinatum (Hedw.) de Not.

Syn. Hypnum uncinatum Musc. Ind. or. p. 83.

Kashmir: prope Gulmarg 8—9 000′ (n. 11 399) et supra Gulmarg 10—11 000′ (n. 11 312, 11 317), infra Gumbliáli 8—9 000′ (n. 11 166), in valle Musjid 12—13 000′ (n. 14 400), in valle Kishenganga prope Gurais 8—9 000′ (n. 14 331), in valle Balsór supra Chilam 11—12 000′ (n. 14 437), in valle Burzil prope Minimarg 9—10 000′ (n. 14 352), in trajectu Kamri 11—13 000′ (n. 12 800).

Gilgit: in valle Niltar 10—12 000′ (n. 12 808).

Astor: Mushkin in valle Astor (n. 12 846 p. p., 12 856).

Baltistán: Marpu nullah 11—13 000′ (n. 12 752), Bari Lá 15 000′ (n. 12 789), Rimochagma nullah 13—14 000′ (n. 12 730, 12 736), in valle Drás 11—12 000′ (n. 12 768).

Amblystegium exannulatam (Gümb.).

Syn. Hypnum exannulatum Gümb.

Kashmir: Badzulkod nullah in valle Liddar 12—14 000′ (n. 14 209). Sterile.

Baltistán: Deosai prope lacum Sheosár 12—13 000′ (n. 14 296—97). Sterile.

Amblystegium Kneiffii Br. eur.

Syn. Hypnum Kneiffii Schimp.

Pamir: locis paludosis ad fl. Aksu 13—14 000′ copiosissime (Alcock n. 17 797—98). Sterile.

Amblystegium palustre (Huds.) Lindb.

Syn. Hypnum palustre Huds.

Kashmir: Tájwáz nullah prope Sonamarg 9—10 000′ (n. 14 251), in valle Burzil prope Minimarg 10—11 000′ (n. 14 358), prope Gulmarg 8—9 000′ (n. 11 397, 11 401), prope Gurais 8—9 000′ (n. 12 702).

Kájnág: Taltal nullah 8—9 000′ (n. 11 120, 11 129, 11 130), Limbar nullah 8—9 000′ (n. 11 049, 11 050, 11 209 a).

Baltistán: Drás 10 000′ (n. 14 242).

Amblystegium dilatatum (Wils.) Lindb.

Syn. Hypnum dilatatum Wils.

Kashmir: ad rupes irroratas prope Gulmarg 9—10 000′ (n. 11 375 bis) et Ferozepur nullah 9—10 000′ (n. 11 379).

Amblystegium protensum (Brid.) Lindb.

Syn. Hypnum protensum Brid.

Kashmir: Gulmarg 8—9 000′ (n. 11 253), in valle Kishenganga prope Gurais 8 000′ (n. 14 435).

Amblystegium serpens (L.) Br. eur.

Syn. Hypnum serpens Musc. Ind. or. p. 82.

Kashmir: in valle Kishenganga prope Gurais 8 000′ (n. 14 341), in valle Liddar supra Pálgam 8—9 000′ (n. 14 226 p. p.), Liddarwat 9—10 000′ (n. 14 232).

Baltistán: Marpu nullah supra Drás 11—13 000′ (n. 12 885).

Chitral: Guger 9 000′ (Harriss n. 16 933, 16 935), Jambatai 4 000′ (n. 16 937 a), Ashreth 5—6 000′ (n. 16 901) et Ziárat 7 500′ (n. 16 908, 16 930—31).

Astor: in valle Gudhai 10—11 000′ (n. 12 711), in valle Chugám 8—9 000′ (n. 12 839).

Amblystegium subtile (Hedw.) Br. eur.

Kashmir: in valle Kargeh supra Tilail 10—11 000′ (n. 14 274 p. p.), ad truncos arborum prope Gulmarg 8—9 000′ (n. 11 232 p. p.).

Campylium (Sull.) Mitt.

Campylium hispidulum (Brid.) Mitt.

var. *Sommerfeltii* (Myr.) Lindb.

Syn. Hypnum Sommerfeltii Myr.

Kashmir: prope Gumbliali 9—10 000′ (n. 11 170), in valle Burzil prope Minimarg 10—11 000′, Liddarwat in valle Kolahoi 9—11 000′ (n. 14 212, 14 220) in trajectu Trágbal 9—10 000′.

Plagiothecium Br. eur.

Plagiothecium denticulatum (L.) Br. eur.

Kashmir: in valle Burzil prope Minimarg 10—11 000′ (n. 14 414, f. theca erecta), Gulmarg 8—9 000′ (n. 11 248, 11 229, f. theca erecta) et 9—10 000′ (n. 11 211), Kainmul nullah in valle Liddar 9—10 000′ (n. 14 388), in valle Kishenganga prope Gurais 8—9 000′ (n. 14 315, 12 696 et 12 784, f. theca erecta).

Kájnág: Taltal nullah 8—9 000′ (n. 11 112, 11 118 p. p., 11 121).

Chitral: Ziárat, 7 400′ (Harriss n. 16 907).

Plagiothecium nemorale (Mitt.). Jæg. Sauerb.

Syn. Stereodon nemoralis Mitt. Musc. Ind. or. p. 104.

Kashmir: Gulmarg 8—9 000′ (n. 11 252), in valle Burzil prope Minimarg 9—10 000′ (n. 14 352) et 10—11 000′ (n. 14 407).

Isopterygium Mitt.

Isopterygium nitidum (Wahlenb.) Lindb.

Syn. Plagiothecium nitidulum Br. eur.

Kashmir: Gulmarg 8—9 000′ (n. 11 259).

Astor: in valle Astor supra Doyen 9—12 000′ (n. 12 826 p. p.).

Isopterygium silesiacum (Selig.).

Syn. Plagiothecium silesiacum Br. eur.

Kashmir: in valle Liddar supra Pálgam 8—9 000′ (n. 14 224).

Stereodon Brid

Stereodon plicaefolius Broth. n. sp.

Dioicus; robustus, caespitosus, caespitibus densis, laete viridibus, nitidis; *caulis* elongatus, flexuosus, dense foliosus, irregulariter et parce pinnatim ramosus; *folia* falcata, profunde plicata, e basi auriculata oblongo-lanceolata,

longissime subulato-acuminata, marginibus revolutis, summo apice minutissime serrulatis, enervia, cellulis linearibus, angustissimis, basilaribus infimis abbreviatis, laxioribus, alaribus laxis, hyalinis, omnibus laevissimis. Caetera ignota.

Kashmir: in valle Kargeh supra Tilail 13—14 000′ (n. 14 270).

Species *S. revoluto* affinis, sed foliis auriculatis, auriculis laxissime reticulatis facillime dignoscenda.

Stereodon perrevolutus Broth. n. sp.

Dioicus; gracilis, caespitosus, caespitibus densis, saturate viridibus, nitidis; *caulis* elongatus, complanatus, dense foliosus, pinnatim ramosus, ramis brevibus, complanatis, patulis, dense foliosis; *folia* disticha, falcata, laevia, oblongo-lanceolata, breviter sed anguste acuminata, marginibus fortiter revolutis, integris vel subintegris, breviter binervia, cellulis linearibus, angustis, alaribus numerosis, viridibus, quadratis, omnibus laevissimis. Caetera ignota.

Kashmir: in valle Burzil prope Minimarg in silva (n. 14 356).

Species *S. revoluto* affinis, sed foliis haud plicatis dignoscenda, habitu quoque *S. cupressiformi* similis, sed foliis margine fortiter revolutis raptim distinguenda.

Stereodon revolutus Mitt. — Musc. Ind. or. p. 97.

Gilgit: in valle Niltar 9—11 000′ (n. 12 815).

Astor: in valle Astor supra Doyen 9—12 000′ (n. 12 777).

Baltistán: Bari Lá 15 000′ (n. 12 879 p. p., 12 880 p. p.).

Stereodon reptilis (Mchx.).

Syn. Hypnum reptile Mchx.

Kashmir: Gulmarg 8—9 000′ (n. 11 234, 11 245), in valle Kishenganga prope Gurais 8—9 000′ (n. 14 318, 14 323), in valle Sind supra Kullan 8—10 000′ (n. 14 241), in valle Liddar ad Kaimmul nullah 8—10 000′ (n. 13 166, 14 386) et supra Pálgam 10 000′ (n. 14 278), in trajectu Trághal 9—10 000′ (n. 14 417), in valle Burzil prope Minimarg 9—10 000′ (n. 14 352 p. p.).

Stereodon loriformis Broth. n. sp.

Autoicus; caespitosus, caespitibus densiusculis, late extensis, laete viridibus, nitidis; *caulis* elongatus, repens, flexuosus, densiuscule foliosus, pinnatim ramosus, ramis vix ultra 1 cm. longis, subteretibus, densiuscule foliosis, strictis, obtusiusculis; *folia* sicca laxe imbricata, humida patentia, homomallula, concava, oblongo-lanceolata, in acumen elongatum, loriforme protracta, laevia, marginibus infima basi parce revolutis, integerrimis, enervia vel indistincte binervia, cellulis linearibus, basilaribus ad angulos subquadratis, numerosis, chlorophyllosis, infimis laxis, hyalinis, omnibus laevissimis; *bracteae perichaetii* foliis subsimiles,

hyalinae, angustissime areolatae; *seta* vix ultra 1,5 cm. alta, sicca dextrorsum torta, rubra, laevissima: *theca* horizontalis, oblonga, brevicollis, curvatula, sicca sub ore vix constricta, pallide fusca, laevis; *peristomium* duplex; *exostomii* dentes c. 0,5 mm. longi et c. 0,1 mm. lati, aurantiaci, apice hyalini; *endostomium* sordide lutescens, minutissime papillosum: *processus* angustissime perforati: *cilia* 2—3, bene evoluta, hyalina, nodulosa. Caetera ignota.

Kashmir: in valle Liddar supra Pálgam 9—10 000′ (n. 14 215, 14 391).

Species distinctissima, *S. Haldaniano* affinis, sed foliis loriformiter acuminatis statim dignoscenda.

Stereodon Haldanianus (Grev.) Lindb.

Syn. Hypnum Haldanianum Grev.

Kashmir: in valle Kishenganga prope Gurais 8—9 000′ (n. 14 311, 14 319, 14 335, 14 337—38, 14 350) et prope Kajliban 8—9 000′ (n. 12 688, 12 690), Gulmarg 8—9 000′ (n. 11 250), in valle Liddar prope Kaimmul nullah 9—10 000′ (n. 14 387).

Kájnág: Taltal nullah 12—13 000′ (n. 11 114 p. p.).

INDEX.

Amblystegium dilatatum (Wils.) Lindb. . . 40
exannulatum (Gümb.) 39
falcatum (Brid.) 39
filicinum (L.) Lindb. 38
Kneiffii Br. eur. 39
palustre (Huds.) Lindb. 40
protensum (Brid.) Lindb. 40
serpens (L.) Br. eur. 40
subtile (Hedw.) Br. eur. 40
uncinatum (Hedw.) de Not 39
Amphidium lapponicum (Hedw.) Schimp. . . 15
Anisothecium varium (Hedw.) Mitt. . . . 9
Anoectangium Duthiei Broth. 6
Anomodon viticulosus (L.) Hook. Tayl. . . 31
Aulacomnium palustre (L.) Schwægr. . . . 28
Barbula alpigena (Vent.) 13
rubella (Hoffm.) Mitt. 13
tortuosa (W. M.) 12
Bartramia Halleriana Hedw. 29
ithyphylla (Hall.) Brid. 29
Oederi (Gunn.) Sw. 29
subpellucida Mitt. 29
subulata Br. eur. 29
Bryum affine (Bruch.) Lindb. 23
alpinum L. 24
amoenum Broth. 24
argenteum L. 24
astorense Broth. 26
caespiticium L. 23
capillare L. 24
cernuum (Sw.) Lindb 23
cernuum Br. eur. 23
cirratum Hopp. Hornsch. 23
cuspidatum Schimp. 23
Duvalii Voit. 26
elegans Nees 25
evanidinerve Broth. 24
Funckii Schwægr. 25
Gamblei Broth. 25
kashmirense Broth. 24
Mildeanum Jur. 24
Mühlenbeckii Br. eur. 24
nitidum Mitt. 27
pallescens Schleich. 23
pendulum (Hornsch.) Schimp. 23
pseudotriquetrum (Hedw.) Schwægr. . . 26
Schleicheri Schwægr. 26
Thomsoni Mitt. 26
tibetanum Mitt. 23
turbinatum (Hedw.) 26
uliginosum Br. eur. 23
Campylium hispidulum (Hedw.) Br. eur. var. Sommerfeltii (Myr.) Lindb. . . . 40
Catharinaea obtusula C.-Müll. 30
Ceratodon purpureus (L.) Brid. 10
stenocarpus Mont. 11
Cinclidotus acutifolius Broth. 14
riparius (Host.) Arn. 15
Desmatodon *inermis* Mitt. 14
latifolius (Hedw,) Brid. 13
Dicranella varia Schimp. 9
Dicranoweisia cirrata (L.) Lindb. 7
Dicranum kashmirense Broth. 9
lorifolium Mitt. 9
montanum Hedw. 10
scoparium (L.) Hedw. 10
Didymodon alpigenus Vent. 13
laxifolius Mitt. 8
stenocarpus Mitt. 11
Dissodon Froelichianus Grev. Arn. 19
Distichium capillaceum (Sw.) Br. eur. . . . 11
inclinatum (Ehrh.) Br. eur. 12
Ditrichum glaucescens (Hedw.) Hamp. . . 11
Drummondia Thomsoni Mitt. 16

Encalypta ciliata (Hedw.) Hoffm. 19
commutata Br. germ. 19
contorta (Wulf.) Lindb. 19
rhabdocarpa Schwægr. 19
tibetana Mitt. 19
vulgaris (Hedw.) Hoffm. 19
Eucladium verticillatum (L.) Br. eur. . . . 7
Fissidens bryoides (L.) Hedw. var. Hedwigii Limpr. 10
crassipes Wils. 10
cristatus Wils. 10
grandifrons Brid. 10
Funaria capillipes Broth. 20
hygrometrica (L.) Sibth. 19
Grimmia commutata Hüb. 15
leucophaea Grev. 15
pulvinata (L.) Sm. 15
Hymenostylium commutatum Mitt. 6
curvirostre (Ehrh.) Mitt. 6
Hypnum Bellii Mitt. 35
brachycladum Broth. 34
Buchanani Hook. 35
collinum Schleich. 37
curtum Lindb. 37
curvatulum Broth. 38
dilatatum Wils. 40
erythrorrhizon (Br. eur.) C.-Hartm. . . 35
exannulatum Gümb. 39
falcatulum Broth. 34
falcatum Brid. 39
filicinum Hedw. 38
glabratum Broth. 36
Haldanianum Grev. 43
kashmirense Broth. 37
Kneiffii Schimp. 39
palustre Huds. 40
plumosum Sw. 37
populeum Hedw. 37
procumbens Mitt. 33
protensum Brid. 40
pseudo-plumosum Brid. 37
reflexum Stark. 37
reptile Mchx. 42
rivulare Bruch. 37
rutabulum L. 37
salebrosum Hoffm. 33
Sommerfeltii Myr. 40
spurio-populeum Broth. 36
strigosum Hoffm. 33
uncinatum Hedw. 39
velutinum L. 37
Isopterygium nitidum (Wahlenb.) Lindb. . . 41
silesiacum (Selig.) 41
Leptobryum pyriforme (L.) Wils. 20
Leptotrichum inclinatum Mitt. 12
Wahlenbergii Mitt. 8
Leskea Duthiei Broth. 31
nervosa (Brid.) Myr. 32
Lescuraea striata (Schwægr.) Br. eur. . . . 32
saxicola Mol. 38
Mielichhoferia himalayana Mitt. 20
Mniobryum albicans (Wahlenb.) Limpr. . . 22
Mnium *kashmirense* Broth. 28
lycopodioides (Hook.) Schwægr. . . . 27
medium Br. eur. 27
orthorrhynchum Brid. 27
punctatum (L., Schreb.) Hedw. 28
riparium Mitt. 27
rostratum Schrad. 27
serratum Schrad. 27
trichomanes Mitt. 27
Myurella julacea (Vill.) Br. eur. 31
Neckera pennata (L.) Hedw. 31
Oncophorus Wahlenbergii Brid. 8
virens (Sw.) Brid. 8
Oreas Martiana (Hopp. Hornsch.) Brid. . . 8
Oreoweisia laxifolia (Hook.) Par. 8
Orthothecium intricatum (Hartm.) Br. eur. . 33
Orthotrichum alpestre Hornsch. 17
anomalum Hedw. 16
Duthiei Vent. 16
fastigiatum Bruch. 17
leiocarpum Br. eur. 18
pallens Bruch. 18
Rogeri Brid. 18
rupestre Schleich. 17
Schlotthaueri Vent. 17
Schubartianum Lor. var. himalayanum Vent. 16
speciosum Nees. 18
Sturmii Hornsch. 17
venustum Vent. 18
virens Vent. 18
Philonotis calcarea (Br. eur.) Schimp. . . . 28
falcata (Hook.) Mitt. 28
fontana (L.) Brid. 28
Plagiothecium denticulatum (L.) Br. eur. . 41
nemorale (Mitt.) Jæg. Sauerb. 41
nitidulum Br. eur. 41
silesiacum Br. eur. 41
Pleurocweisia kashmirensis Broth. 7
Pohlia cucullata (Schwægr.) Bruch. 22
cruda (L.) Lindb. 22
elongata Hedw. 21
gracilis (Schleich.) Lindb. 22
longicollis (Sw.) Lindb. 21

nutans (Schreb.) Lindb. 22
polymorpha Hopp. Hornsch. 21
Polytrichum juniperinum Willd. 30
Pseudoleskea atrovirens (Dicks.) Br. eur. . . 32
Pteryggynandrum filiforme (Timm.) Hedw.
var. decipiens (Web. Mohr.) Limpr. . 32
Pylaisia polyantha (Schreb.) Br. eur. . . . 33
Stereodon *cupressiformis* (L.) Brid. 42
Haldanianus (Grev.) Lindb. 43
loriformis Broth. 42
nemoralis Mitt. 41
perrevolutus Broth. 42
plicaefolius Broth. 41
reptilis (Mchx.) 42
revolutus Mitt 42
Syntrichia ruralis Brid. 14
Tayloria Froelichiana (Hedw.) Mitt. . . . 19
Thuidium abietinum (Dill., L.) Br eur. . . 33
Timmia bavarica Hessl. 29
Timmiella anomala (Br. eur.) Limpr. . . . 12
Tortella fragilis (Drumm.) Limpr. 12
tortuosa (L.) Limpr. 12
Tortula *anomala* Mitt. 12
atrovirens (Sm.) Lindb. 14
Drummondii Mitt. 12
inermis (Brid.) Mont. 14
montana (Nees.) Lindb. 14
ruralis (L.) Ehrh. 14
subulata (L.) Hedw. 14
Webera albicans Schimp 22
cruda Schwægr. 22
cucullata Schimp. 22
elongata Mitt. 21
gracilis de Not 22
longicolla Hedw. 21
nutans Hedw. 22
polymorpha Schimp. 21
pyriformis Hedw. 20
Weisia *recurvirostris* Mitt. 13
rutilans (Hedw.) Lindb.
var. himalayana Broth. 7
Wimmeriana (Sendtn.) Br. eur. . . . 7

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ.
TOM. XXIV. № 3.

UNTERSUCHUNGEN

ÜBER

ELEKTRISCHE SCHWINGUNGEN

VON

HJ. TALLQVIST.

II.

Inhalt.

1. Plan der Untersuchung. Versuchsanordnung . . . . . p. 1.
2. Discussion einer einzelnen Schwingungscurve . . . . . „ 3.
   a) Die Oscillationszeit . . . . . „ 4.
   b) Abhängigkeit der Oscillationszeit von der Grösse der normalen Ladung . . . . „ 6.
   c) Die Dämpfung . . . . . „ 7.
   d) Abhängigkeit der Dämpfung von der Grösse der normalen Ladung . . . . . „ 10.
   e) Die Wellenform und die Gleichung der Schwingungscurve . . . . . „ 12.
3. Serien von Schwingungscurven. Untersuchungen über die Oscillationszeit . . . . . „ 14.
   a) Serie mit variirender Capacität . . . . . „ 14.
   b) Serie mit variirendem Widerstande . . . . . „ 17.
   c) Serie mit variirender Selbstinduktion . . . . . „ 18.
   d) Messung von Selbstinduktionscoefficienten . . . . . „ 20.
   e) Serie mit variirender Selbstinduktion (Fortsetzung) . . . . . „ 22.
4. Untersuchungen über die Dämpfung der Ladungsschwingungen . . . . . „ 25.
5. Ueber das Verhalten des Eisens während der Schwingungen . . . . . „ 30.

Tabellen.

A. 1. Messung von Selbstinduktionscoefficienten mittelst Wechselstrom . . . . . p. I.
A. 2. Messung von Selbstinduktionscoefficienten mittelst Gleichstrom . . . . . „ IV.
B. Aufnahme von Schwingungscurven . . . . . „ XI.
   I. Serie mit variirender Capacität . . . . . „ XI.
   II. Serie mit variirendem Widerstande . . . . . „ XXI.
   III. Serie mit variirender Selbstinduktion . . . . . „ XXIV.
C. Schwingungscurven . . . . . „ XXVI.
   I. Serie mit variirender Capacität . . . . . „ XXVI.
   II. Serie mit variirendem Widerstande . . . . . „ XXVIII.
   III. Serie mit variirender Selbstinduktion . . . . . „ XXIX.

D. Abhängigkeit der Oscillationszeit von der Grösse der normalen Ladung . . . . „ XXX.
1. Beobachtete Curvenpunkte . . . . . „ XXX.
2. Reducirte Curvenpunkte . . . . . „ XXXII.
E. Dämpfungsmessungen . . . . . „ XXXIII.
I. Serien für verschiedene Capacitäten, bei unverändert gelassener Combination L' . . . . . „ XXXIII.
II. Serien für verschiedene Combinationen L', bei unverändert gelassener Capacität . . . . . „ XXXVIII.
III. Abhängigkeit der Dämpfung von der Grösse der normalen Ladung . . . „ XXXIX.

1. *Plan der Untersuchung. Versuchsanordnung.*

In dem ersten Theile dieser Arbeit (Acta. Soc. Sc. Fen. T. XXIII. N:o 4) habe ich diejenigen elektrischen Oscillationen theoretisch und experimentell untersucht, welche zu Stande kommen bei der Ladung eines Condensators in einem Stromkreise, enthaltend eine Induktionsspule ohne Eisenkern, mit bedeutender Selbstinduktion und geringem Widerstande. Der jetzt vorliegende zweite Theil hat ebenfalls den oscillatorischen Ladungsvorgang zum Gegenstande; der Unterschied besteht darin, dass die Induktionsspule bei den im Folgenden beschriebenen Untersuchungen einen Eisenkern von bedeutender Grösse enthielt. Sonst war die allgemeine Disposition der Versuche dieselbe wie bei der früheren Untersuchung.

Für die Erforschung der Gesetze der Ladungsschwingungen in dem Falle einer Induktionsspule ohne Eisenkern eignete es sich am besten die Theorie vorauszuschicken, und die Beschreibung der Experimente sowie den Vergleich der Resultate derselben mit der Theorie nachher folgen zu lassen. Wie gezeigt worden ist, sind diese Schwingungen sehr regelmässig, folgen relativ einfachen Gesetzen und gewähren eine im Allgemeinen befriedigende Uebereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung. Anders verhält es sich aber, wenn die Induktionsspule einen Eisenkern enthält. Durch den Strom wird das Eisen magnetisirt und der Selbstinduktionscoefficient der Spule somit vergrössert. Weil aber der Strom seiner Richtung und Grösse nach wechselnd ist, und weil noch ausserdem die Magnetisirungsintensität keine einfache Funktion der Stromstärke ist, so werden die Magnetisirung des Eisenkerns und der Selbstinduktionscoefficient der Spule während der Schwingungen nicht nur veränderliche, sondern sogar in sehr complicirter Weise veränderliche Funktionen der Zeit sein. Hieraus folgt, das die Oscillationen der Condensatorladung wesentliche Deformationen erleiden müssen in Verhältniss zu den Oscillationen, welche sich ergeben, wenn die Induktionsspule keinen Eisenkern enthält. Durch die

magnetische Hysteresis des Eisens wird die Erscheinung natürlich noch mehr complicirt, andere Nebenumstände nicht zu erwähnen. Eine genaue theoretische Vorausberechnung der im Folgenden zu betrachtenden elektrischen Schwingungen würde, wenn überhaupt möglich, mit sehr grossen Schwierigkeiten verbunden sein und ausserdem eine vollständige Kenntniss der Eigenschaften des Eisenkernes erfordern. Indem ich auf einen solchen Berechnungsversuch und auf eine ähnliche Anordnung der Darstellung wie in dem ersten Theile dieser Arbeit verzichte, stelle ich jetzt die experimentellen Ergebnisse in den Vordergrund, um direkt aus denselben die Gesetze der Schwingungen abzuleiten.

Für die im Folgenden beschriebenen Versuche stand die Spule N:o II (p. 56, Th. I) zu Verfügung. Der eingelegte Eisenkern, welcher mittels Holz- und Papiereinlagen sicher befestigt war, bestand aus 60 dünnen Lamellen von weichem Eisen, getrennt von einander durch sehr dünnes Seidenpapier und zusammengehalten durch einen eng umwickelten Faden. Dieser Eisenkern hatte sehr nahe dieselbe Länge wie die Wickelung der Spule, nämlich 45.2 cm, sein Durchschnitt war 29×31 mm gross, und er wog nach Abzug des Gewichtes des Fadens und des Seidenpapiers 2685 gr.

Es kamen drei verschiedene Combinationen der Serien der Spule N:o II zu Anwendung, nämlich (vergl. p. 56, Th. I):

L_1': Serie 2 der Spule N:o II mit Lamellen,
L_2': Die Serien 1 und 2 der Spule N:o II mit Lamellen,
L_4': Die Spule N:o II mit Lamellen, im Ganzen.

Von der Induktionsspule abgesehen, war die Versuchsanordnung übrigens genau dieselbe wie bei den Versuchen ohne Eisenkern. Statt einer wiederholten Beschreibung verweise ich deshalb auf Fig. 5, pag. 22 und Abschn. III des Theiles I.

Auch der Gang der Versuche war von demjenigen der früheren Versuche nicht wesentlich verschieden. Durch Aufnahme, in der auf p. 73, Th. I, beschriebenen Weise, einer genügenden Anzahl von einzelnen Punkten ergaben sich wellenförmige Linien, welche die Ladung des Condensators als Funktion der Zeit darstellen. Die Einheit der Abscissen der reducirten Curvenpunkte ist ein tausendstel Secunde; die Ordinaten sind in einem relativen Maasse bestimmt, indem die normale Ladung gleich 100 gesetzt wurde. Diese Schwingungscurven, welche sämmtlich ungefähr zehn einzelne vollständige Wellen umfassen, sind in Bezug auf die Werthe der Capacität, der Selbstinduktion und des Widerstandes der Strombahn systematisch in Serien geordnet worden.

Ausserdem wurden durch eine besondere Untersuchung diejenigen Veränderungen der Schwingungscurven ermittelt, welche unter sonst gleichen Umständen durch Abänderung der Grösse der normalen Ladung des Condensators hervorgehen. Indem die Höhe des ladenden Potentiales eine andere wird, ändert sich nämlich die Stromstärke, die Magnetisirung des Eisenkernes und als Folge hiervon die Schwingungscurve selber.

Unter den Fragen, welche in dieser Abhandlung ihre Beantwortung finden werden, soweit als das gesammelte Beobachtungsmaterial es gestattet, erwähne ich gleich hier die folgenden. Welche ist die Natur der Ladungsschwingungen, wenn die Induktionsspule einen Eisenkern enthält? Giebt es eine bestimmte Oscillationszeit der Schwingungen, und vorausgesetzt dass dies der Fall ist, kann die Oscillationszeit nach einem einfachen Gesetze theoretisch berechnet werden, wenigstens annähernd? Kann von einer bestimmten Dämpfung der Schwingungen die Rede sein? In welcher Weise verändern sich die Schwingungen mit den Constanten des Bildes, und in welchem Zusammenhange stehen sie mit den Schwingungen, welche sich ergeben, wenn die Induktionsspule ohne Eisenkern ist? Ist es möglich aus der Beobachtung der Schwingungen Schlüsse über das Verhalten des Eisenkernes während derselben zu ziehen?

2. *Discussion einer einzelnen Schwingungscurve.*

Um die Natur der Schwingungscurven näher untersuchen zu können, wähle ich zuerst eine einzelne Curve heraus, welche im Folgenden gewissermaassen als Referenzcurve dienen wird. Diese Curve entspricht den Combinationen C_5 und L_4', einem Widerstande der Strombahn $W = 3.117$ Ohm [1]), und ist mit Anwendung einer ladenden Batterie von 10 Acc. erhalten. Die normale Ladung des Condensators [2]) beträgt in Mittel 40.92 Mikrocoulomb.

---

[1]) Bei der öffentlichen Vertheidigung des Theiles I dieser Arbeit ist von dem Opponenten Herrn Prof. A. F. Sundell bemerkt worden, dass der Widerstand W nicht nur die metallische Strombahn, sondern auch den Widerstand der Accumulatorbatterie umfassen soll. Wegen der Kleinheit des Batteriewiderstandes spielt dieser Unterschied jedoch in Bezug auf die Resultate der Experimente fast gar keine Rolle. Ich bezeichne im Folgenden mit W nur den Widerstand der metallischen Strombahn, weil dieser allein experimentell bestimmt wurde, und theoretische, den Widerstand enthaltende Formeln in diesem Theile nicht vorkommen, der letzte Artikel jedoch ausgenommen, wo mit W der Gesammtwiderstand zu verstehen ist.

[2]) Es darf bemerkt werden, dass die normale Ladung bei dieser Curve eine schwache Abnahme zeigt, welche im Maximum etwas mehr als 1 % erreicht. Dasselbe ist bei einigen ande-

Die Beobachtungen bei der Aufnahme von Punkten der Curve sind in der Tabelle B. I. N:o 19 in extenso wiedergegeben; die reducirten Curvenpunktcoordinaten finden sich in der Tabelle C. I. N:o 19. Die voll ausgezogene Linie Fig. 1, Taf. II veranschlaulicht diese Schwingungscurve.

a) Die Oscillationszeit.

Unter der Voraussetzung, dass die Oscillationszeit der Schwingungscurve entlang constant bleiben würde, könnte dieselbe in der auf p. 76, Th. I angegebenen Weise berechnet werden, indem man diejenigen Schnittpunkte der Curve mit der Geraden der normalen Ladung bestimmt, welche durch eine ganze Anzahl vollständiger Wellen von dem ersten dieser Schnittpunkte entfernt sind, und den somit erhaltenen Zeitunterschied jedesmal mit der Anzahl der Wellen theilt. Die gesuchte Oscillationszeit ist das Mittel aus den zehn auf solche Weise gefundenen Werthen. Für die betrachtete Curve ergeben sich nach diesem Verfahren folgende Werthe, welche in Millisec. als Einheit ausgedrückt sind:

9.043
9.034
9.015
9.004
8.974
8.949
8.949
8.936
8.935
8.940

Mittel: $T = 8.978$ Millisec.

Ein Blick auf diese Zahlen zeigt, dass die Oscillationszeit der Curve entlang nur annähernd constant bleibt; sie nimmt mit wachsender Abscisse

---

ren Curven der Fall; jedoch ist die Abnahme nicht so gross als hier. Die Ursache dieser kleinen Veränderlichkeit der normalen Ladung liegt darin, dass einige der älteren Accumulatoren gegen ganz neue ausgetauscht waren; für die im Texte betrachtete Curve ist ausserdem zu bemerken, dass dieselbe unmittelbar nach stattgefundener Neuladung der Acc. aufgenommen worden ist (Th. I, p. 75). Übrigens ist für den hierdurch entstehenden Fehler in der p. 75, Th. I angegebenen Weise überall corrigirt worden.

allmählig, wenn auch nur wenig ab. Diese Abnahme erklärt sich einfach daraus, dass die effektive Stromstärke während der Schwingungen, und mit ihr die magnetische Induktion im Eisenkerne sowie der mittlere Werth des Selbstinduktionscoefficienten der Spule mit ihrem Kern, mit der Zeit abnehmen, und zwar um so mehr, je stärker gedämpft die Schwingungen sind.

Nachdem wir somit gefunden, dass die Oscillationszeit für eine gegebene Schwingungscurve eine (schwach) veränderliche Grösse ist, muss für das Folgende näher festgestellt werden, in welchem Sinne das Wort „Oscillationszeit" gebraucht wird. Ich verstehe mit Oscillationszeit überall die mittlere Oscillationszeit für die zehn ersten Wellen der Schwingungscurve. Diese mittlere Oscillationszeit hat zwar keine strenge theoretische Bedeutung [1]), dieselbe kann aber aus den Experimenten am sichersten abgeleitet werden. Die oben gefundene Oscillationszeit 8.978 Millisec. ist natürlich grösser als die mittlere Oscillationszeit für die zehn ersten Schwingungen. Bestimmt man dagegen direkt die Längen der einzelnen zehn Wellen der Curve in Zeitmaass, so erhält man

9.043
9.024
8.978
8.972
8.855
8.822
8.953
8.842
8.930
8.981

und im Mittel: $T = 8.940$ Millisec. als Werth der gesuchten mittleren Oscillationszeit.

[1]) Es könnte auch der Anfangswerth der Oscillationszeit, welcher etwas grösser als der oben eingeführte Mittelwerth ist, gebraucht werden. Eine solche Wahl hat jedoch den Nachtheil, dass die Bestimmung dieses Anfangswerthes schwieriger und unsicherer ist als diejenige des Mittelwerthes.

b) Abhängigkeit der Oscillationszeit von der Grösse der normalen Ladung.

Nachdem die Art der Berechnung der Oscillationszeit für eine gegebene Schwingungscurve soeben festgestellt worden ist, eignet es sich am besten die Veränderlichkeit dieser Oscillationszeit mit der Grösse der normalen Ladung des Condensators zu untersuchen.

Wird die Anzahl der Acc. der Ladungsbatterie abgeändert, während dieselben Combinationen C und L', am Condensator und an der Induktionsspule bez., sowie derselbe Widerstand W der Strombahn beibehalten werden, so verändert sich die Grösse der normalen Ladung, proportional der Batteriespannung. Wenn die normale Ladung wächst, so nehmen die effektive Stromstärke der Schwingungen, die magnetische Induktion im Eisenkerne und der mittlere Selbstinduktionscoefficient der Spule zu. Eine direkte Folge hiervon ist die Zunahme der Oscillationszeit T. Um T als eine Funktion der normalen Ladung darzustellen, habe ich bei der oben behandelten Schwingungscurve die Anzahl der Acc. variirt — es wurden ausser 10 Acc. noch angewandt 1 Acc. allein, 2 Acc., 4 Acc., 6 Acc. und 8 Acc. — und jedesmal die mittlere Oscillationszeit gemessen. Zu diesem Zwecke wurden kleine Curvenstücke in der Nähe derjenigen Schnittpunkte der Curve mit der Geraden der normalen Ladung aufgenommen, welche durch eine gerade Anzahl vollständiger Wellen von dem ersten Schnittpunkte entfernt sind. Es ergaben sich somit für jede Curve fünf Werthe der doppelten Oscillationszeit. Die Mittelwerthe der betreffenden Beobachtungen von Curvenpunkten und die reducirten Coordinaten dieser Punkte sind zusammengestellt in den Tabellen D. 1 und D. 2 bez.; die Resultate der Berechnung der Oscillationszeiten sind in der folgenden Tabelle enthalten.

Anzahl Acc.	1	2	4	6	8	10
Norm. Ladung Q in Mikrocoul.	4.04	8.03	16.32	24.34	32.62	40.92
Werthe der doppelten Oscillationszeit.	17.492	17.616	17.742	17.806	18.004	—
	17.509	17.424	17.488	17.780	17.784	—
	17.482	17.512	17.604	17.684	17.673	—
	17.391	17.524	17.478	17.639	17.754	—
	17.554	17.494	17.742	17.577	17.629	—
Mittel.	17.486	17.514	17.611	17.697	17.769	—
T in Millisec.	8.743	8.757	8.806	8.849	8.885	8.940

Die Zunahme von T mit wachsendem Q ist somit ziemlich klein, aber deutlich ausgesprochen. In Fig. 1 Taf. I wurden die Werthe von Q als Abscissen, die Werthe von T als Ordinaten abgetragen. Die Figur zeigt, dass innerhalb des betrachteten Intervalles T mit genügender Genauigkeit als eine lineare Funktion von Q sich darstellen lässt. Es ergiebt sich nach der Methode der kleinsten Quadrate

$$T = 8.718 + 0.00533\ Q \text{ Millisec}, \tag{1}$$

wobei der Zahlenwerth von Q in Mikrocoulomb einzusetzen ist. Von dieser Gleichung werde ich im Folgenden Gebrauch machen. Eine nähere Erforschung des Zusammenhanges zwischen Q und T — oder zwischen T und der effektiven Stromstärke — durch Untersuchung der Abhängigkeit der Coefficienten der Gleichung von den Constanten der Strombahn lag nicht in dem Plane meiner allgemeinen Untersuchung über die Ladungsschwingungen.

c) Die Dämpfung.

Im Theile I dieser Arbeit wurde gezeigt, dass die Oscillationen der Condensatorladung mit grosser Genauigkeit regelmässig gedämpft sind, wenn die Strombahn eine Induktionsspule ohne Eisenkern enthält. Zur Berechnung des Dämpfungsverhältnisses dienten die Minima der Schwingungscurve; die Maxima waren zu diesem Zwecke weniger geeignet, weil sie von dem zeitlichen Verlaufe der Capacität mehr beeinflusst und weniger sicher bestimmbar sind als die Minima. Es fragt sich jetzt, ob die Dämpfung der Schwingungen auch dann eine regelmässige ist, wenn die Induktionsspule einen Eisenkern enthält? Um diese Frage zu beantworten, sind die Minimipunkte der p. 3 genannten Curve beobachtet worden, und zwar, nach der auf p. 27, Th. I eingeführten Bezeichnung, von N:o 2 bis zu N:o 36, innerhalb des ganzen mit dem Pendelunterbrecher zugänglichen Bereiches. Auch die Ordinaten der Maximipunkte, von N:o 1 bis zu N:o 19, sind bestimmt worden, jedoch nicht durch direkte Beobachtung, sondern mit Hülfe der Schwingungscurve selbst und einer graphischen Ausgleichung. (Siehe Tab. E. I. *d)* N:o 1.) Unter der Voraussetzung eines der Curve entlang unveränderlichen Dämpfungsverhältnisses k, würde sich für jeden Scheitelpunkt mit Anwendung der Formel auf p. 77, Th. I,

(2) $$k = \sqrt[n]{\frac{Q}{A_n}}$$

ein Werth von k ergeben. Man findet in dieser Weise aus den Ladungsmaxima und Minima, bez.

N:o	k	N:o	k
(1)	1.0741	(2)	1.0734
(3)	1.0759	(4)	1.0740
(5)	1.0764	(6)	1.0739
(7)	1.0765	(8)	1.0750
(9)	1.0761	(10)	1.0739
(11)	1.0751	(12)	1.0727
(13)	1.0735	(14)	1.0713
(15)	1.0721	(16)	1.0697
(17)	1.0697	(18)	1.0684
(19)	1.0677	(20)	1.0673
		(22)	1.0657
		(24)	1.0645
		(26)	1.0633
		(28)	1.0621
		(30)	1.0609
		(32)	1.0598
		(34)	1.0582
		(36)	1.0579

Aus diesen Zahlen geht hervor, dass k im Anfang der Curve annähernd constant bleibt, dann aber mit der Zeit allmählig abnimmt. Folglich sind die betrachteten Ladungsschwingungen keine regelmässig gedämpfte Schwingungen, wie auch à priori anzunehmen war. Die Ursache der Variabilität des Dämpfungsverhältnisses ist in den Veränderungen des Selbstinduktionscoefficienten L' der Strombahn zu suchen, jedoch nicht in der stetigen Abnahme des mittleren Werthes von L' mit der Zeit, denn diese würde gerade im entgegengesetzten Sinne wie oben wirken, sondern in der periodischen Veränderung von L' innerhalb jeder einzelnen Welle der Schwingungscurve. In der Nähe eines Wendepunktes der Curve ist L' am grössten, in der Nähe eines Scheitelpunktes am kleinsten; und diese Schwankungen werden um so kleiner, je mehr

man sich von dem Anfang der Schwingungscurve entfernt. Durch die periodische Abnahme von L' werden die Maxima der Ladung verkleinert, die Minima vergrössert, und k nimmt in beiden Fällen zu. Wahrscheinlich ist diese Wirkung am stärksten im Anfang der Curve, wird aber mit der Zeit mehr oder weniger compensirt durch die stetige Abnahme des mittleren Werthes von L'. Auch der Energieverlust im Eisenkerne zufolge magnetischer Hysteresis und Wirbelströme kann in Bezug auf die Veränderung des Dämpfungsverhältnisses eine Rolle spielen.

Wählt man in der Reihe links oben einen Werth von k aus und interpolirt aus der Reihe rechts den entsprechenden Werth, so ist der erstere immer etwas grösser als der letztere. Die Ursache hierzu kann liegen, theils in der etwas verschiedenen Bestimmungsweise der Werthe in den beiden Reihen, theils auch in einem Einflusse des zeitlichen Verlaufes der Capacität des Condensators, analog dem im Th. I näher besprochenen (siehe p. 78).

Weil das Dämpfungsverhältniss während der Schwingungen nicht constant bleibt, so ist die oben angewendete Berechnungsmethode durch Zusammenstellung der einzelnen Amplituden mit dem Werthe der normalen Ladung nicht mehr berechtigt, vielmehr kann eigentlich nur von einem augenblicklichen Werthe von k die Rede sein. Statt augenblickliche Werthe, für deren Berechnung Daten fehlen, wollen wir jedoch solche Werthe betrachten, welche entweder aus zwei benachbarten Maximipunkten oder aus zwei benachbarten Minimipunkten der Curve abgeleitet sind. Natürlich üben bei dieser Berechnung Fehler in den Ordinaten der Scheitelpunkte auf die einzelnen Werthe von k einen grösseren Einfluss aus als auf die oben angegebenen Werthe. Man findet aus den Scheitelpunkten

N:o	(1)	und	(3)	$k = 1.0768$	N:o	(0)	und	(2)	$k = 1.0734$
„	(3)	„	(5)	1.0772	„	(2)	„	(4)	1.0746
„	(5)	„	(7)	1.0767	„	(4)	„	(6)	1.0737
„	(7)	„	(9)	1.0746	„	(6)	„	(8)	1.0785
„	(9)	„	(11)	1.0707	„	(8)	„	(10)	1.0694
„	(11)	„	(13)	1.0645	„	(10)	„	(12)	1.0669
„	(13)	„	(15)	1.0633	„	(12)	„	(14)	1.0625
„	(15)	„	(17)	1.0521	„	(14)	„	(16)	1.0590
„	(17)	„	(19)	1.0508	„	(16)	„	(18)	1.0575

N:o	(18)	und	(20)	$k = 1.0579$
„	(20)	„	(22)	1.0503
„	(22)	„	(24)	1.0509
„	(24)	„	(26)	1.0491
„	(26)	„	(28)	1.0465
„	(28)	„	(30)	1.0438
„	(30)	„	(32)	1.0439
„	(32)	„	(34)	1.0453
„	(34)	„	(36)	1.0401

Die oben gezogenen Folgerungen über die Variabilität von k könnten auch aus diesen Zahlen abgeleitet werden. Die graphishe Veranschaulichung der k-Werthe in der Reihe rechts (Fig. 2 Taf. I) zeigt, dass k als eine lineare Funktion der Zeit sich darstellen lässt. Nach der Methode der kleinsten Quadrate ergiebt sich

(3) $$k = 1.0783 - 0.00113\ n,$$

wobei n die Anzahl halber Schwingungsdauern, vom Beginn der Ladung gerechnet, bezeichnet. Auch die Werthe von k in der Reihe links oben schliessen sich der Formel (3) ziemlich gut an (vergl. die Figur l. c.), jedoch werde ich im Folgenden die Dämpfung nur aus den direkt beobachteten Minimipunkten der Schwingungscurven ableiten.

d) Abhängigkeit der Dämpfung von der Grösse der normalen Ladung.

Ebenso wie die Oscillationszeit ist die Dämpfung der Ladungsschwingungen abhängig von der Grösse der normalen Ladung, wenn die Induktionsspule einen Eisenkern enthält. Um diese Abhängigkeit zu bestimmen, wurden die Minimipunkte (einschliesslich N:o 20) der jetzt betrachteten Schwingungscurve beobachtet, ausser in dem soeben behandelten Falle, auch wenn die ladende Batterie 1 Acc., 2 Acc., 4 Acc., 6 Acc. und 8 Acc. enthielt. Die Tabelle E. III. giebt die Mittelwerthe dieser Beobachtungen sowie die aus zwei benachbarten Minima berechneten Werthe des Dämpfungsverhältnisses. Die aus diesen Werthen abgeleiteten, der Gl. (3) oben entsprechenden linearen Relationen für k sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Anzahl Acc.	Norm. Lad. Q in Mikrocoul.	Dämpfungsverhältniss k.
1	4.04	$k = 1.0394 - 0.00025\ n$
2	8.02	$k = 1.0461 - 0.00038\ n$
4	16.31	$k = 1.0591 - 0.00080\ n$
6	24.33	$k = 1.0680 - 0.00104\ n$
8	32.61	$k = 1.0740 - 0.00115\ n$
10	40.58	$k = 1.0783 - 0.00113\ n$

Diese Tabelle zeigt, dass die Dämpfung der Ladungsschwingungen sich mit wachsender normaler Ladung rasch vergrössert. Ausserdem geht hervor, dass die Schwingungscurve sich zu einer regelmässig gedämpften Sinuslinie um so mehr nähert, je kleiner die normale Ladung ist. Die Ursachen zu diesen Erscheinungen liegen wohl hauptsächlich in den Veränderungen des Selbstinduktionscoefficienten der Spule mit ihrem Kern.

In den obigen Ausdrücken für k bezeichnet das constante Glied das beim Beginn der Ladung stattfindende Dämpfungsverhältniss. Eine besondere theoretische Bedeutung kann dieser Constante doch kaum zugeschrieben werden, da eben in der Nähe des Anfanges der Schwingungscurve die Veränderung der Dämpfung am wenigsten ausgesprochen zu sein scheint. Es ist möglich, dass hierin eine Wirkung des magnetischen Hysteresis zu suchen ist. Auf eine solche Einwirkung deutet auch der Umstand, dass die Aufnahme der ersten Minimipunkte der Schwingungscurve in einer ganz bestimmten Weise erfolgen musste, um zu übereinstimmenden Werthen zu führen. Durch Variation der Grösse der unmittelbar vorhergehenden Ladung des Condensators konnte man nämlich Veränderungen der Ordinaten der Minimipunkte der Curve um höchstens etwa 2 Scalentheile bewirken. Es wurde thatsächlich vor jeder Bestimmung eines Minimipunktes der Condensator ungefähr mit seiner normalen Ladung geladen und wieder entladen.

Ich verzichte auf eine mehr eingehende Darstellung des Dämpfungsverhältnisses für die betrachteten Ladungsschwingungen als eine Funktion von Q, weil eine solche Darstellung doch nur empirische Bedeutung haben kann.

e) Die Wellenform und die Gleichung der Schwingungscurve.

Die Untersuchungen in diesem Art. haben gezeigt, dass die Curven der oscillatorischen Ladung beim Vorhandensein eines Eisenkernes in der Induktionsspule keine regelmässig gedämpfte Sinuslinien sind. Zwar könnten die einzelnen Wellen einer Ladungscurve als Stücke von regelmässig gedämpften Sinuslinien aufgefasst werden, dann sind aber sowohl die Oscillationszeit wie das Dämpfungsverhältniss von Welle zu Welle veränderliche Grössen. Eine einheitliche analytische Darstellung der Curve im Ganzen erfordert selbstverständlich eine mehr complicirte Gleichung als diejenige der regelmässig gedämpften Schwingungen. Ich werde im Folgenden versuchen für die p. 3 ausgewählte Ladungscurve eine solche Gleichung in einer zwar nicht völlig strengen, aber für unseren Zweck genügen genauen Weise herzuleiten, ohne jedoch dieser Gleichung besondere theoretische Bedeutung zuzuschreiben.

Für einen relativ kleinen Widerstand der Strombahn lautet die Gleichung der regelmässig gedämpften Ladungscurve in ihrer einfachsten Form (siehe p. 28, Gl. 28, Th. I)

$$q = Q\left\{1 - e^{-at}\cos 2\pi\frac{t}{T}\right\}, \tag{4}$$

worin a durch die Constanten der Strombahn bestimmt ist.

Die einfachste Verallgemeinerung der Gleichung (4), durch welche eine brauchbare analytische Darstellung der jetzt zu betrachtenden Schwingungscurve erreicht wird, ist die folgende:

$$q = Q\left\{1 - e^{-at+bt^2}\cos 2\pi\frac{t}{T}\right\}, \tag{5}$$

wobei mit T die auf p. 5 berechnete mittlere Oscillationszeit während der zehn ersten vollständigen Schwingungen zu verstehen ist. Aus der Gl. (5) ergiebt sich, indem

$$t = n\frac{T}{2} \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$

eingesetzt wird (vergl. die Bezeichn. auf p. 27, Th. I),

$$a\,n\frac{T}{2} - b\,n^2\frac{T^2}{4} = \ln\frac{Q}{A_n},$$

und nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet man aus den 20 ersten Scheitelpunkten der Ladungscurve für die Constanten a und b die Werthe

$$a = 0.01660 \text{ Millisec.}^{-1},$$

$$b = 0.0000187 \text{ Millisec.}^{-2}.$$

Die Gleichung der Curve lautet somit

$$q = Q\left\{1 - e^{-0.01660\,t + 0.0000187\,t^2} \cos 2\pi \frac{t}{T}\right\}, \tag{6}$$

worin

$$Q = 40.92 \text{ Mikrocoulomb} = 100 \text{ arbiträre Einheiten}$$

und

$$T = 8.940 \text{ Millisec.}$$

zu nehmen ist.

Fig. 1 Taf. II veranschaulicht die beiden Curven, die experimentell gefundene und die nach der Gl. (6) berechnete Schwingungscurve; die erstere ist durch eine voll ausgezogene Linie, die letztere durch eine gestrichelte Linie dargestellt. Wie die Figur zeigt, stimmen beide Curven ziemlich gut mit einander überein. Zu bemerken sind kleine Verschiebungen von einzelnen Wellen im Ganzen in der Richtung der Axe der Abscissen, welche theils von Beobachtungsfehlern, theils auch davon herrühren, dass der berechneten Curve eine constante Oscillationszeit beigelegt worden ist, obgleich die Periode der Schwingungen thatsächlich mit der Zeit (schwach) abnimmt. Es würde nicht schwierig sein, in der Formel (5) T als eine Funktion von t einzuführen und eventuell noch ein Glied mit t^3 in dem Exponentialfaktor hinzuzufügen, in der Weise, dass eine vollkommenere Uebereinstimmung der nach der so erhaltenen vollständigeren Formel berechneten Curve mit der experimentell bestimmten sich ergeben würde. Ich betrachte es jedoch auf Grund des empirischen Charakters der Resultate nicht als der Mühe werth, in dieser Richtung weiter zu gehen.

3. Serien von Schwingungscurven. Untersuchungen über die Oscillationszeit.

In ähnlicher Weise, wie bei der Untersuchung im Th. I, habe ich auch in dem Falle, dass die Induktionsspule einen Eisenkern enthält, geordnete Serien von Curven oscillatorischer Ladung aufgenommen. Soweit als dies überhaupt möglich ist, wurden innerhalb jeder Serie zwei der Constanten C, L' und W der Strombahn unverändert gehalten, während die dritte systematisch geändert wurde. Zwar könnten durch Variation der Grösse der normalen Ladung, bei gegebenen Werthen von C, L' und W, die Serien von Schwingungscurven noch vermehrt werden; jedoch habe ich mich in dieser Hinsicht auf diejenigen Untersuchungen beschränkt, welche oben im Art. 2 b. und d. beschrieben wurden. Ich werde in diesem Artikel einige die Oscillationszeit der Ladungsschwingungen betreffenden Resultate darlegen, welche sich aus den aufgenommenen Serien von Schwingungscurven ergeben.

a) Serie mit variirender Capacität.

Zuerst wurde eine Serie von vier Schwingungscurven aufgenommen, indem die Capacität des Condensators, den Combinationen C_1, C_2, C_3 und C_5 entsprechend, variirt wurde, während dieselbe Combination L_4' an der Induktionsspule und derselbe Widerstand der Strombahn $W = 3.117$ Ohm beibehalten wurden. In fortlaufender Reihenfolge mit den Curven im Th. I sind diese vier Curven mit den Nummern 16 bis 19 bezeichnet; die Beobachtungen bei der Aufnahme von Curvenpunkten sind in den Tabellen B. I., die reducirten Werthe der Coordinaten der Curvenpunkte in den Tabellen C. I. zusammengestellt; die Tafel III veranschaulicht die Curven. Die Grösse der normalen Ladung verändert sich von Curve zu Curve; jedoch wurde dieselbe bei der Konstruktion der Curven für alle gleich 100 gesetzt und derselbe Maasstab für die Ordinaten der sich in dieser Weise ergebenden Ordinaten der Curvenpunkte überall gebraucht.

Bei der Bestimmung der mittleren Oscillationszeit für die zehn ersten Wellen nach dem auf p. 5 angegebenen Verfahren ergaben sich für die einzelnen Curven folgende Resultate, wobei ein tausendstel Secunde die Einheit ist.

N:o 16.	N:o 17.	N:o 18.	N:o 19.
2.751	4.416	6.359	9.043
2.755	4.389	6.298	9.024
2.778	4.534	6.240	8.978
2.785	4.462	6.308	8.972
2.735	4.287	6.139	8.855
2.737	4.325	6.206	8.822
2.668	4.413	6.256	8.953
2.673	4.438	6.223	8.842
2.801	4.389	6.104	8.930
2.728	4.235	6.076	8.981
2.741	4.389	6.221	8.940

Es entsteht jetzt die Frage: in welcher Weise sind die Werthe der mittleren Oscillationszeit abhängig von der Grösse der Capacität des Condensators? Wenn die Induktionsspule keinen Eisenkern enthält, so ist nach dem im Th. I Gefundenen die Oscillationszeit der Ladungsschwingungen proportional der Quadratwurzel aus der Capacität, in Uebereinstimmung mit der Formel von Thomson

(7) $$T = 2\pi\sqrt{C\,L}.$$

Sehen wir zu, ob dies noch zutrifft wenn die Induktionsspule mit einem Eisenkerne versehen ist. Bildet man zu diesem Zwecke aus den in obiger Tabelle enthaltenen Werthen von T und aus den p. 65, Th. I angegebenen Werthen von C den Quotienten $\frac{T}{\sqrt{C}}$, so findet man, von einem Faktor 10^5 abgesehen, die Werthe:

bei der Curve	N:o 16	N:o 17	N:o 18	N:o 19
	1.922	1.949	1.956	1.988.

Diese Werthe würden ergeben, dass der Quotient $\frac{T}{\sqrt{C}}$ mit wachsendem Werthe von C zunimmt. Hierbei ist jedoch zu bemerken, dass die in der obigen Tabelle enthaltenen Werthe von T sich auf Schwingungscurven beziehen, für welche die normale Ladung des Condensators und die effektive Stromstärke während der Schwingungen nicht dieselben sind. Folglich variiren auch

die magnetische Induktion im Eisenkerne und der mittlere Selbstinduktionscoefficient der Spule von Curve zu Curve. Um eine wenigstens angenäherte Correction der gefundenen Oscillationszeiten wegen der Veränderungen des Selbstinduktionscoefficienten zu erzielen, gebrauche ich ein Verfahren, welches ich für die Curve N:o 16 als Beispiel erklären werde. Ich berechne zuerst mit Hülfe der Gl. (1), p. 7 für die Combination C_5, L_4' eine Oscillationszeit mit Anwendung desjenigen Werthes der normalen Ladung, welcher der Curve N:o 16 angehört, bilde sodann den Quotienten der beobachteten Schwingungsdauer der Curve N:o 19 $T = 8.940$ Millisec. und der soeben berechneten Oscillationszeit für die Comb. C_5, L_4' und multiplicire schliesslich die beobachtete Schwingungsdauer der Curve N:o 16 mit diesem Quotienten. Indem dieses Verfahren auf die Schwingungscurven N:o 16, N:o 17 und N:o 18 angewendet wurde, ergab sich die folgende Zusammenstellung von Oscillationszeiten.

Nummer.	Combination C, L'.	C in Mikrofarad.	Normale Ladung Q.	Beob. Oscillationszeit.	Reduktionsfaktor.	Reducirte Oscillationszeit.
16	C_1, L_4'	0.2033	4.10	2.741	1.0230	2.804
17	C_2, L_4'	0.5071	10.24	4.389	1.0190	4.472
18	C_3, L_4'	1.0119	20.39	6.221	1.0128	6.301
19	C_5, L_4'	2.0229	40.92	8.940	1.0000	8.940

Wenn man jetzt den Quotienten $\frac{T}{\sqrt{C}}$ mit Anwendung der reducirten Werthe von T bildet, so findet man

bei der Curve	N:o 16	N:o 17	N:o 18	N:o 19
	1.967	1.986	1.981	1.988

Die Uebereinstimmung dieser Zahlen mit einander berechtigt zu dem Schlusse, dass unter übrigens gleichen Umständen die Oscillationszeit der Ladungsschwingungen sich proportional der Quadratwurzel aus der Capacität verändert, auch wenn die Induktionsspule einen Eisenkern enthält.

Die mittlere Oscillationszeit der betrachteten Ladungsschwingungen kann auf Grund des obigen Resultates in der Form

(8) $$T = 2\pi\sqrt{C\,L'}$$

dargestellt werden. Es bedeutet hierbei L' eine von der Capacität C unabhängige Grösse, deren Einheit diejenige eines Selbstinduktionscoefficienten ist. Für die Curve N:o 19 würde man finden

$$L' = 1.0008 \times 10^9 \text{ cm.}$$

Wir kommen im Art. 3, *c)* auf die wahre Bedeutung der somit eingeführten Grösse L' zurück. Es wird sich zeigen, dass L' thatsächlich als ein Selbstinduktionscoefficient aufzufassen ist. Alsdann ist auch die Gleichung (8) ganz analog der Thomson'schen Formel für die Oscillationszeit. (I, (26), p. 28).

b) Serie mit variirendem Widerstande.

Bei der zweiten Serie von Schwingungscurven blieben die Combinationen C_3 am Condensator und L_4' an der Induktionsspule unverändert, während der Widerstand der Strombahn nach und nach vergrössert wurde. Zu dieser Serie gehören, ausser der Curve N:o 19 aus der ersten Serie, drei neue Curven, welche mit den Nummern 20, 21 und 22 bezeichnet sind. Die betreffenden Beobachtungen und Coordinatenberechnungen sind enthalten in den Tabellen B. II und C. II; die Curven selbst sind auf der Tafel IV veranschaulicht.

Bei der Ausmessung der Oscillationszeiten dieser Curven nach dem auf p: 5 beschriebenen Verfahren ergaben sich folgende Zahlen, welche alle in tausendstel Secunden ausgedrückt sind.

N:o 19.	N:o 20.	N:o 21.	N:o 22.
$W = 3.117\,\Omega.$	$W = 24.607\,\Omega.$	$W = 41.980\,\Omega.$	$W = 65.022\,\Omega.$
Siehe oben.	9.140	9.076	9.090
	8.970	9.034	8.946
	8.908	8.914	8.825
	8.859	8.843	8.969
	8.894	8.819	8.770
	8.791	8.734	8.890
	8.859	8.830	8.776
	8.844	8.725	8.779
	8.770	8.954	8.736
	8.765	8.726	8.728
8.940	8.880	8.866	8.851

Die Tabelle zeigt, dass die mittlere Oscillationszeit während der zehn ersten vollständigen Schwingungen der Ladung mit wachsendem Widerstande der Strombahn abnimmt, wenn auch nur ziemlich langsam. Thatsächlich giebt es hierbei zwei in verschiedenem Sinne wirkende Ursachen. Ebenso wie in dem Falle einer eisenfreien Induktionsspule muss die Oscillationszeit als eine direkte Folge der Vermehrung des Widerstandes eine Zunahme erleiden, welche jedoch nur bei relativ grossen Widerständen mehr bemerkbar sein kann; andererseits ergiebt sich aber durch die Vermehrung des Widerstandes der Strombahn eine Abnahme der effektiven Stromstärke während der Schwingungen, der magnetischen Induktion im Eisenkerne und der Selbstinduktion der Induktionsspule, und somit indirekt eine Abnahme der Oscillationszeit. Das oben gefundene Resultat zeigt, dass unter den bei den Experimenten vorhandenen Verhältnissen die letztere Ursache die überwiegende ist. Eine mehr eingehende Untersuchung der Wirkung der beiden genannten Ursachen auf die Oscillationszeit bei Anwendung wesentlich grösserer Widerstände in der Strombahn, als die jetzt gebrauchten, fiel ausserhalb des Planes dieses Theiles meiner Arbeit.

c) Serie mit variirender Selbstinduktion.

Zu dieser dritten Serie von Schwingungscurven gehören ausser der Curve N:o 19 zwei neue Curven, N:o 23 und N:o 24. Für diese drei Curven ist die Capacität des Condensators dieselbe, nämlich $C_5 = 2.0229$ M. F., während die Selbstinduktion von Curve zu Curve verändert worden ist, den Combinationen L_1', L_2', und L_4' entsprechend. Die Grösse der normalen Ladung bleibt für die drei Curven sehr nahe unverändert; der Widerstand W verändert sich von Curve zu Curve, aber nur innerhalb enger Grenzen. Die Beobachtungen von Curvenpunkten finden sich in der Tabelle B. III; die auf Grund derselben berechneten Curvenpunktcoordinaten sind in der Tabelle C. III zusammengestellt. Die Tafel V veranschaulicht die drei Curven der Serie.

Für die Oscillationszeiten, in tausendstel Secunden ausgedrückt, wurde gefunden:

N:o 23.	N:o 24.	N:o 19.
Comb. C_5, L_1'.	Comb. C_5, L_2'.	Comb. C_5, L_4'.
$W = 1.152\ \Omega$.	$W = 1.703\ \Omega$.	$W = 3.117\ \Omega$.
3.381	5.612	Siehe oben.
3.363	5.587	
3.363	5.590	
3.275	5.446	
3.472	5.444	
3.126	5.400	
3.515	5.462	
3.113	5.477	
3.298	5.422	
3.234	5.270	
3.314	5.474	8.940

Diese Zahlen zeigen, dass die Oscillationszeit der Ladungsschwingungen mit wachsendem Werthe der Selbstinduktion zunimmt. Thatsächlich ist von diesem, fast selbstverständlichem Resultate schon im Vorhergehenden Gebrauch gemacht worden. Zu einer genaueren Untersuchung der Abhängigkeit zwischen Selbstinduktion und Oscillationszeit kommen wir unten unter *c)* zurück.

Vergleicht man die in der obigen Tabelle enthaltenen Oscillationszeiten mit den entsprechenden bei eisenfreier Induktionsspule, welche waren (p. 87, Th. I)

$T = 2.635$ Millisec. für die Comb. C_5, L_1,
$T = 3.894$ Millisec. für die Comb. C_5, L_2,
$T = 6.852$ Millisec. für die Comb. C_5, L_4,

so ergiebt sich, dass eine wesentliche Zunahme der Perioden der Schwingungen eingetreten ist, freilich wieder als eine natürliche Folge der Vergrösserung der Selbstinduktion der Induktionsspule durch die Magnetisirung des Eisenkernes.

d) Messung von Selbstinduktionscoefficienten.

Es ist schon hervorgehoben worden (p. 1), dass der Selbstinduktionscoefficient der Induktionsspule während der Schwingungen der Condensatorladung veränderlich ist. Das Gesetz dieser Veränderungen ist nicht genauer bekannt; auch wird die Aufstellung eines Gesetzes durch den Umstand besonders erschwert, dass der Selbstinduktionscoefficient und der Ladungsvorgang von einander gegenseitig beeinflusst sind. Ich werde hier annehmen, dass für die oben berechneten Oscillationszeiten der Schwingungscurven N:o 23, 24 und 19 ein gewisser mittlerer Werth des Selbstinduktionscoefficienten der betreffenden Abtheilung der Induktionsspule maassgebend ist. Um die Abhängigkeit zwischen der Oscillationszeit und diesem maassgebenden Selbstinduktionscoefficienten näher beurtheilen zu können, habe ich für die Combinationen L_1', L_2' und L_4' nach den beiden im Th. I dieser Arbeit gebrauchten Methoden (p. 58 und 61) die Selbstinduktionscoefficienten gemessen. Es ist augenscheinlich, dass diese Methoden wieder gewisse mittlere Werthe geben müssen. Die betreffenden Beobachtungen mit Anwendung von Wechselstrom, mit den Periodenzahlen 60, 80 und 100, sind enthalten in den Tabellen A; die Beobachtungen mit Anwendung von Gleichstrom finden sich in den Tabellen B, un zwar in beiden Fällen in extenso um einen besseren Ueberblick der Veränderungen des mittleren Selbstinduktionscoefficienten L' mit der Stromstärke zu gewähren. Bei der Berechnung ergaben sich folgende Werthe von L', wobei auch die Stromstärke — effektive Stromstärke für die Wechselstromwerthe, Stromstärke im Brückenzweige mit der Spule, in dem stationären Zustande, für die Gleichstromwerthe — angegeben ist. Die Einheit der Werthe von L' ist Quadrant, die Einheit für die Werthe der Stromstärke ampère.

	Comb. L_1'.		Comb. L_2'.		Comb. L_4'.	
	Stromstärke in amp.	Selbstinduktionscoefficient.	Stromstärke in amp.	Selbstinduktionscoefficient.	Stromstärke in amp.	Selbstinduktionscoefficient.
Gleichstrom.	0.02	0.1265	0.01	0.3466	0.004	0.9397
	„	0.1262	„	0.3468	„	0.9276
	„	0.1257	„	0.3446	„	0.9355.
	„	0.1256	„	0.3441	„	0.9346
	Mittel:	0.1260	Mittel:	0.3455	Mittel:	0.9344
Wechselstrom von 100 Perioden.	0.5775	0.1661	0.2151	0.4572	0.08456	1.1252
	0.6116	0.1693	0.2232	0.4621	0.09024	1.1332
	0.6466	0.1696	0.2329	0.4639	0.09770	1.1502
	0.6731	0.1678	0.2454	0.4666	0.10550	1.1571
Wechselstrom von 80 Perioden.	0.7331	0.1695	0.2627	0.4776	0.1056	1.1729
	0.7675	0.1717	0.2826	0.4832	0.1106	1.1885
	0.8058	0.1723	0.2935	0.4864	0.1154	1.1905
	0.8597	0.1727	0.3134	0.4868	0.1217	1.1957
Wechselstrom von 60 Perioden.	0.9702	0.1760	0.3380	0.4889	0.1358	1.2025
	1.0133	0.1775	0.3610	0.4902	0.1400	1.2081
	1.0874	0.1775	0.3880	0.4911	0.1472	1.2136
	1.1809	0.1769	0.4146	0.4909	0.1544	1.2154

Die Tabelle zeigt sehr deutlich eine regelmässige Zunahme des Selbstinduktionscoefficienten mit wachsender Stromstärke. Leider umfassen die mit Wechselstrom gefundenen Werthe von L' nur ein relativ kleines Intervall, welches von den mit Gleichstrom gefundenen Werthen ziemlich entfernt liegt. Mit den angewendeten Methoden und Apparaten hätte diese Lücke auch nur ganz unwesentlich verkleinert werden können. Es lag nicht in dem Plane meiner Arbeit eine vollständige Untersuchung über die Veränderungen des Selbstinduktionscoefficienten einer Spule mit Eisenkern mit der Stromstärke auszuführen, welches den Gegenstand einer besonderen Arbeit bilden könnte. Um jedoch auf Grund der oben angegebenen experimentell bestimmten Werthe der Selbstinduktionscoefficienten wenigstens ganz rohe Werthe für den im Anfang dieses Artikels dargestellten Zweck zu erhalten, habe ich für jede der Comb. L_1', L_2' und L_4' eine Curve konstruirt, deren Punkte die Stromstärke zur Abscisse und den entsprechenden Werth des Selbstinduktionscoefficienten

zur Ordinate haben. Die Curven sind auf der Tafel II, Fig. 2 veranschaulicht. Für die Konstruktion jeder Curve wurden nur vier Punkte angewendet, nämlich der aus der Bestimmung mittelst Gleichstrom sich ergebende Punkt, sowie die Schwerpunkte für jede der drei Gruppen von vier Punkten, welche den Bestimmungen mittelst Wechselstrom von derselben Periode angehören. Aus den Curven geht hervor, dass der Selbstinduktionscoefficient einer Spule mit Eisenkern anfangs sehr rasch, dann aber langsamer mit wachsender Stromstärke zunimmt.

c) Serie mit variirender Selbstinduktion.

(Fortsetzung)

Kehren wir jetzt zurück zu den Schwingungscurven N:o 23, 24 und 19 in der Serie mit variirender Selbstinduktion. Es handelt sich, um die Selbstinduktionscoefficienten für die verschiedenen Combinationen aus den soeben erhaltenen Curven bestimmen zu können, zunächst um die mittlere effektive Stromstärke während der zehn ersten vollständigen Schwingungen der Ladung. Für die Berechnung eines für unseren Zweck völlig genügenden angenäherten Werthes der effektiven Stromstärke betrachte ich eine einzelne Welle der Curve und nehme an, dass das Dämpfungsverhältniss innerhalb dieser Welle unveränderlich bleibt. Die Gleichung einer solchen Welle ist mit genügender Annäherung

$$q = Q - A\,k^{-2\frac{t}{T}} \cos 2\pi \frac{t}{T} = Q - A\,e^{-2\alpha\frac{t}{T}} \cos 2\pi \frac{t}{T} \qquad (0 \leqq t \lesssim T), \tag{9}$$

wobei die Welle mit einem Wellenthal anfängt, A die zugehörige Anfangsamplitude, Q die normale Ladung und $\alpha = \ln k$ das logaritmische Decrement bei der Dämpfung bezeichnet. Für die augenblickliche Stromstärke ergiebt sich hieraus

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{2A}{T} e^{-2\alpha\frac{t}{T}} \left(\pi \sin 2\pi \frac{t}{T} + \alpha \cos 2\pi \frac{t}{T} \right) \tag{10}$$

und nach einiger Rechnung, mit Anwendung der Formel

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2\, dt, \tag{11}$$

für die effektive Stromstärke während der betrachteten Schwingung

$$I = \frac{A}{T}\sqrt{\frac{\pi^2 + 2\alpha^2}{2} \cdot \frac{1 - e^{-4\alpha}}{\alpha}}, \tag{12}$$

oder mit genügender Genauigkeit, indem die zweite und höhere Potenzen von α vernachlässigt werden,

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2\pi}{T} A (1 - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2\pi}{T} A (1 - \ln k). \tag{13}$$

Für ungedämpfte Schwingungen von regelmässiger Sinusform ($\alpha = 0$) hätte man entsprechend

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2\pi}{T} A.$$

Weil $\frac{2\pi}{T} A$ die maximale Stromstärke während der Schwingungen ist, sagt diese Formel das bekannte Resultat aus, dass die effektive Stromstärke den $\frac{1}{\sqrt{2}}$ Theil der maximalen Stromstärke ausmacht. Die Formel (13) zeigt, dass die effektive Stromstärke für gedämpfte Schwingungen etwas kleiner ist als für ungedämpfte.

Nach der Formel (13) ergiebt sich jetzt für die zehn ersten Wellen einer Schwingungscurve mit Anwendung der p. 27, Th. I eingeführten Bezeichnungen der Amplituden, indem zugleich die einzelnen Werthe von k genügend genau mit einem mittleren Werthe k_m ersetzt werden, eine mittlere effektive Stromstärke

$$I_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2\pi}{T} \frac{A_0 + A_2 + A_4 + \ldots + A_{18}}{10} (1 - \ln k_m). \tag{14}$$

Diese Formel giebt bei Anwendung auf die Curven N:o 23, 24 und 19 die folgenden Werthe der mittleren effektiven Stromstärke:

für die Curve N:o	23	$I_m = 0.025$ amp.,
„ „ „	24	$I_m = 0.017$ „
„ „ „	19	$I_m = 0.012$ „

Aus den Curven Fig. 2, Taf. II, welche die Selbstinduktionscoefficienten L' als Funktion der Stromstärke darstellen, wird jetzt gefunden:

für die Curve N:o 23	$L' = 0.129 \times 10^9$ cm.
„ „ „ „ 24	$L' = 0.366 \times 10^9$ „
„ „ „ „ 19	$L' = 1.000 \times 10^9$ „

Es muss bemerkt werden, dass diese Werthe auf einige Procent fehlerhaft sein können. Sie liegen ziemlich nahe den mittelst Gleichstrom direkt bestimmten Werthen. Durch Vermehrung und zweckmässige Wahl der Beobachtungsreihen für Gleichstrom hätte man wohl diesen Werthen noch ein wenig näher kommen können. Jedoch wäre hiermit für den gegenwärtigen Zweck die für die Curven N:o 23, 24 und 19 maassgebenden Selbstinduktionscoefficienten zu bestimmen, nur wenig gewonnen gewesen, weil die Verhältnisse während der Aufnahme von Schwingungscurven und während der Bestimmung von Selbstinduktionscoefficienten mittelst der Gleichstrommethode von einander wesentlich verschieden sind und somit für den einen Fall gefundene Werthe nicht ohne weiteres in dem anderen Falle verwendbar sind, wenigstens wenn eine bedeutendere Genauigkeit verlangt wird.

Wir sind jetzt im Stande zu prüfen, wenigstens annähernd, ob die Oscillationszeit während der Schwingungen proportional der Quadratwurzel aus dem Selbstinduktionscoefficienten ist, und ob eine mit der Thomson'schen Formel analoge Formel

(8) $$T = 2\pi\sqrt{C L'}$$

besteht, wobei L' den auf die mittlere effektive Stromstärke bezogenen Selbstinduktionscoefficienten bezeichnet. Zu diesem Zwecke habe ich in der folgenden Tabelle die beobachteten und die nach der Formel (8) mit Anwendung der obigen L'-Werthe berechneten Werthe der Oscillationszeit zusammengestellt.

Nummer der Curve.	Comb. C, L'.	L' in Quadr.	T beob.	T berechn.	Diff. in Proc.
N:o 23	C_5, L_1'	0.129	3.314	3.21	+ 3.1
N:o 24	C_5, L_2'	0.366	5.474	5.41	+ 1.2
N:o 19	C_5, L_4'	1.000	8.940	8.94	0.0

Die erste Differenz in der letzten Spalte ist zwar etwas gross, aber jedenfalls völlig erklärlich durch Beobachtungsfehler, besonders durch die Unsicherheit des Werthes von L'; dass die Uebereinstimmung bei der Curve N:o 19 ganz genau ist, ist zufällig. Als Resultat dieser Untersuchung geht somit hervor, dass die Formel (8) für die Oscillationszeit der betrachteten Ladungsschwingungen gilt, wenigstens mit grosser Annäherung. Es wäre jedoch angemessen, über die Abhängigkeit zwischen Oscillationszeit und Selbstinduktionscoefficient bei den Ladungsschwingungen in dem Falle, dass die Strombahn eine Induktionsspule mit Eisenkern enthält, eine noch mehr eingehende Untersuchung als die obige zu unternehmen, und zwar könnte hierbei am besten die experimentelle Bestimmung der Abhängigkeit zwischen der Stromstärke und dem Selbstinduktionscoefficienten innerhalb möglichst ausgedehnter Grenzen zum Ausgangspunkte gewählt werden.

Wenn man die Gl. (8) in Bezug auf L' auflöst, so erhält man

$$L' = \frac{T^2}{4\pi^2 C}. \tag{15}$$

Es kann diese Formel benutzt werden für die experimentelle Bestimmung von Selbstinduktionscoeffictenten durch Beobachtung der Oscillationszeit der Ladungsschwingungen. Eine solche Bestimmung ist in der That schon ausgeführt worden, indem auf p. 17 für die Combination L_4' der Werth $L_4' = 1.0008 \times 10^9$ cm gefunden wurde. Natürlich darf jedoch nicht vergessen werden, dass ein Werth des Selbstinduktionscoefficienten einer Spule mit Eisenkern eigentlich erst dann Bedeutung hat, wenn der entsprechende Werth der Stromstärke oder der magnetischen Induktion bekannt ist.

4. Untersuchungen über die Dämpfung der Ladungsschwingungen.

Für eine nähere Untersuchung über die Dämpfung der Oscillationen bei der Ladung eines Condensators in dem Falle, dass die Strombahn eine Induktionsspule mit Eisenkern enthält, empfiehlt es sich, analogerweise wie im Th. I, bei unverändert gelassener Capacität C und Combination L' an der Induktionsspule, den Widerstand W der Strombahn mit Anwendung induktionsfreier Reostaten nach und nach zu vermehren, und jedesmal die Scheitelpunkte der sich ergebenden Ladungscurven zu beobachten.

Ich habe vier solche Serien von Dämpfungsbestimmungen ausgeführt, welche sich zu zwei Reihen ordnen. In der Reihe I blieb die Combination L' an der Induktionsspule unverändert, gleich L_4', während der Capacität C die drei Werthe C_2, C_3 und C_5 nach einander gegeben wurden. In der Reihe II wurde die Capacität unverändert gleich C_5 beibehalten und die Selbstinduktion der Spule, den Combinationen L_2' und L_4' entsprechend, abgeändert.

In jeder Serie kamen fünf Werthe des Widerstandes W in Betracht; die grössten angewendeten Werthe von W betragen etwa 65 Ohm.

Die betreffenden Beobachtungen von Scheitelpunkten (d. h. hier Minimipunkten) der Curven oscillatorischer Ladung sind zusammengestellt in den Tabellen E I und E II, wobei jedoch nur Mittelwerthe angeführt sind, mit Ausnahme der Curve N:o 19, für welche die Tabellen die vollständigen Beobachtungen enthalten. Die Tabellen geben ausserdem die aus je zwei benachbarten Minimipunkten der Curven berechneten Werthe des Dämpfungsverhältnisses k und des entsprechenden logaritmischen Decrementes $\alpha = \ln k$. Einschliesslich zweier einzelnen Bestimmungen, für die Combinationen C_1, L_4' und C_5, L_1' beziehen sich die in den Tabellen E I und E II enthaltenen Dämpfungsmessungen auf 22 verschiedene Ladungscurven.

Sämmtliche Ladungscurven, deren Minimipunkte in den Tabellen E I und E II gegeben sind, bestätigen die im Art. 2 *c)* dargelegte Abnahme des Dämpfungsverhältnisses k (sowie des logaritmischen Decrementes α) der Schwingungen mit der Zeit. Nur im Anfang der Curve ist eine Ausnahme von diesem Gesetze zu erkennen, indem k und α während der zwei oder drei ersten Schwingungen der Ladung statt abzunehmen sogar zunehmen können.

Das Dämpfungsverhältniss k bei der Curve N:o 19 ist auf p. 10 oben als eine lineare Funktion der Zahl n, welche durch den Ort in der Schwingungscurve bestimmt ist, dargestellt worden. Mit demselben Grade von Genauigkeit ist das logaritmische Decrement α einer ähnlichen Darstellung fähig. Mit Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate habe ich für die Ladungscurven der oben erwähnten Reihen I und II die der Gl. (3) entsprechenden linearen Relationen für α berechnet, und dieselben in den folgenden Tabellen zusammengestellt.

I *b)* $C = 0.5071$ M. F. $L' = L_4'$. 10 Acc.	
W in Ohm.	α als Funktion von n.
3.109	$\alpha = 0.0767 - 0.00106\ n$,
12.514	$\alpha = 0.0872 - 0.00121\ n$,
24.468	$\alpha = 0.1000 - 0.00130\ n$,
42.040	$\alpha = 0.1193 - 0.00161\ n$,
65.097	$\alpha = 0.1432 - 0.00162\ n$.

I *c)* $C = 1.0119$ M. F. $L' = L_4'$. 10 Acc.	
W in Ohm.	α als Funktion von n.
3.117	$\alpha = 0.0746 - 0.00099\ n$,
12.508	$\alpha = 0.0899 - 0.00135\ n$,
24.625	$\alpha = 0.1072 - 0.00144\ n$,
42.006	$\alpha = 0.1333 - 0.00172\ n$,
65.057	$\alpha = 0.1810 - 0.00294\ n$.

I *d)* $C = 2.0229$ M. F. $L' = L_4'$. 10 Acc.	
W in Ohm.	α als Funktion von n.
3.129	$\alpha = 0.0760 - 0.00109\ n$,
12.513	$\alpha = 0.0963 - 0.00138\ n$,
24.643	$\alpha = 0.1251 - 0.00187\ n$,
42.023	$\alpha = 0.1566 - 0.00200\ n$,
65.069	$\alpha = 0.2106 - 0.00276\ n$.

II *b)* $C = 2.0229$ M. F. $L' = L_2'$. 10 Acc.	
W in Ohm.	α als Funktion von n.
1.710	$\alpha = 0.0983 - 0.00168\ n$,
11.077	$\alpha = 0.1303 - 0.00215\ n$,
23.203	$\alpha = 0.1759 - 0.00334\ n$,
40.580	$\alpha = 0.2343 - 0.00404\ n$,
63.627	$\alpha = 0.3292 - 0.00820\ n$.

Die Serie II *c)* ist identisch mit der Serie I *d)*.

Sämmtliche Serien zeigen die Vergrösserung der Dämpfung der Schwingungen mit zunehmendem Widerstande der Strombahn.

Es sollte jetzt näher untersucht werden, welche Abhängigkeit zwischen dem Decremente α und den Constanten der Strombahn besteht. In dieser Beziehung sind jedoch kaum irgend welche einfache Resultate zu erwarten, wenn man bedenkt, dass α eine Funktion von mehreren Argumenten ist, wie von dem Orte in der Schwingungscurve, von der Grösse der normalen Ladung, von dem Widerstande der Strombahn, von der Capacität des Condensators und von dem veränderlichen und wenig scharf bestimmten Selbstinduktionscoefficienten der Induktionsspule. Ebenso wie in dem Falle, in welchem die Induktionsspule keinen Eisenkern enthält, muss α ausserdem noch von der Leitungsfähigkeit der isolirenden Schichten der Induktionsspule wesentlich beeinflusst sein (Vergl. I, p. 91 u. folg.). Hierzu kommen weiter Wirkungen der Variationen der Capacität des Condensators während der Schwingungen, der magnetischen Hysteresis u. s. w. Ich werde mich hier nur auf einige wenige Punkte betreffend die Variabilität von α beschränken.

Ich bezeichne das erste, von n unabhängige Glied der obigen Ausdrücke für α, mit α_0 und nenne es Anfangsdecrement. Dieses Anfangsdecrement scheint einfacheren Gesetzen zu folgen als der Faktor von n, und kommt im Folgenden allein in Betracht. Indem man innerhalb einer und derselben Serie von Dämpfungsbestimmungen die Werthe des Widerstandes als Abscissen, die Werthe von α_0 als Ordinaten aufträgt, erkennt man dass α_0 unter sonst gleichen Umständen eine lineare Funktion des Widerstandes W ist. Diese Abhängigkeit wird durch die Geraden der Tafel I, Fig. 3 veranschaulicht. Für diese Geraden ergeben sich nach der Methode der kleinsten Quadrate die folgenden Gleichungen, wobei der Widerstand W in Ohm zu rechnen ist.

$$\text{I } b) \qquad \alpha_0 = 0.0736 + 0.00107\ W,$$

$$\text{I } c) \qquad \alpha_0 = 0.0704 + 0.00150\ W\ ^{1}),$$

$$\text{I } d) \qquad \alpha_0 = 0.0696 + 0.00215\ W.$$

---

[1]) Bei der Ableitung dieser Gleichung wurden nur die vier ersten α-Bestimmungen der Serie gebraucht. Die letzte, dem grössten Widerstande entsprechende Bestimmung scheint nämlich fehlerhaft zu sein, besonders zufolge des grossen aus den Minimipunkten (4) und (6) sich ergebenden Werthes von α (vergl. Tab. E. I. c. N:o 5). Mit Anwendung sämmtlicher fünf Bestimmungen würde man erhalten

$$\alpha_0 = 0.0674 + 0.00169\ W.$$

II *b)* $\alpha_0 = 0.0896 + 0.00371\ W,$

II *c)* $\alpha_0 = 0.0696 + 0.00215\ W.$

Die Coefficienten dieser linearen Gleichungen mögen mit a und b bezeichnet werden, so dass

(16) $$\alpha_0 = a + b\,W.$$

Die Gleichungen zeigen, dass der Coefficient b, welcher unabhängig ist von einem constanten Fehler in den Werthen von W (vergl. die Note p. 3), mit wachsendem Werthe der Capacität C zunimmt und mit wachsendem Werthe des Selbstinduktionscoefficienten L' abnimmt. Es stimmt dieses Resultat mit demjenigen überein, welches im Th. I gefunden wurde für Schwingungen in einer Strombahn, enthaltend eine Induktionsspule ohne Eisenkern. Die Uebereinstimmung beider Resultate kann sogar etwas weiter getrieben werden. Es ergab sich für die Spule ohne Kern (Th. I, p. 95) aus der Theorie und mit einer gewissen Annäherung auch aus den Experimenten

(17) $$b = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{C}{L'}}.$$

Prüfen wir, ob eine ähnliche Formel auch in dem jetzt betrachteten Falle gültig ist. Indem wir in der Reihe I den Quotienten von b mit $\sqrt{C}$ bilden, finden wir, von einem Faktor 10^4 abgesehen, die drei nahe gleichen Werthe

4.75 4.72 4.78.

Es würde somit b proportional der Quadratwurzel aus der Capacität sein. Jedoch darf nicht unerwähnt gelassen werden, dass die Richtigkeit dieses Resultates in Frage gestellt wird durch den Umstand, dass die den verschiedenen Serien der Reihe I angehörigen Bestimmungen des Anfangsdecrementes für ungleiche Grösse der normalen Ladung erhalten sind, während die Dämpfung nach der Untersuchung im Art. 2 *d)* unter sonst gleichen Umständen von der Grösse der normalen Ladung wesentlich abhängig ist. Setzen wir nichtdestoweniger die Proportionalität zwischen b und $\sqrt{C}$ voraus, und berechnen die Werthe von b in der Reihe II nach der Formel

(18) $$b = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{C}{L'}}$$

mit Anwendung der auf p. 24 angegebenen L'-Werthe, so finden wir

$$b = 0.00369$$

und

$$b = 0.00223$$

für II b und II c bez. Die Uebereinstimmung dieser Werthe mit den experimentell erhaltenen würde ergeben, dass der in dem Ausdrucke (16) für das Anfangsdecrement eingehende Coefficient b nach der Formel (18) berechnet werden kann, wobei als Werth des Selbstinduktionscoefficienten L' der für die Oscillationszeit der Schwingungen maassgebende Werth gebraucht werden darf.

5. *Ueber des Verhalten des Eisens während der Schwingungen.*

Während der Schwingungen der Condensatorladung wechselt die Stromstärke periodisch ihre Richtung und Grösse. Sie fängt mit dem Werthe Null an und nähert sich wieder mit fortschreitender Dämpfung der Schwingungen dem Grenzwerthe Null. Theoretisch wird dieser Grenzwerth erst für $t = \infty$, praktisch aber innerhalb kurzer Zeit, etwa in einigen Secunden, erreicht. Gleichzeitig mit dem Strom wechselt die Magnetisirung des weichen Eisenkernes. Der Kern ist ursprünglich unmagnetisch und kehrt wieder in den unmagnetischen Zustand zurück, indem die Stromstärke Null wird und die Ladung des Condensators ihren normalen Werth annimmt. Während des Magnetisirungsprocesses geht im Eisenkerne Energie verloren zufolge magnetischer Hysteresis und Foucault'scher Ströme. Durch Berechnung der verschiedenen Energiemengen während der Schwingungen kann dieser Energieverlust ermittelt werden, und somit das Verhalten des Eisens während der beobachteten, relativ schnellen elektrischen Schwingungen beurtheilt werden. Selbstverständlich müssten jedoch die Experimente, um zu brauchbaren Resultaten zu führen, speciell für diesen Zweck, durch angemessene Wahl der Constanten der Strombahn, der Form der Spule des Eisenkernes u. s. w., angeordnet sein. Weil dies mit den oben beschriebenen Experimenten, welche die direkte Untersuchung der Schwingungen der Ladung zum Hauptzweck hatten, der Fall nicht war, werde ich mich hier auf einige Berechnungen der Energien während der Schwingungen für die im Art. 2 näher behandelte Ladungscurve N:o 19 beschränken.

Zuerst eine Bemerkung zu dem Art. 2, p. 29 des Th. I, worin die Energien für eine regelmässig gedämpfte Schwingungscurve berechnet wurden. Nach der Zeit t vom Beginn der Ladung sind diese Energien: die von der Batterie in der Zeit t gelieferte Energie E_b, die als Ladung des Condensators vorhandene Energie E_q, die elektrodynamische Energie E_i und die in Joule'sche Wärme verwandelte Energie E_w. Auf p. 30 finden sich die Werthe der drei Energien E_q, E_i und E_w; für E_b berechnet man mit den vorher gebrauchten Bezeichnungen

$$E_b = E\int_0^t i\,dt = C\,E^2\left\{1 - \frac{e^{-\frac{W}{2L}t}}{\sqrt{1-\frac{C\,W^2}{4\,L}}}\cos\left(2\,\pi\,\frac{t}{T} - \omega\right)\right\}, \tag{19}$$

und es bestätigt sich die das Princip der Erhaltung der Energie ausdrückende Gleichung

$$E_b = E_q + E_w + E_i, \tag{20}$$

wie eine einfache Controle zeigt.

Zur Zeit $t = \infty$ ist $E_b = E_B = C\,E^2$, $E_q = E_Q = \frac{1}{2}\,C\,E^2$, $E_w = E_W = \frac{1}{2}\,C\,E^2$, $E_i = 0$ und

$$E_B = E_Q + E_W. \tag{21}$$

Wenn die Induktionsspule einen Eisenkern enthält, wenn ihre isolirenden Schichten ein beachtungswerthes Leitungsvermögen besitzen oder wenn sonst Umstände vorhanden sind, durch welche der oben vorausgesetzte ideelle Schwingungsvorgang Störungen erleidet, so gelten die Gleichungen (20) und (21) nicht mehr, sondern treten rechts in denselben neue den Energieverbrauch im Eisenkerne sowie übrige etwaige Energieverluste ausdrückende Glieder hinzu, deren Summe mit E_r und E_R bez. bezeichnet werden mag. Somit ist jetzt

$$E_r = E_b - E_q - E_w - E_i, \tag{22}$$

$$E_R = E_B - E_Q - E_W. \tag{23}$$

Um eine Anwendung dieser Formeln auf die Ladungscurve N:o 19 zu ermöglichen, erlaube ich mir einige annähernde Annahmen. Ich nehme die

Oscillationszeit als constant an, gleich der mittleren Oscillationszeit T, ferner betrachte ich jede einzelne Welle der Curve als eine regelmässig gedämpfte Sinuswelle, indem ich die Gleichung der $n+1$:sten Welle in der Form

$$q = Q - A_{2n}\, e^{-2\alpha_{2n+1}\frac{t}{T}} \cos 2\pi \frac{t}{T} \qquad (0 \leq t \leq T) \tag{24}$$

nehme. Alsdann ergiebt sich für die Stromstärke innerhalb der betrachten Welle

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{2A_{2n}}{T} e^{-2\alpha_{2n+1}\frac{t}{T}} \left\{ \pi \sin 2\pi \frac{t}{T} + \alpha_{2n+1} \cos 2\pi \frac{t}{T} \right\}, \tag{25}$$

und die Veränderungen der in der Formel (22) enthaltenen Energien von dem Zeitpunkte nT zu dem Zeitpunkte $(n+1)\,T$, vom Beginn der Ladung gerechnet, sind

$$\triangle E_b = \frac{Q}{C}\int_0^T i\,dt = \frac{Q\,(A_{2n} - A_{2n+2})}{C}, \tag{26}$$

$$\triangle E_q = \frac{(A_{2n} - A_{2n+2})\ (2\,Q - A_{2n} - A_{2n+2})}{2\,C}, \tag{27}$$

$$\triangle E_w = W\int_0^T i^2\,dt = \frac{W}{2\,T}(A_{2n}^2 - A_{2n+2}^2)\,\frac{\pi^2 + 2\,\alpha_{2n+1}^2}{\alpha_{2n+1}}, \tag{28}$$

und genügend genau $\triangle E_i = 0$. Hieraus folgt dann

$$\triangle E_r = \triangle E_b - \triangle E_q - \triangle E_w. \tag{29}$$

Ferner ergiebt sich

$$E_B = \frac{Q^2}{C},$$

$$E_Q = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C},$$

d. h. die von der Batterie gelieferte totale Energie ist gleich dem doppelten Betrage der als Ladung des Condensators vorhandenen Energie.

Für die Curve N:o 19 berechnet man zunächst die Amplituden der Minimipunkte und die Decremente der einzelnen Wellen mit Anwendung des Werthes der normalen Ladung $Q = 40.58$ Mikrocoulomb und der folgenden Gleichung für k (vergl. p. 10)

$$k_{2n+1} = e^{-\alpha_{2n+1}} = 1.0783 - 0.00113\ (2n+1),$$

und erhält dann aus den Gleichungen (26), (27), (28) und (29) die Werthe der betreffenden Energieänderungen für die einzelnen Wellen, wobei $T = 8.940$ Millisec. und $W = 3.167$ Ohm zu nehmen ist. Die Resultate dieser Berechnungen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Nummer der Welle $= n+1$.	k_{2n+1}	α_{2n+1}	Anfangsamplitude A_{2n} in Mikrocoul.	$\triangle E_b$ in Erg.	$\triangle E_q$ in Erg.	$\triangle E_w$ in Erg.	$\triangle E_r$ in Erg.
1	1.0772	0.0744	40.58	1125	78	100	943
2	1.0749	0.0722	34.97	943	185	74	684
3	1.0727	0.0701	30.27	794	241	56	497
4	1.0704	0.0680	26.31	672	264	42	366
5	1.0681	0.0659	22.96	568	266	32	270
6	1.0659	0.0638	20.13	485	259	25	201
7	1.0636	0.0617	17.71	411	242	19	150
8	1.0614	0.0596	15.66	353	225	15	113
9	1.0591	0.0574	13.90	303	205	12	86
10	1.0568	0.0553	12.39	261	185	10	66
11	1.0546	0.0532	11.09	225	166	8	51
12	1.0523	0.0510	9.97	193	148	6	39
13	1.0501	0.0488	9.01	169	133	5	31
14	1.0478	0.0467	8.17	146	118	4	24
15	1.0455	0.0445	7.44	126	105	4	17
16	1.0433	0.0424	6.81	112	94	3	15
17	1.0410	0.0402	6.25	96	83	3	10
18	1.0388	0.0381	5.77	84	73	2	9
19	1.0365	0.0359	5.35	74	65	2	7
20	1.0342	0.0337	4.98	65	58	2	5
21	1.0320	0.0315	4.65	57	51	1	5
22	1.0297	0.0293	4.37	50	45	1	4
23	1.0275	0.0271	4.12	44	40	1	3
24	1.0252	0.0249	3.90	38	35	1	2
25	1.0229	0.0226	3.71	33	30	1	2
26	1.0207	0.0204	3.55	28	26	1	1
27	1.0184	0.0182	3.41	24	23	1	0
28	1.0162	0.0161	3.29	21	20	1	0

Wie die Tabelle zeigt, nimmt der Energieverlust $\triangle E_r$ von Welle zu Welle rasch ab. Gleichzeitig nehmen auch die maximale positive und negative Stromstärke innerhalb der Welle sowie die beiden Grenzwerthe der magnetisirenden Kraft ab.

Für den vollständigen Ladungsprocess in dem oben betrachteten speciellen Falle ergeben sich die folgenden Energiemengen:

Totale von der Batterie gelieferte Energie:	$E_B = 8140$ Erg.	
Als Ladung des Condensators auftretende Energie:	$E_Q = 4070$ „	
Als Joule'sche Wärme verloren gegangene Energie:	$E_W = 460$ „	(angenäh.)
Energieverlust im Eisenkerne sowie übrige Verluste:	$E_R = 3610$ „	„

Für eine wirkliche Bestimmung des Energieverlustes im Eisenkerne müssten die Experimente entweder so eingerichtet werden, dass die übrigen in E_r und E_R auftretenden Energiemengen einen möglichst kleinen Einfluss ausüben oder so, dass die Grösse dieser Einflüsse berechnet werden kann. Jedoch gehe ich auf eine Besprechung der hierbei in Betracht zu ziehenden Umstände nicht näher ein, ebenso wenig wie auf eine Beschreibung solcher Anordnungen, durch welche die zufolge magnetischer Hysteresis entstehenden Verluste im Eisenkerne von den durch Foucault'sche Ströme entstehenden unterschieden werden können. In diesen Fragen bleibt der Forschung ein weites Feld offen; es mag nur noch auf eine einschlägige Arbeit von I. Klemencic: „Ueber den Energieverbrauch bei der Magnetisirung durch oscillatorische Condensatorentladungen, Wied. Ann. 1896, N:o 6“ verwiesen werden.

Tabellen.

A. 1. Messung von Selbstinduktionscoefficienten mittelst Wechselstrom.

a. Reduktionsfactoren der Elektrodynamometern zur Verwandlung von Scalentheilen in ampère.

N:o 17565		N:o 17568		N:o 15187	
1)	0.0008062	1)	0.002913	1)	0.004881
2)	0.002554	2)	0.005056	2)	0.01017

Datum: 15. VII. 96.

b. Wechselstrom von 60 Perioden; 16-polige Maschine von Siemens & Halske.

Combination L'.	L_1'. E. D. N:o 15187 2)			L_2'. E. D. N:o 17568 1)			L_4'. E. D. N:o 17565 1)		
	E (Volt)	I (Sc. Th. & amp.)	Tourenzahl pro Min.	E (Volt)	I (Sc. Th. & amp.)	Tourenzahl pro Min.	E (Volt)	I (Sc. Th. & amp.)	Tourenzahl pro Min.
	64.8	95.4	452	62.8	116.1		62.05	168.4	
	64.75	95.4	451	62.4	115.7		62.05	168.5	
	64.75	95.4	453	62.8	116.1		62.05	168.4	
	64.8	95.4		62.75	116.1		62.05	168.4	
	64.85	95.4		62.8	116.2		62.05	168.4	
Mittel	64.79	95.40		62.71	116.04		62.05	168.42	
Red. Werthe	64.66	0.9702		62.58	0.3380		61.84	0.1358	
L' in Quadr.	0.1760			0.4889			1.2025		
	68.5	99,6		67.3	123.8		64.2	173.75	
	68.45	99.6		67.1	123.7		64.15	173.8	
	68.5	99.65		67.4	124.1		64.1	173.55	
	68.45	99.65		67.5	124.0		64.1	173.45	
	68.5	99.7		67.6	124.1		64.15	173.65	
Mittel	68.48	99.64		67.38	123.94		64.14	173.64	
Red. Werthe	68.12	1.0133		67.01	0.3610		64.05	0.1400	
L' in Quadr.	0.1775			0.4902			1.2081		
	73.6	107.25		71.65	131.9		68.05	182.75	
	73.15	106.8		72.6	133.8		68.05	182.65	
	73.15	106.8		72.6	133.8		68.0	182.6	
	73.2	106.85		72.4	133.4		68.0	182.6	
	73.1	106.9		72.05	133.0		68.0	182.6	
Mittel	73.24	106.92		72.26	133.18		68.03	182.64	
Red. Werthe	73.11	1.0874		72.15	0.3880		67.65	0.1472	
L' in Quadr.	0.1775			0.4911			1.2136		
	79.0	116.1		77.15	142.8		71.05	191.0	
	79.05	116.1		77.1	142.7		71.15	191.3	
	79.0	116.15		76.95	142.1		71.3	191.75	
	78.95	116.15		77.0	142.1		71.35	191.7	
	79.15	116.1		76.95	141.9		71.3	191.65	
Mittel	79.03	116.12		77.03	142.32		71.23	191.48	452
Red. Werthe	79.12	1.1809	452	77.07	0.4146	453	71.06	0.1544	452
L' in Quadr.	0.1769		451	0.4909		452	1.2154		452

Mittel { Tourenzahl: 452.00
Periodenzahl: $n = 60.267$

Datum: 15. VII. 96.

c. Wechselstrom von 80 Perioden, 16-polige Maschine von Siemens & Halske.

Combination L'.	L_1'. E. D. N:o 17568 2)			L_2'. E. D. N:o 17568 1)			L_4'. E. D. N:o 17565 1)		
	E (Volt)	I (Sc. Th. & amp.)	Tourenzahl pro Min.	E (Volt)	I (Sc. Th. & amp.)	Tourenzahl pro Min.	E (Volt)	I (Sc. Th. & amp.)	Tourenzahl pro Min.
	62.7	145.1	600	63.15	90.3		62.2	131.2	597
	62.55	144.8	600	63.2	90.2		62.35	131.3	598
	62.6	144.95	600	63.2	90.2		62.05	130.8	
	62.7	145.1		63.15	90.15		62.0	130.7	
	62.65	145.05		63.2	90.1		62.1	130.85	
Mittel	62.64	145.00		63.18	90.19		62.14	130.97	
Red. Werthe	62.45	0.7331		63.07	0.2627		61.94	0.1056	
L' in Quadr.	0.1695			0.4776			1.1729		
	66.8	152.05		69.0	97.1		66.0	137.15	
	66.65	151.95		69.0	97.05		65.95	137.15	
	66.6	151.90		69.0	97.0		65.95	137.15	
	66.4	151.75		68.95	96.95		66.0	137.15	
	66.25	151.35		68.9	96.9		66.1	137.35	
Mittel	66.54	151.80		68.97	97.00		66.00	137.19	
Red. Werthe	66.23	0.7675		68.64	0.2826		65.74	0.1106	
L' in Quadr.	0.1717			0.4832			1.1885		
	69.9	158.95		71.6	100.3		69.2	143.45	
	70.0	159.35		72.0	100.9		69.0	143.05	
	70.1	159.5		71.75	100.45		68.95	142.95	
	70.15	159.55		72.0	100.95		68.95	142.95	
	70.1	159.55		72.1	101.1		69.0	143.05	
Mittel	70.05	159.38		71.89	100.74		69.02	143.09	
Red. Werthe	69.80	0.8058		71.76	0.2935		68 69	0.1154	
L' in Quadr.	0.1723			0.4864			1.1905		
	75.1	171.2		76.9	107.85		72.7	150.45	
	74.6	169.8		76.65	107.7		72.7	150.45	
	74.6	169.7		76.5	107.3		72.95	151.25	
	74.5	169.6		76.6	107.5		72.95	151.3	
	74.6	169.9		76.65	107.6		73.05	151.45	
Mittel	74.68	170.04		76.66	107.59		72.87	150.98	597
Red. Werthe	74.65	0.8597	600	76.69	0.3134	600	72.79	0.1217	597
L' in Quadr.	0.1727		599	0.4868		601	1.1957		596

Mittel { Tourenzahl: 600.00 / Periodenzahl: $n =$ 80.00 } { Tourenzahl: 597.00 / Periodenzahl: $n =$ 79.60 }

Datum: 15. VII. 96.

d. Wechselstrom von 100 Perioden; 16-polige Maschine von Siemens & Halske.

Combination L'.	L_1'. E. D. N:o 17568 2)			L_2'. E. D N:o 17565 2)			L_4'. E. D. N:o 17565 1)		
	E (Volt)	I (Sc. Th. & amp.)	Tourenzahl pro Min.	E (Volt)	I (Sc. Th. & amp.)	Tourenzahl pro Min.	E (Volt)	I (Sc. Th. & amp.)	Tourenzahl pro Min.
	60.75	114.4	748	61.95	84.2		60.5	105.55	
	60.7	114.3	749	61.9	84.1		60.2	105.05	
	60.7	114.3	748	62.0	84.25		60.2	104.9	
	60.45	113.95		62.0	84.3		60.0	104.55	
	60.6	114.15		62.0	84.25		59.95	104.4	
Mittel	60.64	114.22		61.97	84.22		60.17	104.89	
Red. Werthe	60.22	0.5775		61.74	0.2151		59.73	0.08456	
L' in Quadr.	0.1661			0.4572			1.1252		
	65.0	120.4		64.9	87.35		64.05	111.75	
	65.45	121.4		64.9	87.3		64.05	111.55	
	65.2	121.1		64.8	87.35		64.5	112.15	
	65.2	121.4		64.9	87.45		64.5	112.25	
	64.95	120.5		64.9	87.45		64.3	111.95	
Mittel	65.16	120.96		64.88	87.38		64.28	111.93	
Red. Werthe	65.00	0.6116		64.75	0.2232		64.19	0.09024	
L' in Quadr.	0.1693			0.4621			1.1332		
	69.45	128.3		68.25	91.2		70.1	120.3	
	69.05	127.9		68.2	91.2		70.75	121.1	
	69.05	127.8		68.2	91.15		70.95	121.45	
	69.15	127.7		68.2	91.25		71.0	121.7	
	69.05	127.75		68.1	91.2		70.9	121.35	
Mittel	69.15	127.89		68.19	91.20		70.74	121.18	
Red. Werthe	68.83	0.6466		67.82	0.2329		70.54	0.09770	
L' in Quadr.	0.1696			0.4639			1.1502		
	72.3	133.5		72.0	96.1		77.0	131.4	
	72.2	133.45		72.0	96.1		76.5	130.9	
	71.95	132.9		71.95	96.05		76.6	131.0	
	72.0	132.85		72.0	96.1		76.3	130.1	
	72.0	132.9		72.0	96.1		76.6	130.9	
Mittel	71.09	133.12		71.99	96.09		76.60	130.86	751
Red. Werthe	70.91	0.6731	750	71.87	0.2454	749	76.63	0.10550	749
L' in Quadr.	0.1678		749	0.4666		751	1.1571		749

Mittel { Tourenzahl: 749.30
Periodenzahl: $n =$ 99.907

A. 2. Messung von Selbstinduktionscoefficienten mittelst Gleichstrom.

a. Schwingungszeit und Dämpfung des Galv. Magnets.

Datum: 16. VII. 96.

Abstand zwischen Spiegel und Scala D = 155.8 cm.

Anzahl Schwing.	Beob. Zeiten.	Amplitude.	Schw. Zeit.	Red. Schw. Zeit.	Dämpf. Verh.	Anzahl Schwing.	Beob. Zeiten.	Amplitude.	Schw. Zeit.	Red. Schw. Zeit.	Dämpf. Verh.
	h m s	Gl. Lage 600 0					h m s	Gl. Lage 600.0			
0	2 34 2.6	129.8	—	—	—	0	2 43 42.0	129.9	—	—	—
50	2 35 42.0	64.7	1.9880	1.9879	1.0140	50	2 45 21.2	64.9	1.9840	1.9839	1.0140
100	2 37 21.5	31.9	1.9890	1.9889	1.0141	100	2 47 0.5	32.2	1.9850	1.9849	1.0140
150	2 39 0.8	16.0	1.9880	1.9880	1.0141	150	2 48 39.9	16.0	1.9860	1.9860	1.0140
—	—	600.4	—	—	—	—	—	600.0	—	—	—
Mittel:		—	—	1.9883	1.0141	Mittel:		—	—	1.9849	1.0140

Anzahl Schwing.	Beob. Zeiten.	Amplitude.	Schw. Zeit.	Red. Schw. Zeit.	Dämpf. Verh	Anzahl Schwing.	Beob. Zeiten.	Amplitude.	Schw. Zeit.	Red. Schw. Zeit.	Dämpf. Verh.
	h m s	Gl. Lage 600.0					h m s	Gl. Lage 600.0			
0	2 50 26.3	128.0	—	—	—	0	2 56 27.2	128.2	—	—	—
50	2 52 5.6	64.1	1.9860	1.9859	1.0139	50	2 58 6.5	63.4	1.9860	1.9859	1.0142
100	2 53 44.9	32.0	1.9860	1.9859	1.0140	100	2 59 45.8	31.7	1.9860	1.9859	1.0141
150	2 55 24.3	15.8	1.9867	1.9867	1.0140	150	3 1 25.2	16.0	1.9867	1.9867	1.0140
—	—	600.0	—	—	—	—	—	599.9	—	—	—
Mittel:		—	—	1.9862	1.0140	Mittel:		—	—	1.9862	1.0141

Anzahl Schwing.	Beob. Zeiten.	Amplitude.	Schw. Zeit.	Red. Schw. Zeit.	Dämpf. Verh.	Anzahl Schwing.	Beob. Zeiten.	Amplitude.	Schw. Zeit.	Red. Schw. Zeit.	Dämpf. Verh
	h m s	Gl. Lage 600.0					h m s	Gl. Lage 600.0			
0	3 3 12.0	130.8	—	—	—	0	3 11 25.0	129.0	—	—	—
50	3 4 51.4	64.8	1.9880	1.9879	1.0141	50	3 13 4.3	65.0	1.9860	1.9859	1.0138
100	3 6 30.7	33.0	1.9870	1.9869	1.0139	100	3 14 43.6	32.2	1.9860	1.9859	1.0140
150	3 8 10.0	17.0	1.9867	1.9867	1.0137	150	3 16 22.9	16.0	1.9860	1.9860	1.0140
—	—	600.3	—	—	—	—	—	600.0	—	—	—
Mittel:		—	—	1.9872	1.0139	Mittel:		—	—	1.9859	1.0139

Gesammtmittel { Reducirte Schwingungszeit T = 1.9865
Dämpfungsverhältniss k = 1.0140
Log. Decrement 0.00604
e^{λ} = 1.0069

Bem. Eine am folgenden Tage wiederholte Bestimmung gab fast genau dieselben Zahlen.

b. Messungen von v und s.

Combination L_1'. $W_0 = 18$ Ohm. $D = 155.8$ cm.

17. VII. 96.
ϑ im Mittel: 22.°3 C.

Nulleinstellung: 489.2.					Einstellung: 569.2.			Einstellung: 409.2.		
Gl. Lage.	Stoss b. Schl.	Gl. Lage.	Stoss b. Öffn.	Gl. Lage.	Gl. Lage.	Abgel. Lage.	Gl. Lage.	Gl. Lage.	Abgel. Lage.	Gl. Lage.
600.0	704.0	600.0	496.0	600.0	600.0	797.0	599.9	600.0	405.1	600.0
„	704.1	600.0	496.1	600.0	„	797.2	600.0	„	405.0	600.0
„	704.0	600.1	496.1	600.1	„	797.0	600.0	„	404.9	600.0
„	704.0	600.1	496.1	600.0	„	797.1	600.0	„	404.9	600.0
„	704.0	600.0	496.0	600.0	„	797.0	600.0	„	405.0	600.0
„	704.0	600.2	496.2	600.3	„	797.0	600.0	„	405.0	600.0
„	704.1	600.0	496.0	600.0	„	797.1	600.0	„	405.0	600.0
„	704.1	600.1	496.2	600.2	„	797.1	600.0	„	405.0	599.9
Nulleinstellung: 489.2.					Ausschlag: 197.07.			Ausschlag: 195.01.		

Stoss beim Schliessen: 104.04.
„ „ Öffnen: 103.98.
Mittel: 104.01.
Corr. „ $v = 103.85$.

Mittel: 196.04.
Corr. „ $s = 195.26$.

Schleifcontakt gekehrt.

Nulleinstellung: 488.45.					Einstellung: 558.45.			Einstellung: 418.45.		
Gl. Lage.	Stoss b. Schl.	Gl. Lage.	Stoss b. Öffn.	Gl. Lage.	Gl. Lage.	Abgel. Lage.	Gl. Lage.	Gl. Lage.	Abgel. Lage.	Gl. Lage.
600.0	704.0	600.0	496.2	600.0	600.0	772.8	600.0	600.0	429.6	600.0
„	704.0	599.9	496.1	599.8	„	772.6	599.8	„	429.6	600.0
„	703.9	600.0	496.2	599.9	„	772.8	600.2	„	429.5	600.0
„	703.9	600.0	496.2	600.0	„	772.7	599.9	„	429.6	600.0
„	704.0	599.9	496.0	600.0	„	772.6	600.0	„	429.5	599.8
„	704.0	600.0	496.0	599.9	„	772.6	599.9	„	429.6	600.0
„	704.0	599.9	496.1	599.8	„	772.8	600.0	„	429.6	600.0
„	704.0	600.0	496.2	600.0	„	772.8	600.0	„	429.6	599.9
Nulleinstellung: 488.45.					Ausschlag: 172.80.			Ausschlag: 170.41.		

Stoss beim Schliessen: 103.98.
„ „ Öffnen: 103.84.
Mittel: 103.91.
Corr. „ $v = 103.75$.

Mittel: 171.60.
Corr. „ $s = 171.08$.

Messdraht gekehrt.

Nulleinstellung: 514.5					Einstellung: 594.5			Einstellung: 434.5.		
Gl. Lage.	Stoss b. Schl.	Gl. Lage.	Stoss b. Öffn.	Gl. Lage.	Gl. Lage.	Abgel. Lage.	Gl. Lage.	Gl. Lage.	Abgel. Lage.	Gl. Lage.
600.0	703.2	599.9	496.9	599.7	600.0	405.3	600.0	600.0	796.9	600.0
„	703.3	600.0	496.7	600.0	„	405.4	600.0	„	796.7	599.9
„	703.3	600.1	497.0	600.0	„	405.4	599.9	„	796.8	600.0
„	703.5	600.2	497.2	600.0	„	405.5	600.1	„	796.7	599.8
„	703.1	600.0	496.8	600.0	„	405.3	599.9	„	796.5	599.5
„	703.1	600.0	496.9	600.0	„	405.3	600.0	„	796.8	599.9
„	703.0	600.0	497.1	600.0	„	405.4	599.9	„	796.7	600.0
„	703.1	600.0	497.0	600.0	„	405.4	600.1	„	796.9	600.2
Nulleinstellung: 514.5.					Ausschlag: 194.61.			Ausschlag: 196.75.		

Stoss beim Schliessen: 103.20.
„ „ Öffnen: 103.08.
Mittel: 103.14.
Corr. „ $v = 102.98$.

Mittel: 195.68.
Corr. „ $s = 194.90$.

Schleifcontakt gekehrt.

Nulleinstellung: 514.4					Einstellung: 584.4.			Einstellung: 444.4.		
Gl. Lage.	Stoss b. Schl.	Gl. Lage.	Stoss b. Öffn.	Gl. Lage.	Gl. Lage.	Abgel. Lage.	Gl. Lage.	Gl. Lage.	Abgel. Lage.	Gl. Lage.
600.0	703.2	600.1	497.0	600.1	600.0	430.0	600.1	600.0	772.0	600.0
„	703.1	600.0	497.0	600.0	„	429.8	600.0	„	772.1	600.0
„	703.0	600.1	497.1	600.0	„	429.6	599.7	„	772.2	600.0
„	703.1	600.0	496.9	599.9	„	429.7	599.8	„	772.1	600.0
„	703.2	600.1	497.0	600.0	„	429.8	600.0	„	772.0	600.0
„	703.1	600.0	497.0	600.0	„	429.9	600.0	„	772.0	600.0
„	703.0	600.1	497.2	600.0	„	429.9	600.0	„	772.1	600.0
„	703.1	600.0	497.0	600.0	„	430.0	600.0	„	772.1	600.0
Nulleinstellung: 514.4.					Ausschlag: 170.14.			Ausschlag: 172.08.		

Stoss beim Schliessen: 103.10.
„ „ Öffnen: 103.02.
Mittel: 103.06.
Corr. „ $v = 102.90$.

Mittel: 171.11.
Corr. „ $s = 170.60$.

Combination L_2'. $W_0 = 30$ Ohm. $D = 155.8$ cm.

16. VII. 96. 9 im Mittel: 23°.2 C.

Nulleinstellung: 510.05.					Einstellung: 590.05.			Einstellung: 430.05.		
Gl. Lage.	Stoss b. Schl.	Gl. Lage.	Stoss b. Öffn.	Gl. Lage.	Gl. Lage.	Abgel. Lage.	Gl. Lage.	Gl. Lage.	Abgel. Lage.	Gl. Lage.
600.0	729.9	600.1	470.3	600.2	600.0	468.1	599.8	600.0	731.6	599.6
„	729.8	600.0	470.4	600.1	„	468.0	600.0	„	731.8	599.8
„	730.0	600.2	470.4	600.5	„	468.0	600.0	„	731.9	600.0
„	729.9	600.1	470.4	600.1	„	467.6	599.5	„	731.9	600.0
„	730.0	600.0	470.3	600.0	„	467.8	599.9	„	732.0	600.0
„	729.9	600.1	470.5	600.3	„	468.0	600.0	„	731.8	600.1
„	730.0	600.0	470.2	600.1	„	467.7	599.8	„	731.9	600.0
„	729.8	600.0	470.3	600.0	„	467.7	599.9	„	731.8	600.0
Nulleinstellung: 510.05.					Ausschlag: 132.07.			Ausschlag: 131.87.		

Stoss beim Schliessen: 129.91.
„ „ Öffnen: 129.71.
Mittel: 129.81.
Corr. „ $\nu = 129.49$.

Mittel: 131.97.
Corr. „ $s = 131.74$.

Schleifcontakt gekehrt.

Nulleinstellung: 508.7					Einstellung: 608.7.			Einstellung: 408.7.		
Gl. Lage.	Stoss b. Schl.	Gl. Lage.	Stoss b. Öffn.	Gl. Lage.	Gl. Lage.	Abgel. Lage.	Gl. Lage.	Gl. Lage.	Abgel. Lage.	Gl. Lage.
600.0	729.9	600.0	470.1	600.0	600.0	435.5	600.0	600.0	765.6	600.0
„	730.0	600.0	470.0	600.0	„	435.5	599.9	„	765.0	600.0
„	730.0	599.9	470.0	600.0	„	435.4	599.9	„	766.0	600.2
„	730.0	600.0	470.2	600.0	„	435.5	599.8	„	766.0	600.4
„	729.7	600.0	470.3	600.0	„	435.6	600.1	„	766.0	600.4
„	729.9	600.1	470.4	600.2	„	435.5	600.1	„	766.0	600.2
„	730.0	600.0	470.1	600.0	„	435.4	600.0	„	765.9	600.0
„	729.9	600.0	470.0	600.0	„	435.5	600.0	„	765.9	600.0
Nulleinstellung: 508.7					Ausschlag: 164.50.			Ausschlag: 165.73.		

Stoss beim Schliessen: 129.93.
„ „ Öffnen: 129.86.
Mittel: 129.90.
Corr. „ $\nu = 129.58$.

Mittel: 165.11.
Corr. „ $s = 164.64$.

Messdraht gekehrt.

Nulleinstellung: 484.5.					Einstellung: 564.5.			Einstellung: 404.5.		
Gl. Lage.	Stoss b. Schl.	Gl. Lage.	Stoss b. Öffn.	Gl. Lage.	Gl. Lage.	Abgel. Lage.	Gl. Lage.	Gl. Lage.	Abgel. Lage.	Gl. Lage.
600.0	729.2	600.1	470.9	600.0	600.0	732.2	600.0	600.0	467.9	599.7
„	729.1	600.0	471.0	600.2	„	732.1	600.0	„	468.0	599.8
„	729.0	600.0	471.0	600.1	„	732.2	600.0	„	467.9	600.0
„	729.1	600.0	470.8	600.2	„	732.1	600.0	„	467.8	600.0
„	729.1	599.9	470.8	600.0	„	732.1	600.0	„	468.0	600.0
„	729.2	599.9	470.7	600.0	„	732.0	600.0	„	467.9	600.0
„	729.1	599.8	470.8	600.0	„	732.1	600.0	„	468.0	599.9
„	729.0	599.9	470.7	600.0	„	732.0	600.0	„	468.0	600.1
Nulleinstellung: 484.5.					Ausschlag: 132.10.			Ausschlag: 132.03.		

Stoss beim Schliessen: 129.10.
„ „ Öffnen: 129.11.
Mittel: 129.10.
Corr. „ $v = 128.78$.

Mittel: 132.07.
Corr. „ $s = 131.84$.

Schleifcontakt gekehrt.

Nulleinstellung: 485.5.					Einstellung: 585.5.			Einstellung: 385.5.		
Gl. Lage.	Stoss b. Schl.	Gl. Lage.	Stoss b. Öffn.	Gl. Lage.	Gl. Lage.	Abgel. Lage.	Gl. Lage.	Gl. Lage.	Abgel. Lage.	Gl. Lage.
600.0	729.2	600.0	470.8	600.0	600.0	765.2	599.9	600.0	434.2	600.5
„	729.3	600.0	470.8	600.0	„	765.1	600.0	„	434.0	600.0
„	729.1	600.0	470.7	600.1	„	765.2	600.0	„	434.1	600.2
„	729.2	599.8	470.5	600.0	„	765.0	600.0	„	433.9	600.3
„	729.1	600.0	470.9	600.0	„	765.1	600.0	„	433.9	600.3
„	729.1	599.9	470.7	600.0	„	765.0	600.0	„	434.0	600.4
„	729.0	599.9	470.6	600.0	„	764.9	599.9	„	434.0	600.4
„	729.0	600.0	470.8	600.0	„	765.1	600.0	„	434.0	600.5
Nulleinstellung: 485.5.					Ausschlag: 165.08.			Ausschlag: 166.16.		

Stoss beim Schliessen: 129.13.
„ „ Öffnen: 129.23.
Mittel: 129.18.
Corr. „ $v = 128.86$.

Mittel: 165.62.
Corr. „ $s = 165.15$.

Combination L_4'. $W_0 = 40$ Ohm. $D = 155.8$ cm.

16. VII. 96. ϑ im Mittel: 23°.2 C.

Nulleinstellung: 498.0					Einstellung: 598.0.			Einstellung: 398.0.		
Gl. Lage.	Stoss b. Schl.	Gl. Lage.	Stoss b. Öffn.	Gl. Lage.	Gl. Lage.	Abgel. Lage.	Gl. Lage.	Gl. Lage.	Abgel. Lage.	Gl. Lage.
600.0	764.0	600.0	436.1	600.0	600.0	741.2	600.0	600.0	460.0	600.0
„	764.0	600.2	435.8	600.3	„	741.1	600.0	„	460.0	599.9
„	764.0	600.0	436.1	600.0	„	741.3	599.9	„	460.2	600.0
„	764.2	600.0	435.8	599.9	„	741.3	600.0	„	460.2	600.0
„	764.0	600.0	436.0	600.0	„	741.3	600.0	„	460.0	599.5
„	764.0	600.0	436.1	599.8	„	741.1	600.0	„	459.8	599.6
„	764.0	600.0	435.9	600.0	„	741.3	599.9	„	460.0	600.0
„	764.0	600.2	436.3	600.0	„	741.0	599.6	„	460.0	599.9
Nulleinstellung: 498.0.					Ausschlag: 141.24.			Ausschlag: 139.90.		

Stoss beim Schliessen: 164.03.
„ „ Öffnen: 164.04.
Mittel: 164.03.
Corr. „ $r = 163.40$.

Mittel: 140.57.
Corr. „ $s = 140.29$.

Schleifcontakt gekehrt.

Nulleinstellung: 501.3.					Einstellung: 421.3.			Einstellung: 581.3.		
Gl. Lage.	Stoss b. Schl.	Gl. Lage.	Stoss b. Öffn.	Gl. Lage.	Gl. Lage.	Abgel. Lage.	Gl. Lage.	Gl. Lage.	Abgel. Lage.	Gl. Lage.
600.0	762.0	600.0	438.2	600.0	600.0	488.1	599.9	600.0	713.0	600.0
„	762.0	599.9	438.2	600.1	„	488.2	600.0	„	713.0	600.2
„	761.8	600.0	438.2	600.4	„	488.1	600.0	„	713.0	600.1
„	761.8	600.0	438.2	600.4	„	488.1	600.0	„	713.1	600.3
„	762.0	600.0	438.3	600.0	„	488.3	600.1	„	712.9	600.0
„	761.9	600.0	438.3	600.1	„	488.4	599.8	„	713.0	600.3
„	762.0	600.0	438.1	600.1	„	488.2	600.0	„	713.0	600.1
„	762.0	600.0	438.0	600.2	„	488.4	600.0	„	713.0	600.0
Nulleinstellung: 501.3.					Ausschlag: 111.76.			Ausschlag: 112.94.		

Stoss beim Schliessen: 161.94.
„ „ Öffnen: 161.80.
Mittel: 161.87.
Corr. „ $r = 161.27$.

Mittel: 112.35.
Corr. „ $s = 112.21$.

Messdraht gekehrt.

Nulleinstellung: 496.9.					Einstellung: 596.9.			Einstellung: 396.9.		
Gl. Lage.	Stoss b. Schl.	Gl. Lage.	Stoss b. Öffn.	Gl. Lage.	Gl. Lage.	Abgel. Lage.	Gl. Lage.	Gl. Lage.	Abgel. Lage.	Gl. Lage.
600.0	763.0	600.0	436.8	600.0	600.0	459.9	599.9	600.0	740.6	600.0
„	763.0	600.0	437.1	600.0	„	460.0	600.0	„	740.8	600.2
„	763.0	600.1	436.9	600.0	„	460.0	599.9	„	740.8	600.0
„	763.3	600.0	437.2	600.0	„	460.1	600.1	„	740.7	600.0
„	763.0	600.1	437.2	599.9	„	460.0	600.0	„	740.6	599.8
„	763.1	600.0	437.2	600.1	„	460.1	600.0	„	740.6	600.0
„	763.0	600.0	437.2	599.9	„	460.2	600.2	„	740.7	600.0
„	762.9	600.0	437.1	600.0	„	460.1	600.0	„	740.7	600.0
Nulleinstellung: 496.9.					Ausschlag: 139.92.			Ausschlag: 140.69.		

Stoss beim Schliessen: 163.04.
„ „ Öffnen: 162.94.
Mittel 162.99.
Corr. „ $v = 162.37$.

Mittel: 140.31.
Corr. „ $s = 140.03$.

Schleifcontakt gekehrt.

Nulleinstellung: 496.95.					Einstellung: 416.95.			Einstellung: 576.95.		
Gl. Lage.	Stoss b. Schl.	Gl. Lage.	Stoss b. Öffn.	Gl. Lage.	Gl. Lage.	Abgel. Lage.	Gl. Lage.	Gl. Lage.	Abgel. Lage.	Gl. Lage.
600.0	763.0	600.0	437.1	600.0	600.0	712.7	600.1	600.0	488.0	599.9
„	763.0	600.0	437.2	600.0	„	712.7	600.2	„	488.1	600.0
„	762.95	600.0	437.0	600.0	„	712.7	600.0	„	488.1	599.8
„	762.9	600.0	437.2	600.0	„	712.6	600.0	„	488.3	600.0
„	763.0	600.0	437.1	600.0	„	712.5	600.0	„	488.2	600.0
„	763.0	600.0	437.2	600.0	„	712.5	599.9	„	488.0	600.0
„	763.0	600.1	437.3	600.0	„	712.6	600.0	„	488.2	600.0
„	763.0	600.1	437.3	600.0	„	712.6	600.0	„	488.3	600.1
Nulleinstellung. 496.95.					Ausschlag: 112.60.			Ausschlag: 111.84.		

Stoss beim Schliessen: 162.98.
„ „ Öffnen: 162.85.
Mittel: 162.92.
Corr. „ $v = 162.30$.

Mittel: 112.22.
Corr. „ $s = 112.08$.

B. Aufnahme von Schwingungscurven.

I. Serie mit variirender Capacität.

Curve N:o 16. Comb. C_1, L_4'. $W = 3.117$ Ω.					10 Acc. $W_h = 1415$ Ω. $D = 134.6$ cm.				
x_0	[1]) Norm.	27.84	27.79	27.81	27.82	27.83	27.85	27.91	27.93	27.95
a	Ladung:	−0.283	0.292	0.608	0.897	1.192	1.500	1.808	2.085	2.408
y	150.02	58.7	249.3	274.8	251.7	163.5	80.1	45.4	63.7	116.8
x_0	27.96	27.97	27.97	27.97	28.00	28.02	28.06	28.09	28.08	28.09
a	2.692	2.988	3.305	3.603	3.905	4.185	4.495	4.810	5.095	5.398
y	177.0	227.8	229.2	196.4	145.9	89.1	76.5	90.9	140.7	181.4
x_0	28.13	28.16	28.21	28.20	28.17	28.19	28 23	28.24	28.27	28.30
a	5.705	5.993	6.317	6.600	6.880	7.190	7.507	7.812	8.103	8.398
y	205.4	201.0	172.7	132.9	105.5	100.2	119.5	156.9	180.2	190.8
x_0	28.28	28.34	28.42	28.44	[2]) Norm.	[3]) Norm.	28.48	28.49	28.55	28.58
a	8.698	8.987	9.302	9.613	Ladung:	Ladung:	9.898	10.212	10.487	10.805
y	178.0	150.8	125.6	112.4	150.01	149.98	109.5	134.3	159.7	184.3
x_0	28.51	28.50	30.08	30.18	30.09	30.04	30.03	30.05	30.07	30.08
a	11.107	11.403	11.678	12.013	12.317	12.615	12.903	13.202	13.482	13.807
y	182.8	167.8	144.3	123.5	117.6	125.3	142.1	168.2	175.7	170.8
x_0	30.08	30.10	30.10	30.11	30.11	30.18	30.15	30.15	30.17	30.16
a	14.092	14.415	14.708	14.988	15.290	15.607	15.915	16.197	16.512	16.790
y	154.5	138.1	126.5	127.2	136.7	151.1	165.4	168.0	160.7	151.0
x_0	30.17	30.21	30.24	30.28	30.31	30.27	30.29	30.31	30.33	30.29
a	17.083	17.393	17.693	17.995	18.320	18.598	18.897	19.198	19.492	19.808
y	137.6	131.8	132.9	144.0	156.7	162.0	160.4	155.1	145.0	137.6
x_0	30.28	30.35	30.35	30.33	30.37	[4]) Norm.	[5]) Norm.	30.47	30.48	30.45
y	20.078	20.380	20.707	20.992	21.298	Ladung:	Ladung:	21.595	21.915	22.200
a	135.3	138.0	149.8	156.3	158.9	149.98	149.98	156.7	149.6	144.2
x_0	30.40	30.41	30.38	30.47	30.45	30.46	30.45	30.45	30.42	30.45
a	22.502	22.787	23.088	23.415	23.695	23.997	24.293	24.597	24.913	25.212
y	139.2	138.8	142.8	140.1	155.8	157.1	154.5	147.8	143.0	140.5
x_0	30.43	30.43	30.47	30.48	[6]) Norm.					
a	25.502	25.792	26.083	26.417	Ladung:	—	—	—	—	—
y	141.7	145.8	151.0	154.5	149.97					

[1]) 17. VI. 96. 2.30 U. n. M. $\vartheta = 20°.9$ C. [2]) 6.30 U. n. M. $\vartheta = 21°.3$ C. [3]) 18. VI. 96. 7.30 U. n. M. $\vartheta = 19°.9$ C. [4]) 12 U. d. T. $\vartheta = 20°.2$ C. [5]) 2 U. n. M. $\vartheta = 20°.9$ C. [6]) 4 U. n. M. $\vartheta = 20°.8$ C.

Curve N:o 17. Comb. C_2, L_4'. $W = 3.117$ Ω.						10 Acc. $W_k = 648$ Ω $D = 134.65$ cm.				
x_0	[1]) Norm.	28.04	28.14	28.92	28.23	28.28	23.76	23.76	23.82	23.87
a	Ladung:	− 0.508	0 442	0.893	1.367	1.802	2.247	2.683	3.132	3.595
y	200.28	58.5	328.0	387.3	369.7	272.9	167.9	62.1	28.7	74.2
x_0	23.91	23.94	23.95	23.96	23.96	23.97	24.00	24.03	24.04	24.06
a	4.042	4.495	4.950	5.387	5.838	6.290	6.752	7.203	7.640	8.092
y	185.7	298.1	360.5	350.9	280.2	155.7	89.3	51.8	80.7	179.5
x_0	24.03	24 04	24.06	24.07	24.08	24.10	24.13	24.11	24.08	24.11
a	8 542	9.002	9.445	9.880	10.370	10.798	11.248	11.715	12.143	12.605
y	260.9	328.4	336.9	283.8	190.6	120 7	72.3	88.8	164.2	220.4
x_0	24.15	24.15	24.14	24.15	24.16	24.17	24.18	24.22	24.22	24.21
a	13.050	13.505	13.958	14.403	14.840	15.302	15.742	16.193	16.647	17.087
y	311.3	321.7	280.4	209.5	136.9	95.1	94.2	132.7	195.6	276.7
x_0	24.22	[2]) Norm.	[3]) Norm.	24.39	24.54	24.54	24.50	24.49	24.54	24.58
a	17.530	Ladung:	Ladung:	17.982	18.452	18.898	19.333	19.810	20.245	20.685
y	305.1	200.21	200.20	289.2	230.7	157.0	115.5	108.2	134.6	190.0
x_0	24.62	24.65	24.68	24.74	24.78	24.78	24.84	24.85	24.86	24.86
a	21.153	21.598	22.050	22.505	22.972	23.390	23.845	24.295	24.740	25.193
y	245.7	288.1	283.6	229.7	177.2	127.2	114.0	136.9	182.3	235.7
x_0	24.88	24.90	25.04	25.10	25.06	25.11	25.17	25.14	25.13	25.18
a	25.647	26.105	26.537	27.005	27.462	27.890	28.347	28.815	29.242	29.688
y	275.6	279.0	253.9	197.2	159.4	129.4	133.7	163.3	214.0	255.0
x_0	25.17	25.19	25.19	25.24	25.24	25.25	25.26	25.22	25.24	25.26
a	30.130	30.612	31.028	31.497	31.963	32.417	32.843	33.295	33.742	34.205
y	270.5	258.3	230.5	177.9	141.1	133.1	153.4	189.0	231.8	262.3
x_0	25.19	25.19	25.16	25.16	25.16	25.15	25.15	25.17	25.18	25.27
a	34.662	35.110	35.547	35.992	36.453	36.893	37.352	37.808	38.243	38.685
y	258.1	235.8	196.2	157.9	142 4	148.4	170.6	213.8	244.5	253.6
x_0	25.29	25.27	25.26	25.25	25.25	25.24	25.35	25.17	25.09	[4]) Norm.
a	39.173	39.598	40.072	40.502	40.950	41.395	41.867	42.305	42.755	Ladung:
y	233.4	204.8	169.4	150.2	148.9	169.7	205.6	233.3	247.7	200.20

[1]) 12. VI. 96. 7 U. v. M. $\vartheta = 17°.8$ C. [2]) 12 U. d T. $\vartheta = 17°.8$ C. [3]) 2. U. n. M. $\vartheta = 19°.0$ C. [4]) 7.30 U. n. M. $\vartheta = 18°.2$ C.

Curve N:o 18. Comb. C_3, L_4'. $W = 3.117$ Ω						10 Acc. $W = 304$ & 303 Ω. $D = 134.65$ cm.				
x_0	[1]) Norm.	27.87	27.90	27.93	27.93	27.94	27.95	27.97	27.99	27.99
a	Ladung:	− 0.988	− 0.518	0.585	1.208	1.788	2.398	3.000	3.607	4.210
y	200.23	25.0	104.6	318.7	394.7	386.6	296.0	199.2	86.8	28.0
x_0	27.98	28.02	28.09	28.12	28.16	29.13	29.47	28.13	28.25	28.25
a	4.785	5.392	5.988	6.593	7.205	7.798	8.413	9.000	9.607	10.197
y	37.7	101.6	207.1	302.4	365.1	353.7	285.3	185.4	97.4	55.2
x_0	28.27	28.28	28.25	28.21	28.23	28.18	28.17	28.18	28.25	28.28
a	10.795	11.420	11.995	12.588	13.197	13.793	14.398	15.003	15.602	16.212
y	65.0	133.1	216.4	297.2	343.9	327.9	265.5	176.0	110.9	72.5
x_0	28.32	28.35	28.34	28.30	28 26	28.26	28 27	28.35	28.37	28.43
a	16.805	17.398	17.987	18.590	19.190	19.805	20.408	20.978	21.580	22.200
y	86.4	143.9	224.0	281.0	321.2	304.7	263.5	182.5	122.6	88.4
x_0	[2]) Norm.	[3]) Norm.	28.59	28.59	28.60	28.65	28.69	28.71	28.74	28.75
a	Ladung:	Ladung:	22.788	23.392	23.988	24.588	25.177	25.790	26.412	27.003
y	200.36	200.09	98.9	147.1	213.1	270.8	307.5	294.0	243.8	188.9
x_0	28.74	28.78	28.81	28.85	28.86	28.82	28.81	28.83	28.86	28.86
a	27.597	28.185	28.788	29.400	30.007	30.587	31.190	31.792	32.398	33.017
y	126.8	101.9	110.3	161.6	217.9	268.5	292.3	284.5	236.7	182.3
x_0	28.87	28.88	28.88	28.91	28.92	28.88	28.89	28.91	28.91	28.92
a	33.597	34.217	34.800	35.405	36.027	36.588	37.200	37.812	38.393	38.993
y	133.1	113.0	121.5	166.5	216.5	260.5	282.4	275.8	234.3	195.6
x_0	28.87	28.91	28.95	28.95	28.93	29.09	29.14	29.12	29.14	29.13
a	39.595	40.192	40.797	41.400	41.988	42.592	43.212	43.813	44.400	45.005
y	148.5	123.6	125.7	158.5	203.1	243.9	270.6	271.5	242.9	198.9
x_0	29.13	29.14	[4]) Norm.	[5]) Norm.	28.33	28.35	28.34	28.34	28.34	28.37
a	45.603	46.213	Ladung:	Ladung:	46.798	47.397	48.005	48.613	49.195	49.785
y	165.0	135.5	200.06	200.04	132.0	156 4	197.6	241.6	263.0	262.7
x_0	28.37	28.37	28.40	28.38	28.37	28.36	28.39	28.37	28.34	28.42
a	50.417	50.987	51.602	52.208	52.810	53.397	54.015	54.602	55.178	55.803
y	241.2	200.3	164.3	140.7	142.4	159.8	197.9	234.4	254.5	254.5
x_0	28.40	28.37	28.37	28.38	28.38	28.40	28.43	28.42	28.49	[5]) Norm.
a	56.417	57.005	57.597	58.190	58.800	59.388	60.005	60.598	61.195	Ladung:
y	231.7	200.5	172.4	146.9	145.8	167.9	196.7	229.1	245.5	200.03

[1]) 10. VI. 96. 7.30 U. n. M. $\vartheta = 17°.8$ C. [2]) 12.30 U. n. M. $\vartheta = 18°.8$ C. [3]) 2.30 U. n. M. $\vartheta = 19°.5$ C. $W_n = 303$ Ω von hier an. [4]) 7 U. n. M. $\vartheta = 19°.8$ C. [5]) 12 U. d. N. $\vartheta = 20°.C$ C.

Curve N:o 19. Comb. C_5, L_4'. $W = 3.117$ Ω.			10 Acc. $W_n = 145$ & 147 Ω. $D = 135.0$ cm.	
[1]) Normale Ladung:	27.13 25.65	16.3	27.25 26.5	96.9	27.42 28.3	324.3
		15.5		87.0		319.8
200.2	27.23 25.75		27.24 26.5		27.47 28.35	
200.2		17.9		101.6		322.0
200.2		16.6		87.9		337.0
200.2	27.25 25.75		27.25 26.5		27.43 28.35	
200.1		19.7		82.0		328.8
200.15	27.25	17.2	27.23	83.0	27.43	334.9
Mittel:	27.22		27.24		27.44	
200.18	— 1.507		— 0.743		0.892	
	17.2		89.7		327.8	
27.43 29.25	27.48 30.2		27.46 31.05		27.45 31.95	
		395.9		377.1		275.0		154.8
		396.0		377.2		270.9		162.7
27.48 29.3	27.47 30.15		27.42 31.0		27.44 31.95	
		395.9		376.2		278.5		162.9
		394.7		381.0		286.3		175.0
27.47 29.25	27.48 30.2		27.44 31.05		27.42 31.9	
		395.8		372.7		263.2		163.8
27.48	395.2	27.46	370.1	27.45	268.9	27.39	175.2
27.47	27.47		27.44		27.43	
1.798	2.710		3.593		4.507	
395.6	375.7		273.8		165.7	
27.39 32.8	27.42 33.7		27.47 34.65		27.42 35.5	
		71.7		25.3		59.8		154.0
		75.2		29.0		63.0		144.1
27.43 32.85	27.46 33.75		27.43 34.65		27.40 35.5	
		56.0		25.7		61.5		154.9
		67.9		29.0		62.9		147.8
27.45 32.85	27.51 33.8		27.38 34.6		27.38 35.5	
		57.0		25.0		61.9		148.5
27.42	81.1	27.47	28.9	27.42	55.0	27.42	151.1
27.42	27.47		27.43		27.41	
5.405	6.278		7.215		8.100	
66.5	27.2		60.7		150.1	
27.42 36.4	27.41 37.3		27.42 38.2		27.34 39.05	
		268.3		350.3		377.5		321.9
		264.1		346.1		375.2		314.0
27.40 36.4	27.42 37.3		27.47 38.25		27.39 39.1	
		268.1		350.0		378.0		324.9
		262.0		353.1		378.5		320.9
27.40 36.4	27.45 37.35		27.50 38.3		27.39 39.1	
		271.2		346.2		377.6		315.5
27.41	266.9	27.42	361.0	27.47	376.9	27.35	320.7
27.41	27.43		27.47		27.37	
8.995	9.888		10.778		11.708	
266.8	351.1		377.3		319.7	

[1]) 8. VI. 96. 2 U. n. M. $\vartheta = 19°.0$ C.

Curve N:o 19. Comb. C_3, L_4'. $W = 3.117$ Ω.					10 Acc. $W_n = 145$ & 147 Ω. $D = 135.0$ cm.			
	27.35	39.95	27.42	40.9	27.43	41.85	27.51	42.8
		231.9		131.7		64.9		62.9
		230.4		143.0		64.0		63.0
	27.38	40.0	27.43	40.95	27.43	41.85	27.47	42.75
		222.0		125.0		59.1		58.7
		234.7		129.6		66.2		57.0
	27.41	40.0	27.47	40.95	27.42	41.8	27.45	42.75
		219.8		127.0		61.1		58.1
	27.42	225.7	27.43	139.2	27.45	63.0	27.43	59.9
x_0	27.39		27.44		27.43		27.47	
a	12.592		13.492		14.402		15.303	
y	227.4		132.6		63.1		59.9	
	27.43	43.65	27.41	44.5	27.38	45.4	27.45	46.35
		123.1		208.0		300.8		352.9
		115.3		208.2		300.0		350.1
	27.42	43.6	27.41	44.5	27.41	45.4	27.44	46.35
		116.1		205.0		297.9		349.9
		112.0		211.3		293.4		350.0
	27.39	43.6	27.41	44.5	27.43	45.45	27.43	46.35
		119.8		213.6		311.1		349.8
	27.41	117.9	27.38	208.0	27.45	302.1	27.42	350.7
x_0	27.41		27.40		27.42		27.44	
a	16.207		17.095		17.998		18.915	
y	117.4		209.0		300.9		350.6	
	27.42	47.2	27.48	48.2	27.48	49.1	27.50	50.0
		340.1		258.1		160.4		95.1
		338.8		260.2		169.8		103.0
	27.40	47.2	27.45	48.15	27.49	49.1	27.49	50.0
		334.1		258.0		155.2		102.1
		338.1		255.3		164.3		103.2
	27.44	47.25	27.45	48.15	27.50	49.1	27.48	50.0
		331.9		270.0		165.8		106.5
	27.48	331.8	27.47	260.4	27.50	157.2	27.45	108.1
x_0	27.44		27.46		27.49		27.48	
a	19.787		20.708		21.607		22.518	
y	335.8		260.3		162.1		103.0	
	27.60	51.0	27.45	51.75	27.53	52.75	27.55	53.65
		72.8		87.1		152.9		246.3
		75.0		89.7		167.8		246.0
	27.58	51.0	27.49	51.8	27.53	52.75	27.52	53.6
		72.9		88.9		163.0		245.1
		68.8		86.0		164.2		240.0
	27.57	50.95	27.50	51.8	27.57	52.75	27.52	53.6
		69.0		87.1		153.5		242.9
	27.55	70.1	27.53	90.5	27.55	158.2	27.55	243.0
x_0	27.58		27.49		27.55		27.54	
a	23.408		24.290		25.203		26.087	
y	71.4		88.2		159.9		243.9	

Curve N:o 19. Comb. C_5, L_4'. $W = 3.117$ Ω.				10 Acc. $W_n = 145$ & 147 Ω. $D = 135.0$ cm.			
	27.55 54.55	27.54 55.45		27.63 56.45		27.64 57.35	
	300.9	317.2		278.4		207.1	
	305.3	320.0		279.9		212.2	
	27.52 54.5	27.58 55.5		27.65 56.45		27.61 57.3	
	306.0	318.6		281.1		217.7	
	305.0	317.7		278.0		220.6	
	27.50 54.5	27.62 55.5		27.63 56.45		27.62 57.3	
	310.2	320.4		279.0		218.3	
	27.48 306.2	27.62 317.9		27.64 276.1		27.61 215.2	
x_0	27.51	27.59		27.64		27 62	
a	27.005	27.890		28.812		29.695	
y	305.6	318.6		278.8		215.2	
	27.61 58.2	27.57 59.05		27.58 60.0		[1]) Normale	
	140.8	91.1		87.9		Ladung:	
	143.3	93.3		89.1			
	27.60 58.2	27.58 59.1		27.58 60.0		197.9	
	140.3	91.6		90.5		197.9	
	144 2	101.0		88.2		198.0	
	27.57 58.15	27.59 59.1		27.60 60.0		197.9	
	134.0	93.8		87.1		197.9	
	27.57 138.9	27.58 95.0		27.62 90.7		198.0	
x_0	27.59	27.58		27.60		Mittel:	
a	30.597	31.502		32.407		197.93	
y	140.3	94.3		88.9			
	[2]) Normale	27.58 60.9		27.60 61.8		27.63 62.75	
	Ladung:	123.8		192.1		249.9	
		118.9		190.3		250.0	
	200.0	27.58 60.9		27.58 61.8		27.60 62.7	
	200.0	123.3		194.7		254.9	
	199.9	122.0		185.9		256.2	
	200.0	27.63 60.95		27.64 61.85		27.61 62.7	
	199.9	130.0		190.1		257.0	
	200.0	27.60 126.7		27.63 201.2		27.64 253.1	
x_0	Mittel:	27.60		27.61		27.62	
a	199.97	33.317		34.205		35.102	
y		124.1		192.4		253.5	
	27.64 63.65	27.62 64.5		27.63 65.45		27.68 66.4	
	299.2	305.2		259.8		189.6	
	301.0	304.1		259.0		189.9	
	27.66 63.65	27.62 64.5		27.65 65.45		27.71 66.4	
	304.0	301.4		259.0		184.7	
	300.3	299.8		262.8		188.0	
	27.65 63.65	27.60 64.5		27.66 65.45		27.70 66.4	
	300.2	302.0		254.7		180.0	
	27.62 305.1	27.63 300.9		27.68 263.7		27.72 185.4	
x_0	27.64	27.62		27.66		27.70	
a	36.003	36.885		37.795		38.697	
y	301.6	302.2		259.8		186.3	

[1]) 7 U. n. M. $\vartheta = 20°.0$ C. [2]) 9. VI. 96. 7 U. v. M. $\vartheta = 18°.8$ C. $W_n = 147$ Ω von hier an.

Curve N:o 19. Comb. C_5, L_4'. $W = 3.117$ Ω.				10 Acc. $W_n = 145$ & 147 Ω. $D = 135.0$ cm.			
	27.72 67.3	27.73 68.25		27.73 69.15		27.76 70.05	
	127.8	102.0		114.7		156.9	
	132.9	102.8		116.0		149.5	
	27.72 67.3	27.75 68.25		27.71 69.1		27.77 70.05	
	128.9	101.9		115.2		157.8	
	133.8	102.7		115.0		158.0	
	27.71 67.3	27.77 68.25		27.73 69.15		27.74 70.05	
	128.8	101.3		117.0		156.8	
	27.72 126.9	27.73 102.9		27.76 113.9		27.75 157.1	
x_0	27.72	27.75		27.73		27.76	
a	39.583	40.500		41.405		42.295	
y	129.9	102.3		115.3		156.0	
	27.75 70.95	27.77 71.85		27.82 72.8		27.77 73.65	
	217.8	270.1		294.6		277.1	
	218.9	270.7		293.0		278.2	
	27.76 70.95	27.78 71.9		27.82 72.8		27.75 73.65	
	226.0	268.3		294.7		277.8	
	212.2	272.0		293.9		277.2	
	27.78 71.0	27.81 71.9		27.80 72.8		27.78 73.7	
	216.9	264.3		293.0		278.9	
	27.77 225.0	27.82 266.9		27.77 293.5		27.82 280.0	
x_0	27.77	27.80		27.80		27.78	
a	43.200	44.088		44.995		45.892	
y	219.5	268.7		293.8		278.2	
	27.82 74.6	27.78 75.5		27.79 76.4		27.83 77.35	
	226.9	166.0		128.8		112.9	
	232.3	172.7		127.3		112.8	
	27.80 74.6	27.75 75.45		27.81 76.4		27.84 77.35	
	230.6	170.0		126.0		113.0	
	229.9	168.9		122.9		112.9	
	27.83 74.65	27.83 75.55		27.78 76.4		27.87 77 35	
	226.9	160.1		124.8		113.9	
	27.78 221.1	27.79 158.3		27.83 127.0		27.85 113.0	
x_0	27.81	27.79		27.80		27.85	
a	46.803	47.712		48.600		49.500	
y	228.0	166.0		126.1		113.1	
	27.85 78.25	27.83 79.15		27.85 80.05		27.82 80.9	
	149.1	170.9		239.2		269.0	
	138.0	184.7		234.9		268.4	
	27.82 78.2	27.85 79.15		27.86 80.05		27.82 80.9	
	137.0	186.9		233.3		270.0	
	139.9	180.8		230.0		270.3	
	27.83 78.2	27.86 79.15		27.82 80.0		27.78 80.9	
	129.9	175.3		229.8		272.2	
	27.83 128.4	27.85 173.1		27.82 233.2		27.81 268.5	
x_0	27.83	27.85		27.84		27.81	
a	50.387	51.300		52.195		53.095	
y	127.1	178.6		233.4		269.7	

Curve N:o 19. Comb. C_5, L_4'. $W = 3.117$ Ω.			10 Acc. $W_n = 145$ & 147 Ω. $D = 135.0$ cm.	
	Normale Ladung:	27.78 81.8 281.8 281.8	27.75 82.65 263.0 264.8	27.75 83.55 208.0 212.8
	200.0	27.77 81.75	27.76 82.65	27.77 83.55
	200.0	282.0	263.4	217.9
	199.9	281.7	258.0	213.8
	200.0	27.76 81.75	27.77 82.65	27.78 83.6
	199.95	281.9	256.7	212.0
	199.95	27.75 282.0	27.75 261.2	27.80 216.8
x_0	Mittel:	27.77	27.76	27.78
a	199.97	54.002	54.890	55.792
y		281.9	261.1	213.6
	27.80 84.5 156.1 166.2	27.78 85.4 127.0 130.1	27.80 86.3 123.7 123.0	27.83 87.25 152.0 147.9
	27.78 84.5 163.1 158.2	27.82 85.4 129.0 128.2	27.78 86.3 123.0 125.0	27.81 87.2 143.0 150.3
	27.79 84.5 166.0	27.83 85.45 130.2	27.80 86.3 123.9	27.80 87.2 152.0
	27.78 163.0	27.80 127.9	27.83 124.8	27.79 147.1
x_0	27.79	27.81	27.80	27.81
a	56.713	57.603	58.502	59.410
y	162.1	128.7	123.9	148.7
	27.79 88.1 193.8 188.0	27.82 89.0 239.9 240.6	27.82 89.9 266.3 266.2	27.89 90.9 271.7 272.0
	27.82 88.1 192.0 183.3	27.83 89.05 233.9 235.3	27.84 89.95 268.0 263.6	27.87 90.85 272.3 271.8
	27.79 88.1 188.3	27.82 89.0 234.0	27.87 89.95 262.0	27.88 90.9 272.1
	27.82 196.8	27.82 237.1	27.89 265.8	27.90 269.7
x_0	27.81	27.82	27.86	27.89
a	60.295	61.193	62.078	63.002
y	190.4	236.8	265.3	271.6
	27.90 91.8 247.0 249.6	27.96 92.75 206.9 204.8	27.97 93.65 158.1 160.3	27.96 94.55 134.0 132.9
	27.89 91.8 248.1 250.3	27.97 92.75 204.8 209.3	27.98 93.7 163.0 158.9	27.97 94.55 136.1 135.0
	27.93 91.85 243.3	27.97 92.8 206.2	27.96 93.65 165.4	27.96 94.55 137.0
	27.96 247.4	27.97 205.1	27.96 159.9	27.96 136.7
x_0	27.92	27.97	27.97	27.96
a	63.900	64.798	65.698	66.587
y	247.6	206.2	160.9	135.3

Curve N:o 19. Comb. C_5, L_4'. $W = 3.117$ Ω.			10 Acc. $W_n = 145$ & 147 Ω. $D = 135.0$ cm.	
	27.96 95.45	27.95 96.35	27.90 97.2	27.98 98.2
	137.0	152.2	203.5	245.0
	134.1	158.1	197.8	241.8
	27.97 95.45	27.98 96.4	27.92 97.2	27.95 98.15
	134.8	160.2	196.9	238.3
	134.1	160.0	197.0	237.2
	27.93 95.45	27.98 96.4	27.95 97.25	27.98 98.2
	136.9	157.3	205.2	240.1
	27.95 135.1	27.97 160.8	27.98 204.1	27.97 243.0
x_0	27.95	27.97	27.94	27.97
a	67.498	68.410	69.280	70.215
y	135.3	158.1	200.8	240.9
	27.97 99.05	27.94 99.95	[1]) Normale Ladung:	[2]) Normale Ladung:
	263.4	260.2		
	263.1	261.0		
	27.96 99.05	27.95 99.95	200.0	200.0
	263.1	261.8	199.95	200.0
	262.9	261.6	200.0	199.95
	27.93 99.05	27.93 99.95	200.0	200.0
	262.1	260.8	200.05	200.0
	27.94 264.0	27.95 262.0	200.0	199.95
x_0	27.95	27.94	Mittel:	Mittel:
a	71.102	72.008	200.00	199.98
y	263.1	261.2		
	27.93 100.85	27.98 101.8	28.02 102.7	28.03 103.65
	234.8	200.1	163.2	142.0
	229.6	205.5	164.8	139.6
	27.95 100.85	28.02 101.8	28.01 102.7	28.07 103.65
	240.3	197.2	164.9	142.0
	239.4	199.2	160.9	139.7
	27.97 100.85	27.98 101.8	28.00 102.7	28.08 103.7
	236.0	197.9	160.4	142.3
	27.98 237.8	28.02 200.9	28.03 162.9	28.10 140.3
x_0	27.96	28.00	28.02	28.07
a	72.892	73.800	74.688	75.595
y	236.3	200.1	162.9	141.0
	28.10 104.6	28.07 105.45	28.16 106.45	28.13 107.35
	145.3	168.5	203.1	238.2
	143.8	167.9	203.9	241.9
	28.06 104.55	28.09 105.5	28.13 106.45	28.12 107.3
	144.0	164.1	208.1	237.0
	145.9	166.0	204.3	239.3
	28.06 104.55	28.10 105.5	28.14 106.45	28.11 107.3
	139.3	167.3	207.0	232.6
	28.07 147.0	28.08 163.3	28.13 204.3	28.08 235.0
x_0	28.07	28.09	28.14	28.11
a	76.498	77.392	78.312	79.205
y	144.2	166.2	205.1	237.3

[1]) 12.30 U. n. M. $\vartheta = 19°.0$ C. [2]) 2 U. n. M. $\vartheta = 18°.7$ C.

Curve N:o 19. Comb. C_5, L_4'. $W = 3.117$ Ω.				10 Acc. $W_n = 145$ & 147 Ω. $D = 135.0$ cm.			
	28.05 108.15	28.04 109.05		28.03 109.95	28.04 110.85		
	256.9	248.0		228.1	194.8		
	257.2	249.6		224.0	191.9		
	28.03 108.15	28.05 109.05		28.04 109.95	28.06 110.85		
	256.7	249.5		226.7	196.0		
	256.3	250.2		222.0	195.6		
	28.07 108.15	28.02 109.0		28.07 109.95	28.07 110.85		
	257.0	248.9		225.9	197.0		
	28.08 256.9	28.03 250.3		28.04 227.0	28.09 201.3		
x_0	28.06	28.04		28.05	28.07		
a	80.095	80.998		81.902	82.785		
y	256.8	249.4		225.6	196.1		
	28.09 111.8	28.12 112.7		28.13 113.65	28.20 114.6		
	162.0	146.8		148.9	173.1		
	162.0	146.7		148.3	172.3		
	28.08 111.8	28.12 112.7		28.16 113.65	28.22 114.6		
	158.9	145.1		148.0	175.0		
	162.8	148.0		152.0	172.1		
	28.09 111.8	28.11 112.7		28.18 113.7	28.21 114.6		
	167.0	145.2		148.0	173.1		
	28.12 161.9	28.13 146.3		28.20 151.1	28.18 175.3		
x_0	28.10	28.12		28.17	28.20		
a	83.708	84.582		85.498	86.393		
y	162.4	146.4		149.4	173.5		
	28.18 115.5	28.27 116.45		28.24 117.35	[1]) Normale		
	202.6	233.5		250.7	Ladung:		
	199.0	235.8		250.0			
	28.25 115.55	28.26 116.45		28.26 117.35	199.8		
	207.8	233.0		251.6	199.8		
	198.1	233.1		251.0	199.8		
	28.25 115.55	28.26 116.45		28.28 117.4	199.7		
	200.0	236.5		251.7	199.7		
	28.27 203.2	28.24 235.2		28.30 251.1	199.75		
x_0	28.24	28.26		28.27	Mittel:		
a	87.292	88.192		89.097	199.76		
y	201.8	234.5		251.0			

[1]) 4.30 U. n. M. $\vartheta = 18°.9$ C.

II. Serie mit variirendem Widerstande.

Curve N:o 20. Comb. C_{51} L_4'. $W = 24.607$ Ω.						10 Acc. $W_n = 148$ Ω. $D = 134.5$ cm.				
x_0	[1]) Norm.	29.41	29.41	29.39	29.41	29.44	29.47	29.47	29.46	29.52
a	Ladung:	− 1.505	− 0.738	0.902	1.798	2.698	3.600	4.510	5.395	6.295
y	200.75	19.4	95.7	323.4	388.5	370.0	284.2	157.7	79.7	41.6
x_0	29.49	29.47	29.47	29.50	29.54	29.54	29.58	29.62	29.65	29.66
a	7.230	8.083	8.985	9.900	10.813	11.692	12.580	13.480	14.400	15.295
y	72.9	148.5	249.5	328.7	346.7	302.3	218.3	130.3	80.1	81.7
x_0	29.62	29.67	29.65	29.64	29.65	29.66	29.66	29.68	29.69	29.66
a	16.197	17.105	18.003	18.908	19.797	20.702	21.582	22.487	23.398	24.292
y	130.8	202.8	278.6	313.9	300.5	241.5	169.7	119.6	102 2	121.2
x_0	29.66	29.69	29.71	29.70	29.72	29.72	29.76	29.76	29.75	[2]) Norm.
a	25.193	26.113	26.990	27.895	28.812	29.678	30.602	31.508	32.400	Ladung:
y	172.4	235.3	279.0	289.9	261.7	209.5	155.1	124.6	126.5	200.93
x_0	[3]) Norm.	30.07	30.05	30.08	30.09	30.08	30.11	30.09	30.10	30.12
a	Ladung:	33.328	34.198	35.093	36.005	36.902	37.808	38.702	39.605	40.497
y	200.35	150.1	198.6	245.8	270.5	265.8	236.3	191.8	154.4	136.5
x_0	30.10	30.09	30.11	30.14	30.13	30.15	30.12	30.13	30.11	30.14
a	41.402	42.308	43.193	44.105	45.020	45.910	46.803	47.698	48.588	49.513
y	144.8	173.7	214.9	246.2	258.1	245.3	213.2	179.7	155.8	148.1
x_0	30.16	30.14	30.16	30.21	30.20	30.20	30.23	30.22	30.18	30.22
a	50.395	51.303	52.190	53.093	53.997	54.903	55.790	56.710	57.587	58.498
y	162.0	190.0	220.4	243.4	244.8	229.5	202.6	176.6	159.5	159.0
x_0	30.22	30.20	30.22	30.20	30.19	30.21	30.17	30.17	30.21	30.22
a	59.415	60.302	61.205	62.102	62.985	63.895	64.798	65.700	66.603	67.510
y	176.5	199.7	224.1	237.9	235.3	219.7	195.5	174.7	165.0	167.9
x_0	30.23	30.21	30.19	30.18	30.20	30.21	30.19	30.17	[4]) Norm.	[5]) Norm.
a	68.400	69.310	70.212	71.088	72.002	72.895	73.797	74.712	Ladung:	Ladung:
y	184.8	205.2	223.6	232.0	226.2	211.7	189.9	176.0	200.37	200.55
x_0	30.16	30.19	30.20	30.19	30.19	30.20	30.21	30.24	30.26	30.26
a	75.593	76.485	77.390	78.307	79.210	80.097	80.992	81.908	82.807	83.702
y	170.6	175.5	191.5	208.6	222.0	226.9	219.8	205.2	189.2	178.5
x_0	30.25	30.26	30.28	30.33	30.39	[6]) Norm.				
a	84.602	85.495	86.388	87.303	88.197	Ladung:	—	—	—	—
y	176.0	182.3	195.9	210.9	221.2	200.96				

[1]) 23. VI. 96. 2.30 U. n. M. $\vartheta = 22°.0$ C. [2]) 7 U. n. M. $\vartheta = 22°.1$ C. [3]) 24. VI. 96. 7.30 U. n. M. $\vartheta = 20°.0$ C. [4]) 2.30 U. n. M. $\vartheta = 21°.1$ C. [5]) 2 U. n. M. $\vartheta = 21°.9$ C. [6]) 4 U. n. M. $\vartheta = 22°.2$ C.

Curve N:o 21. Comb. C_5, L_4'. $W = 41.980$ Ω.						10 Acc. $W_n = 148$ Ω. $D = 134.5$ cm.				
x_0	[1]) Norm.	27.41	27.45	27.44	27.41	27.43	27.46	27.47	27.46	27.53
a	Ladung:	− 1.507	− 0.762	0.910	1.818	2.690	3.593	4.483	5.388	6.295
y	200.45	19.1	94.0	327.5	382.5	358.5	268.6	167.4	84.3	53.2
x_0	27.53	27.56	27.55	27.55	27.56	27.57	27.63	27.66	27.69	27.74
a	7.188	8.092	9.005	9.900	10.807	11.695	12.595	13.505	14.408	15.295
y	82.5	161.3	252.6	314.7	328.5	286.1	211.3	136.4	96.0	101.6
x_0	27.78	27.74	27.71	27.66	27.72	27.80	27.77	27.74	27.77	27.80
a	16.208	17.102	18.022	18.892	19.782	20.682	21.618	22.498	23.383	24.307
y	146.5	205.9	267.9	292.9	281.9	235.6	172.9	131.4	120.7	140.8
x_0	27.83	27.89	27.97	27.95	27.97	28.02	28.05	29.09	28.12	28.14
a	25.203	26.092	26.997	27.897	28.697	29.610	30.500	31.510	32.387	33.295
y	181.9	229.6	263.5	267.9	250.0	209.5	168.6	142.9	143.5	168.3
x_0	28.17	28.21	28.24	[2]) Norm.	[3]) Norm.	28.29	28.31	28.33	28.34	28.35
a	34.183	35.092	36.012	Ladung:	Ladung:	36.882	37.787	38.690	39.605	40.503
y	203.8	235.7	251.5	200.76	200.78	245.8	222.9	190.0	165.1	155.1
x_0	28.32	28.31	28.29	28.26	28.18	28.16	28.16	28.20	28.25	28.29
a	41.397	42.292	43.208	44.112	45.010	45.888	46.790	47.683	48.598	49.500
y	164.0	187.8	216.1	234.6	238.8	227.9	205.9	185.0	168.9	167.2
x_0	28.31	28.30	28.31	28.35	28.38	28.43	28.51	28.56	28.52	28.55
a	50.390	51.300	52.195	53.095	53.987	54.888	55.793	56.705	57.585	58.495
y	178.1	201.0	218.3	229.1	227.5	214.7	196.3	180.1	174.0	177.1
x_0	28.55	28.51	28.51	28.53	28.55	28.55	28.55	28.56	28.84	28.93
a	59.400	60.290	61.205	62.093	63.003	63.907	64.800	65.707	66.613	67.498
y	190.1	205.0	217.4	223.0	218.7	207.5	192.6	182.9	180.0	185.5
x_0	28.96	28.97	28.97	28.97	28.94	28.96	29.00	28.99	[4]) Norm.	Norm.
a	68.392	69.302	70.198	71.117	72.022	72.885	73.803	74.717	Ladung:	Ladung:
y	196.2	208.6	216.8	217.2	210.8	202.5	192.4	185.8	200.81	200.83
x_0	29.28	29.27	29.27	29.30	29.31	29.32	29.35	29.36	29.40	29.40
a	75.600	76.503	77.393	78.288	79.190	80.102	81.002	81.893	82.800	83.700
y	184.3	189.8	197.6	207.2	212.9	213.1	208.0	198.1	191.4	188.0
x_0	29.37	29.35	29.33	29.38	29.41	[5]) Norm.				
a	84.618	85.507	86.403	87.305	88.193	Ladung:	—	—	—	—
y	189.1	194.1	200.4	207.4	210.3	200.77				

[1]) 22. VI. 96. 8 U. v. M. $\vartheta = 19°.5$ C. [2]) 12.30 U. n. M. $\vartheta = 20°.8$ C. [3]) 2. U. n. M. $\vartheta = 21°.2$ C. [4]) 7 U. n. M. $\vartheta = 21°.7$ C. [5]) 10.15 U. n. M. $\vartheta = 21.°0$ C.

Curve N:o 22. Comb. C_3, L_4'. $W = 65.022$ Ω.						10 Acc. $W = 147$ Ω. $D = 134.5$ cm.				
x_0	[1]) Norm.	32.23	32.28	32.25	32.23	32.22	32.17	32.17	32.16	32.16
a	Ladung:	− 1.497	− 0.748	0.895	1.802	2.718	3.600	4.502	5.407	6.292
y	199.62	22.7	99.9	314.4	368.5	355.9	279.9	171.6	95.9	67.5
x_0	32.17	32.17	32.16	32.14	32.15	32.14	32.45	25.40	25.42	25.47
a	7.213	8.115	8.992	9.897	10.810	11.695	12.598	13.503	14.405	15.295
y	93.5	162.9	236.5	291.7	308.8	282.2	225.1	146.7	114.3	119.1
x_0	25.49	25.46	25.46	25.19	25.14	25.18	25.16	25.33	25.48	25.60
a	16.210	17.113	17.990	18.922	19.812	20.690	21.617	22.495	23.395	24.285
y	154.8	210.4	246.3	217.6	257.9	223.4	178.4	150.7	140.3	155.7
x_0	25.65	25.59	25.33	25.35	25.35	25.72	25.83	25.86	[2]) Norm.	[3]) Norm.
a	25.203	26.118	26.967	27.903	28.797	29.682	30.600	31.497	Ladung:	Ladung:
y	192.7	225.0	242.8	244.2	226.8	199.4	171.1	159.6	199.30	199.64
x_0	25.33	25.82	25.82	25.81	25.81	25.80	25.81	25.86	25.82	25.88
a	32.402	33.298	34.213	35.090	36.007	36.898	37.792	38.705	39.600	40.498
y	161.6	183.6	207.0	223.9	231.8	224.5	207.3	187.3	173.7	171.5
x_0	25.90	25.95	25.96	25.91	25.94	26.00	26.00	25.99	25.96	25.98
a	41.395	42.305	43.217	44.095	45.010	45.887	46.785	47.697	48.590	49.490
y	180.6	195.6	212.0	220.0	219.9	211.6	199.0	186.3	179.7	181.2
x_0	26.06	26.09	26.11	26.18	26.23	26.27	26.22	26.24	26.28	26.30
a	50.392	51.297	52.195	53.105	53.992	54.893	55.787	56.678	57.593	58.505
y	189.1	200.2	210.2	214.1	212.0	204.1	195.1	187.8	185.1	188.2
x_0	26.30	26.32	26.35	26.34	26.47	26.51	26.52	26.53	26.56	[4]) Norm.
a	59.395	60.300	61.202	62.095	62.980	63.888	64.797	65.687	66.607	Ladung:
y	194.6	202.8	208.1	209.3	207.2	200.7	193.1	189.9	189.3	199.23
x_0	Normale	26.54	26.66	26.75	26.78	26.76	26.75	26.76	26.79	26.80
a	Ladung:	67.493	68.380	69.287	70.207	71.115	72.000	72.893	73.782	74.700
y	199.38	192.6	197.8	203.2	206.0	205.5	202.8	198.0	194.1	192.1
x_0	26.83	26.85	26.87	26.92	26.95	26.94	26.97	27.00	27.00	27.00
a	75.592	76.502	77.383	78.302	79.200	80.107	81.002	81.900	82.803	83.700
y	193.0	196.1	199.4	202.8	203.9	203.0	200.2	197.3	194.9	193.9
x_0	27.04	27.09	27.10	27.11	27.14	[5]) Norm.				
a	84.585	85.513	86.397	87.295	88.193	Ladung:	—	—	—	—
y	195.0	197.3	200.1	201.9	202.2	199.18				

[1]) 20. VI. 96. 7.30 U. v. M. $\vartheta = 20°.6$ C: [2]) 12.30 U. n. M. $\vartheta = 20°.0$ C. [3]) 2 U. n. M. $\vartheta = 20°.0$ C. [4]) 7 U. n. M. $\vartheta = 20°.4$ C. [5]) 11 U. n. N. $\vartheta = 20°.4$ C.

III. Serie mit variirender Selbstinduktion.

Curve N:o 23. Comb. C_5. L_1'. $W = 1.152$ Ω.						10 Acc. $W_n = 147$ Ω. $D = 134.5$ cm.				
x_0	[1]) Norm.	31.05	31.01	30.97	31.02	31.03	31.11	31.12	31.12	31.09
a	Ladung:	− 0.380	0.400	0.803	1.188	1.582	1.992	2.402	2.793	3.200
y	200.21	45.3	334.6	388.7	324.2	194.7	78.5	39.3	86.5	212.4
x_0	31.10	31.11	31.10	31.12	31.11	31.06	[2]) Norm.	[3]) Norm.	31.35	31.35
a	3.602	3.997	4.400	4.800	5.212	5.607	Ladung:	Ladung:	6.007	6.418
y	307.6	349.1	310.5	213.0	93.8	71.3	200.23	200.03	119.8	225.0
x_0	31.29	31.26	31.24	31.26	31.25	31.24	31.24	31.27	31.25	31.29
a	6.813	7.210	7.600	7.988	8.403	8.807	9.212	9.577	10.022	10.380
y	307.8	319.4	270.4	182.2	119.7	99.2	141.3	215.8	285.5	296.3
x_0	31.35	31.38	31.36	31.38	31.40	31.39	31.34	31.33	31.29	31.29
a	10.805	11.197	11.610	11.970	12.410	12.810	13.208	13.603	14.012	14.413
y	247.9	178.3	119.9	116.0	160.0	236.6	273.9	276.9	230.4	186.5
x_0	31.29	31.29	31.28	31.29	31.37	31.38	31.36	31.32	31.34	31.33
a	14.808	15.212	15.615	15.982	16.397	16.805	17.195	17.602	18.010	18.392
y	132.9	132.2	161.7	210.2	254.8	256.7	222.9	172.2	143.2	143.3
x_0	31.39	31.36	31.39	31.45	31.42	31.38	31.36	31.35	31.42	31.49
a	18.792	19.208	19.593	20.000	20.402	20.807	21.212	21.598	21.980	22.407
y	185.9	233.8	251.1	246.6	217.6	174.0	151.9	154.6	175.0	213.2
x_0	31.46	[4]) Norm.	Normale	31.36	31.43	31.46	31.48	31.47	31.50	31.53
a	22.817	Ladung:	Ladung:	23.202	23.603	23.990	24.408	24.782	25.180	25.617
y	243.7	200.03	200.02	241.7	211.5	180.2	159.0	164.3	191.1	219.9
x_0	31.39	31.47	31.47	31.47	31.47	31.47	31.51	31.48	31.46	31.45
a	26.015	26.405	26.808	27.197	27.582	27.982	28.385	28.807	29.198	29.603
y	236.6	229.6	200.2	173.7	164.3	171.9	196.3	221.7	230.0	223.6
x_0	31.46	31.52	31.53	31.51	31.49	31.53	[5]) Norm.			
a	29.985	30.400	30.793	31.208	31.588	32.023	Ladung:	—	—	—
y	203.4	180.9	170.2	178.3	200.3	219.1	200.03			

[1]) 30. VI. 96. 2.30 U. n. M. $\vartheta = 20°.0$ C. [2]) 5 U. n. M. $\vartheta = 20°.5$ C. [3]) 1. VII. 96. 7.30 U. v. M. $\vartheta = 18°.8$ C. [4]) 12 U. d. T. $\vartheta = 19°.0$ C. [5]) 5 U. n. M. $\vartheta = 19°.6$ C.

Curve N:o 24. Comb. C_5, L_4'. $W = 1.703$ Ω						10 Acc. $W_n = 147$ Ω. $D = 134.5$ cm.				
x_0	[1]) Norm.	31.01	31.02	31.09	31.09	31.10	31.12	31.13	31.17	31.21
a	Ladung:	−0.773	−0.420	0.587	1.208	1.812	2.403	3.003	3.603	4.192
y	200.67	32.5	100.2	327.7	397.7	367.9	263.2	128.7	48.2	38.0
x_0	31.20	31.19	31.16	31.20	31.20	31.26	31.31	31.31	31.16	31.13
a	4.807	5.410	6.013	6.600	7.210	7.788	8.392	8.995	9.627	10.202
y	116.6	224.4	332.2	359.9	318.5	223.9	127.4	65.9	71.9	141.9
x_0	31.19	31.13	31.09	[2]) Norm.	[3]) Norm.	31.19	31.29	31.23	31.21	31.22
a	10.827	11.407	11.990	Ladung:	Ladung:	12.587	13.198	13.805	14.390	14.983
y	248.0	311.6	328 6	200.39	200.39	273.6	195.2	118.5	87.9	104.9
x_0	31.24	31.27	31.28	31.31	31.38	31.40	31.41	31.36	31.36	31.41
a	15.600	16.200	16.805	17.388	17.998	18.597	19.202	19.808	20.393	20.988
y	164.0	243.6	300.9	303.9	252.7	175.9	119.0	105.8	127.4	189.4
x_0	31.44	31.40	31.42	31.45	31.41	31.44	31.41	31.41	31.39	31.40
a	21.608	22.198	22.795	23.393	24.010	24.612	25.192	25.805	26.407	27.000
y	262.7	289.5	273.3	224.2	164.7	124.6	121.4	154.3	207.5	253.5
x_0	31.40	31.38	31.37	31.36	31.38	31.42	31.44	31.43	31.44	31.46
a	27.605	28.190	28.785	29.395	29.993	30.600	31.212	31.792	32.407	33.003
y	275.7	261.8	211.9	167.7	134.5	138.0	173.8	219.3	257.0	262.9
x_0	31.46	31.46	31.44	31.44	31.43	31.41	31.40	31.47	31.50	[4]) Norm.
a	33.603	34.187	34.813	35.407	35.987	36.593	37.200	37.782	38.407	Ladung:
y	238.2	201.9	156.9	140.8	152.5	183.3	224.2	248.2	253.6	200.28
x_0	[5]) Norm.	31.59	31.58	31.56	31.53	31.56	31.60	31.59	31.55	31.53
a	Ladung:	38.992	39.592	40.212	40.818	41.405	41.997	42.613	43.212	43.817
y	200.22	229.0	187.0	159.8	148.6	157.4	187.3	226.7	245.0	244.4
x_0	31.51	31.56	31.47	31.50	31.51	31.54	31.53	31.49	31.49	31.48
a	44.405	45.003	45 580	46.198	46.790	47.398	48.015	48.612	49.208	49.822
y	224.3	189.0	161.4	155.1	169.7	192.8	225.1	242.0	238.0	210.1
x_0	31.52	31.51	31.46	31.49	31.49	31.51	[6]) Norm.			
a	50.398	51.003	51.607	52.195	52.808	53.390	Ladung:	—	—	—
y	183.0	164.6	160.9	174.4	204.3	222.4	200.22			

[1]) 29. VI. 96. 8 U. v. M. $\vartheta = 19°.1$ C. [2]) 12 U. d. T. $\vartheta = 19°.1$ C. [3]) 2 U. n. M. $\vartheta = 19°.0$ C. [4]) 7 U. n. M. $\vartheta = 19°.1$ C. [5]) 30. VI. 96. 7.30 U. v. M. $\vartheta = 19°.0$ C. [6]) 10 U. v. M. $\vartheta = 19°.0$ C.

C. Schwingungscurven.

I. Serie mit variirender Capacität.

Curve N:o 16. Comb. C_1, L_4'. $W = 3.117$ Ohm. $Q = 4.10$ Mikrocoul.

t	−0.305	0.000	0.314	0.652	0.962	1.281	1.610	1.939	2.237	2.584	2.888	3.205	3.544
η	39.2	100.0	165.0	181.3	166.5	109.0	53.5	30.3	42.5	77.9	117.9	151.1	152.0
t	3.863	4.185	4.485	4.816	5.152	5.455	5.779	6.105	6.412	6.757	7.058	7.356	7.687
η	130.6	97.3	59.5	51.1	60.6	93.8	120.8	136.5	133.7	115.0	88.7	70.4	66.8
t	8.028	8.347	8.655	8.969	9.287	9.591	9.926	10.255	10.556	10.887	11.177	11.515	11.835
η	79.7	104.6	120.0	126.9	118.6	100.5	83.8	75.0	73.0	89.6	106.4	122.7	121.7
t	12.149	12.413	12.763	13.085	13.400	13.704	14.020	14.314	14.655	14.996	15.294	15.601	15.886
η	111.8	96.2	82.4	78.4	83.6	94.7	112.1	117.0	113.8	103.0	92.1	84.4	84.9
t	16.202	16.544	16.868	17.164	17.493	17.785	18.091	18.415	18.728	19.040	19.382	19.675	19.987
η	91.2	100.1	110.2	112.0	107.1	100.7	91.8	87.9	88.7	96.0	104.5	108.0	106.9
t	20.300	20.607	20.939	21.220	21.534	21.875	22.173	22.490	22.796	23.130	23.428	23.743	24.039
η	103.4	96.7	91.8	90.3	92.1	99.0	104.2	105.9	104.5	99.7	96.1	92.9	92.6
t	24.355	24.691	24.984	25.296	25.605	25.920	26.248	26.557	26.859	27.160	27.460	27.806	—
η	95.2	100.1	103.9	104.7	103.0	98.5	95.3	93.7	94.5	97.2	100.7	103.0	

Curve N:o 17. Comb. C_2, L_4'. $W = 3.117$ Ohm. $Q = 10.24$ Mikrocoul.

t	−0.547	0.000	0.475	0.958	1.467	1.933	2.427	2.896	3.379	3.877	4.357	4.843	5.342
η	29.5	100.0	161.1	188.7	180.2	135.1	84.1	31.3	14.5	37.4	92.9	147.1	176.0
t	5.800	6.284	6.767	7.263	7.746	8.213	8.695	9.177	9.668	10.139	10.604	11.124	11.580
η	171.6	138.6	78.1	45.0	26.1	40.7	89.9	129.4	161.3	165.2	140.3	95.3	60.7
t	12.059	12.555	13.011	13.501	13.971	14.454	14.936	15.406	15.869	16.358	16.823	17.298	17.778
η	36.5	44.8	82.3	109.9	153.3	158.2	138.7	104.6	78.9	47.9	47.4	66.7	97.7
t	18.242	18.710	19.192	19.671	20.142	20.600	21.102	21.558	22.019	22.509	22.975	23.449	23.923
η	136.9	150.4	142.9	114.9	78.7	58.1	54.5	67.6	95.0	122.1	142.3	140.2	114.9
t	24.411	24.848	25.322	25.792	26.256	26.729	27.202	27.680	28.125	28.610	29.086	29.531	30.006
η	88.7	63.9	57.3	68.7	91.2	117.8	136.4	138.1	126.0	98.5	79.9	65.0	67.2
t	30.534	30.938	31.397	31.857	32.356	32.789	33.271	33.754	34.224	34.664	35.134	35.595	36.073
η	81.8	106.7	126.6	134.0	128.2	115.6	89.1	70.9	66.9	76.9	94.5	115.4	130.7
t	36.549	37.012	37.462	37.922	38.397	38.852	39.335	39.794	40.241	40.692	41.194	41.632	42.118
η	128.5	117.3	98.0	79.2	71.5	74.5	85.5	106.6	121.5	125.9	116.2	102.2	84.9
t	42.561	43.022	43.479	43.956	44.416	44.882	—	—	—	—	—	—	—
η	75.4	74.7	85.0	102.6	115.8	123.0							

Curve N:o 18. Comb. C_3, L_4'. $W = 3.117$ Ohm. $Q = 20.42$ Mikrocoul.

t	−1.062	−0.556	0.000	0.625	1.296	1.916	2.570	3.194	3.864	4.507	5.119	5.767	6.401
η	12.6	52.8	100.0	156.4	191.0	187.3	145.9	99.5	43.8	14.2	19.1	51.3	103.3
t	7.045	7.694	8.312	8.960	9.599	10.240	10.864	11.508	12.157	12.765	13.391	14.032	14.661
η	149.3	177.7	172.5	140.8	92.7	49.2	27.9	32.8	66.9	107.8	146.4	168.0	160.6
t	15.298	15.934	16.563	17.202	17.825	18.445	19.063	19.696	20.325	20.969	21.597	22.189	22.817
η	131.4	88.1	55.9	36.6	43.6	72.3	111.5	138.7	157.5	149.8	130.4	91.3	61.7
t	23.462	24.070	24.699	25.308	25.939	26.552	27.187	27.830	28.442	29.058	29.666	30.288	30.919
η	44.6	50.0	74.0	106.4	134.1	151.4	145.0	121.2	94.6	63.9	51.5	55.7	81.1
t	31.547	32.146	32.770	33.390	34.015	34.651	35.248	35.885	36.485	37.105	37.744	38.322	38.949
η	109.2	133.0	144.2	140.6	117.7	91.3	67.0	57.0	61.3	83.6	108.0	129.2	139.6
t	39.575	40.171	40.785	41.403	42.012	42.628	43.245	43.847	44.456	45.086	45.701	46.297	46.915
η	136.4	117.1	97.8	74.7	62.3	63.6	79.6	101.5	121.2	134.0	134.4	120.7	99.4
t	47.525	48.144	48.783	49.388	50.000	50.628	51.219	51.817	52.458	53.037	53.659	54.274	54.885
η	82.8	48.2	66.5	78.6	98.8	120.1	130.4	130.2	119.9	100.1	82.5	70.8	71.6
t	55.480	56.103	56.698	57.272	57.899	58.531	59.127	59.726	60.324	60.939	61.530	62.150	62.748
η	80.2	99.0	116.6	126.3	126.3	115.4	100.2	86.5	73.9	73.3	82.2	98.4	114.1
t	63.343	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
η	122.0												

Curve N:o 19. Comb. C_3, L_4'. W = 3.117 Ohm. $Q = 40.92$ Mikrocoul.

t	−1.620	−0.798	0.000	0.957	1.929	2.905	3.850	4.827	5.786	6.715	7.713	8.653	9.602
η	8.7	45.2	100.0	160.2	190.6	181.9	135.4	83.3	33.6	13.7	30.7	75.6	132.4
t	10.549	11.492	12.477	13.410	14.360	15.319	16.266	17.217	18.151	19.099	20.060	20.972	21.935
η	171.3	183.0	152.0	113.6	67.0	31.9	30.3	59.4	104.8	148.7	171.5	164.8	129.7
t	22.872	23.823	24.748	25.668	26.617	27.536	28.491	29.405	30.358	31.273	32.206	33.141	34.075
η	81.9	52.3	36.2	44.8	80.9	122.1	151.0	157.4	138.8	108.3	71.2	48.0	45.3
t	35.015	35.928	36.853	37.778	38.686	39.618	40.541	41.449	42.385	43.313	44.221	45.145	46.050
η	62.5	96.3	125.7	148.3	148.6	128.8	93.3	65.4	51.6	58.1	78.4	109.5	133.0
t	45.975	47.891	48.816	49.743	50.645	51.556	52.459	53.384	54.292	55.206	56.128	57.028	57.939
η	144.7	137.4	113.5	83.3	63.5	57.0	64.0	89.5	116.2	133.4	139.2	129.4	106.6
t	58.868	59.766	60.675	61.590	62.483	63.387	64.286	65.203	66.105	67.004	67.908	68.803	69.716
η	81.4	64.8	62.4	74.8	95.3	117.8	131.3	134.3	123.0	103.0	80.8	68.1	68.1
t	70.630	71.505	72.440	73.329	74.237	75.120	76.025	76.913	77.816	78.718	79.610	80.524	81.418
η	79.3	100.4	119.7	130.3	129.4	117.5	100.1	81.8	71.0	72.5	83.4	102.5	118.1
t	82.309	83.210	84.109	84.988	85.905	86.774	87.681	88.570	89.461	90.354	91.252	—	—
η	127.3	123.9	112.4	98.2	81.6	73.7	75.2	87.1	101.0	116.8	124.7		

II. Serie mit variirendem Widerstande.

Curve N:o 20. Comb. C_5, L_4'. $W = 24.607$ Ohm. $Q = 40.82$ Mikrocoul.

t	− 1.616	− 0.793	0.000	0.966	1.926	2.888	3.850	4.822	5.764	6.721	7.715	8.620	9.575
η	9.7	48.1	100.0	157.7	186.8	178.6	139.7	78.9	40.0	20.9	36.6	74.4	123.4
t	10.544	11.508	12.436	13.371	14.320	15.287	16.229	17.177	18.127	19.067	20.015	20.943	21.889
η	160.1	168.2	148.0	108.4	65.3	40.2	41.0	65.6	100.9	137.0	153.3	147.1	119.5
t	22.807	23.750	24.698	25.629	26.565	27.518	28.426	29.364	30.314	31.209	32.162	33.097	34.016
η	84.8	60.0	51.3	60.8	86.1	117.1	137.2	142.2	128.6	104.2	77.6	62.5	63.4
t	34.958	35.855	36.774	37.710	38.633	39.558	40.476	41.400	42.311	43.239	44.164	45.067	45.995
η	75.3	99.2	121.9	133.5	131.3	117.3	95.8	77.5	68.6	72.7	87.0	107.1	122.1
t	46.929	47.834	48.744	49.653	50.559	51.497	52.391	53.312	54.211	55.123	56.039	56.955	57.849
η	127.7	121.6	106.2	89.9	78.2	74.3	81.2	94.9	109.7	120.7	121.4	114.1	101.1
t	58.780	59.657	60.586	61.510	62.406	63.313	64.217	65.105	66.017	66.929	67.835	68.740	69.651
η	88.4	80.0	79.7	88.3	99.7	111.4	118.1	116.8	109.4	97.6	87.5	82.7	84.1
t	70.540	71.454	72.359	73.238	74.151	75.044	75.949	76.866	77.747	78.638	79.540	80.456	81.357
η	92.4	102.3	111.2	115.2	112.5	105.5	94.9	88.1	85.3	87.7	95.6	103.9	110.3
t	82.241	83.121	84.043	84.938	85.830	86.717	87.615	88.503	89.410	90.294	—	—	—
η	112.7	109.3	102.2	94.4	89.2	87.9	91.0	97.6	104.8	109.8			

Curve N:o 21. Comb. C_5, L_4'. $W = 41.980$ Ohm. $Q = 40.83$ Mikrocoul.

t	− 1.622	− 0.821	0.000	0.978	1.952	2.888	3.855	4.807	5.773	6.740	7.692	8.645	9.622
η	9.6	47.3	100.0	159.7	184.4	173.7	132.6	83.8	42.4	26.8	41.5	80.8	125.0
t	10.572	11.534	12.473	13.425	14.385	15.336	16.270	17.229	18.170	19.136	20.051	20.983	21.921
η	153.9	160.1	140.7	105.2	68.4	48.3	51.0	73.5	102.6	132.2	143.8	138.7	116.8
t	22.901	23.821	24.743	25.704	26.636	27.558	28.496	29.430	30.259	31.205	32.124	33.166	34.071
η	86.5	65.9	60.6	70.6	90.9	113.9	130.1	132.1	123.7	104.3	84.3	71.6	71.9
t	35.006	35.920	36.855	37.801	38.694	39.622	40.547	41.486	42.405	43.324	44.238	45.177	46.102
η	84.2	101.5	116.8	125.5	121.6	110.7	94.7	82.6	77.6	82.3	93.7	107.4	116.3
t	47.022	47.919	48.838	49.746	50.673	51.589	52.490	53.417	54.325	55.235	56.137	57.047	57.957
η	118.3	113.1	102.5	92.3	84.4	83.6	89.0	100.1	108.4	113.6	112.9	106.7	97.8
t	58.878	59.770	60.687	61.601	62.501	63.424	64.319	65.232	66.140	67.040	67.951	68.842	69.826
η	89.9	86.9	88.5	94.8	102.1	108.0	110.7	108.6	103,2	96.0	91.3	89.9	92.6
t	70.622	71.534	72.431	73.353	74.261	75.123	76.039	76.956	77.817	78.722	79.611	80.502	81.401
η	97.7	103.8	107.7	107.9	104.8	100.8	95.9	92.7	92.0	94.7	98.4	103.1	105.8
t	82.312	83.205	84.093	84.996	85.892	86.809	87.696	88.590	89.481	90.365	—	—	—
η	105.9	103.5	98.7	95.4	93.8	94.3	96.7	99.8	103.2	104.6			

Curve N:o 22. Comb. C_5, L_4'. $W = 65\,022$ Ohm. $Q = 41.02$ Mikrocoul.

t	−1.602	−0.800	0.000	0.955	1.921	2.898	3.836	4.794	5.755	6.692	7.666	8.621	9.548
η	11.47	50.5	100.0	154.4	178.9	173.3	138.5	86.2	48.5	34.1	47.2	82.0	117.9
t	10.502	11.464	12.395	13.339	14.427	15.380	16.320	17.286	18.239	19.163	20.190	21.086	22.006
η	144.0	151.9	139.6	112.4	73.9	57.7	60.2	78.0	105.4	122.6	134.2	128.2	111.6
t	22.978	23.893	24.830	25.756	26.712	27.668	28.562	29.545	30.466	31.369	32.317	33.245	34.205
η	89.7	75.9	70.8	78.4	96.8	112.4	121.0	120.7	113.4	100.0	86.1	80.4	81.3
t	35.112	36.057	36.962	37.988	38.827	39.747	40.684	41.607	42.525	43.444	44.375	45.307	46.209
η	92.1	103.6	111.8	115.6	112.1	103.7	94.0	87.3	86.2	90.7	98.1	106.1	110.0
t	47.143	48.037	48.954	49.886	50.797	51.713	52.628	53.546	54.458	55.379	56.275	57.186	58.096
η	109.9	105.9	99.8	93.6	90.3	91.1	94.9	100.4	105.3	107.2	106.1	102.8	97.9
t	59.006	59.921	60.842	61.743	62.654	63.564	64.466	65.350	66.262	67.177	68.072	68.995	69.888
η	94.3	93.0	94.5	97.7	101.7	104.3	104.9	103.9	100.7	97.0	95.4	95.1	96.7
t	70.772	71.676	72.598	73.510	74.398	75.282	76.181	77.099	77.990	78.900	79.781	80.694	81.591
η	99.2	101.9	103.2	103.0	101.7	99.4	97.4	96.5	96.9	98.4	100.0	101.7	102.3
t	82.538	83.392	84.283	85.188	86.078	86.957	87.877	88.759	89.652	90.544	—	—	—
η	101.8	100.5	99.0	97.9	97.4	97.9	99.0	100.4	101.3	101.5			

III. Serie mit variirender Selbstinduktion.

Curve N:o 23. Comb. C_5, L_1'. $W = 1.152$ Ohm. $Q = 40.97$ Mikrocoul.

t	−0.408	0.000	0.428	0.859	1.272	1.692	2.129	2.568	2.986	3.419	3.848	4.268	4.698
η	22.8	100.0	163.1	187.4	158.5	97.3	39.5	19.8	43.6	105.9	150.9	169.7	152.2
t	5.124	5.560	5.982	6.404	6.841	7.261	7.682	8.096	8.508	8.946	9.373	9.802	10.187
η	101.1	47.2	35.9	60.3	112.1	151.0	156.4	133.7	91.3	60.3	50.0	71.1	107.7
t	10.659	11.037	11.484	11.896	12.331	12.712	13.175	13.596	14.015	14.432	14.857	15.283	15.699
η	141.3	145.8	123.1	89.4	60.4	58.4	80.4	117.7	135.4	136.8	114.7	93.4	66.9
t	16.123	16.547	16.931	17.364	17.791	18.199	18.627	19.052	19.453	19.869	20.304	20.706	21.140
η	66.5	81.2	105.0	126.3	127.2	111.1	86.4	72.0	72.1	93.1	116.3	124.6	122.5
t	21.551	21.973	22.397	22.800	23.197	23.638	24.066	24.469	24.883	25.285	25.718	26.106	26.518
η	108.5	87.3	76.3	77.7	87.7	106.3	121.0	120.1	105.6	90.3	79.9	82.5	95.6
t	26.970	27.377	27.789	28.206	28.609	29.007	29.422	29.837	30.276	30.679	31.098	31.492	31.919
η	109.6	117.7	114.3	100.1	87.1	82.5	86.2	98.2	110.5	114.6	111.4	101.6	90.6
t	32.325	32.756	33.145	33.591	—	—	—	—	—	—	—	—	—
η	85.3	89.3	100.1	109.2									

Curve N.o 24. Comb. C_5, L_2'. $W = 1.703$ Ohm. $Q = 41.02$ Mikrocoul.

t	−0.831	−0.451	0.000	0.629	1.293	1.939	2.569	3.209	3.849	4.476	5.131	5.772	6.412
η	16.3	50.4	100.0	159.7	190.9	177.8	130.0	64.6	24.2	19.1	58.6	111.5	161.8
t	7.036	7.682	8.296	8.933	9.571	10.242	10.850	11.510	12.122	12.737	13.365	14.006	14.646
η	174.3	155.6	111.3	64.0	33.1	36.2	71.2	122.8	152.6	160.3	135.0	97.5	59.6
t	15.261	15.884	16.531	17.160	17.784	18.402	19.039	19.666	20.296	20.931	21.541	22.161	22.807
η	44.2	52.8	82.2	120.8	147.7	149.0	125.1	88.0	59.1	53.3	64.0	94.7	129.9
t	23.423	24.044	24.663	25.307	25.931	26.533	27.168	27.794	28.407	29.034	29.640	30.256	30.887
η	142.4	134.9	111.6	82.6	62.7	61.1	77.4	103.5	125.6	136.0	129.4	105.6	84.0
t	31.503	32.130	32.760	33.358	33.991	34.605	35.222	35.822	36.467	37.077	37.674	38.296	38.920
η	67.6	69.3	87.0	109.2	127.2	130.0	118.3	100.8	78.7	70.7	76.5	91.7	111.6
t	39.512	40.151	40.747	41.362	41.996	42.618	43.238	43.830	44.448	45.062	45.681	46.281	46.887
η	123.1	125.6	113.9	93.6	80.2	74.6	79.0	93.7	112.8	121.5	121.3	111.7	94.5
t	47.480	48.108	48.709	49.328	49.955	50.564	51.169	51.792	52.374	52.988	53.606	54.198	54.819
η	80.9	77.8	85.1	96.4	112.0	120.1	118.2	104.8	91.6	82.6	80.7	87.4	102.0
t	55.417	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
η	110.8												

D. Abhängigkeit der Oscillationszeit von der Grösse der normalen Ladung.

1. Beobachtete Curvenpunkte.

1 Acc. Comb. C_5, L_4'. $W = 3.117$ Ω.						$W_n = 2150$ Ω. $D = 134.65$ cm.				
x_0	[1]) Norm.	28.17	28.14	28.11	28.12	28.16	28.20	28.19	28.18	28.21
a	Ladung:	15.885	16.458	17.047	32.678	33.297	33.898	49.713	50.308	50.877
y	200.09	126.5	198.7	273.8	135.8	200.7	273.7	145.4	194.2	246.3
x_0	28.21	28.20	28.20	28.19	28.17	28.15	[2]) Norm.			
a	67.008	67.592	68.215	84.497	85.108	85.683	Ladung:	—	—	—
y	155.9	199.8	248.9	160.9	197.6	235.8	200.08			

[1]) 16. VI. 96. 8.30 U. v. M. $\vartheta = 19°.2$ C. [2]) 9.30 U. v. M. $\vartheta = 19°.4$ C.

2 Acc. Comb. C_5, L_4'. $W = 3.117$ Ω.						$W_n = 847$ Ω. $D = 134.65$ cm.				
x_0	[1]) Norm.	27.53	27.58	27.62	27.68	27.72	27.77	27.82	27.82	27.85
a	Ladung:	15.993	16.583	17.202	32.788	33.397	34.005	49.803	50.387	50.997
y	200.22	135.0	211.6	277.3	141.5	209.4	267.2	147.7	198.8	239.1
x_0	27.90	27.95	27.96	27.98	28.03	28.07	[2]) Norm.			
a	67.193	67.802	68.405	84.712	85.263	85.907	Ladung:	—	—	—
y	162.9	201.8	242.5	162.0	200.3	234.1	200.02			

4 Acc. Comb. C_5, L_4'. $W = 3.117$ Ω.						$W_n = 384$ Ω. $D = 134.65$ cm.				
x_0	[3]) Norm.	27.20	27.25	27.28	27.33	27.41	27.38	27.36	27.37	27.36
a	Ladung:	15.947	16.647	17.248	33.003	33.595	34.205	49.998	50.602	51.195
y	200.23	123.2	195.9	268.3	154.0	211.6	266.4	155.9	195.5	234.3
x_0	27.39	27.20	27.45	27.49	27.50	27.50	Norm.			
a	67.482	68.088	68.703	84.987	85.600	86.205	Ladung:	—	—	—
y	162.7	208.4	245.5	161.4	193.5	223.4	200.27			

6 Acc. Comb. C_5, L_4'. $W = 3.117$ Ω.						$W_n = 250$ Ω. $D = 134.65$ cm.				
x_0	[4]) Norm.	26.96	27.02	27.03	27.04	27.04	27.08	27.10	27.11	27.09
a	Ladung:	16.105	16.708	17.317	33.235	33.843	34.442	50.600	51.203	51.798
y	200.00	126.2	196.2	266.3	156.7	202.5	253.9	167.2	209.6	247.0
x_0	27.12	27.13	27.16	27.16	27.18	27.19	Norm			
a	67.988	68.602	69.180	85.543	86.153	86.737	Ladung:	—	—	—
y	172.1	202.9	239.3	171.2	201.4	228.6	200.03			

8 Acc. Comb. C_5, L_4'. $W = 3.117$ Ω.						$W_n = 185$ Ω. $D = 134.65$ cm.				
x_0	[5]) Norm	26.61	26.67	26.70	26.68	26.71	26.72	26.77	26.79	26.80
a	Ladung:	16.405	17.002	17.603	33.405	34.007	34.593	50.595	51.187	51.805
y	199.76	153.0	221.2	286.1	153.1	201.2	255.0	160.3	195.4	232.7
x_0	26.82	26.85	26.89	26.92	26.93	26.93	Norm.			
a	68.195	68.777	69.388	85.993	86.620	87.203	Ladung:	—	—	—
y	168.1	196.0	231.1	177.9	206.7	228.6	199.76			

[1]) 15. VI. 96. [2]) 6.30 U. n. M. $\vartheta = 20°.6$ C. [3]) 15. VI. 96. 2 U. n. M. $\vartheta = 20°.6$ C. [4]) 15. VI. 96. 12 U. d. T. $\vartheta = 20°.0$ C. [5]) 15. VI. 96. 7.30 U. v. M. $\vartheta = 19°.0$ C.

2. Reducirte Curvenpunkte.

1 Acc.	t	0.000	16.849	17.484	18.104	34.380	35.007	35.626	51.812	52.417	52.993
	η	100.0	63.5	99.3	135.9	68.1	100.3	135.9	72.9	97.1	122.6
	t	69.283	69.871	70.496	86.781	87.390	87.965	—	—	—	—
	η	78.1	99.9	123.9	80.6	98.8	117.5				
2 Acc.	t	0.000	17.010	17.629	18.279	34.403	35.130	35.735	51.923	52.518	53.134
	η	100.0	67.7	100.6	173.3	71.0	104.6	132.5	74.1	99.3	119.0
	t	69.491	70.100	70.704	87.010	87.556	88.194	—	—	—	—
	η	81.7	100.8	120.7	81.2	100.1	116.5				
4 Acc.	t	0.000	16.969	17.704	18.335	34.740	35.347	35.977	52.149	52.763	53.367
	η	100.0	62.0	97.9	132.8	77.3	105.5	131.9	78.2	97.7	216.5
	t	69.817	70.423	71.039	87.323	87.933	88.536	—	—	—	—
	η	81.6	104.0	121.9	81.0	96.7	111.2				
6 Acc.	t	0.000	17.140	17.773	18.413	34.991	35.618	36.235	52.775	53.387	53.993
	η	100.0	63.6	98.1	131.9	78.7	101.2	126.1	83.9	104.7	122.7
	t	70.345	70.961	71.539	87.904	88.510	89.091	—	—	—	—
	η	86.3	101.4	119.1	85.9	100.7	113.9				
8 Acc.	t	0.000	17.464	18.090	18.723	35.184	35.804	36.407	52.791	53.393	54 020
	η	100.0	77.0	110.4	141.4	77.1	100.7	126.7	80.6	97.9	116.0
	t	70.574	71.157	71.767	88.370	88.994	89.575	—	—	—	—
	η	84.5	98.2	115.2	89.3	103.3	114.0				

E. Dämpfungsmessungen.

I. Serien für verschiedene Capacitäten, bei unverändert gelassener Combination L'.

a) $C = 0.2033$ M. F. $L' = L_4'$.

N:o 1. 18. VI. 96. $\vartheta = 20°.8$ C. $W = 3.152$ Ohm.							10 Acc. $W_n = 1415$ Ω. $D = 134.6$ cm.					
—	N. L.	(2)	(4)	(6)	(8)	(10)	(12)	(14)	(16)	(18)	(20)	N. L.
Beob. v	149.95	38.13	66.97	87.13	103.05	115.08	123.93	130.30	135.08	138.55	141.00	149.95
Corr. v	149.74	38.12	66.94	87.09	102.97	114.99	123.81	130.18	134.94	138.40	140.83	149.74
k		1.1583	1.1611	1.1496	1.1574	1.1601	1.1577	1.1514	1.1496	1.1424	1.1282	—
$\alpha = \ln k$		0.14691	0.14935	0.13945	0.14617	0.14854	0.14640	0.14097	0.13945	0.13316	0.12059	—

b) $C = 0.5071$ M. F. $L' = L_4'$.

N:o 1. 13. VI. 96. $\vartheta = 17°.3$ C. $W = 3.109$ Ohm.							10 Acc. $W_n = 648$ Ω. $D = 134.65$ cm.					
—	N. L.	(2)	(4)	(6)	(8)	(10)	(12)	(14)	(16)	(18)	(20)	N. L.
Beob. v	200.10	26.08	50.20	71.85	87.97	101.98	113.17	123.32	132.07	139.40	146.02	200.06
Corr. v	197.88	26.08	50.16	71.72	87.73	101.62	112.70	122.73	131.36	138.58	145.09	197.84
k		1.0732	1.0784	1.0821	1.0702	1.0697	1.0631	1.0647	1.0629	1.0591	1.0599	—
$\alpha = \ln k$		0.07069	0.07553	0.07889	0.06788	0.06742	0.06116	0.06268	0.06102	0.05747	0.05816	—

N:o 2. 26. VI. 96. $\vartheta = 20°.1$ C. $W = 12.514$ Ohm.							10 Acc. $W_n = 650$ Ω. $D = 134.5$ cm.					
—	N. L.	(2)	(4)	(6)	(8)	(10)	(12)	(14)	(16)	(18)	(20)	N. L.
Beob. v	200.09	30.35	57.05	78.13	95.95	111.05	122.95	132.93	141.23	148.83	154.98	200.10
Corr. v	197.88	30.34	56.98	77.96	95.64	110.60	122.36	132.21	140.38	147.84	153.87	197.89
k		1.0868	1.0903	1.0840	1.0830	1.0823	1.0750	1.0724	1.0687	1.0720	1.0663	—
$\alpha = \ln k$		0.08324	0.08658	0.08061	0.07974	0.07912	0.07235	0.06988	0.06643	0.06947	0.06420	—

N:o 3. 26. VI. 96. $\vartheta = 20°.4$ C. $W = 24.648$ Ohm.							10 Acc. $W_n = 650$ Ω. $D = 134.5$ cm.					
—	N. L.	(2)	(4)	(6)	(8)	(10)	(12)	(14)	(16)	(18)	(20)	N. L.
Beob. v	199.99	35.13	63.98	87.40	106.03	121.00	133.18	143.08	151.35	158.28	164.33	200.03
Corr. v	197.77	35.12	63.88	87.17	105.64	120.44	132.46	142.19	150.31	157.11	163.03	197.81
k	1.1027	1.1022	1.1002	1.0954	1.0915	1.0881	1.0840	1.0824	1.0801	1.0818		—
$\alpha = \ln k$	0.09775	0.09728	0.09551	0.09134	0.08754	0.08446	0.08064	0.07914	0.07709	0.07863		—

N:o 4. 26. VI. 96. $\vartheta = 20°.8$ C. $W = 42.040$ Ohm.							10 Acc. $W_n = 650$ Ω. $D = 134.5$ cm.					
—	N. L.	(2)	(4)	(6)	(8)	(10)	(12)	(14)	(16)	(18)	(20)	N. L.
Beob. v	200.00	40.78	73.48	98.93	118.28	133.78	145.35	155.08	163.00	169.35	174.18	200.03
Corr. v	197.78	40.76	73.34	98.60	117.75	133.04	144.42	153.97	161.73	167.94	172.66	197.81
k	1.1223	1.1233	1.1201	1.1132	1.1118	1.1012	1.1036	1.1023	1.0991	1.0899		—
$\alpha = \ln k$	0.11541	0.11628	0.11343	0.10726	0.10601	0.09664	0.09860	0.09745	0.09452	0.08607		—

N:o 5. 26. VI. 96. $\vartheta = 20°.8$ C. $W = 65.097$ Ohm.							10 Acc. $W_n = 650$ Ω. $D = 134.5$ cm.					
—	N. L.	(2)	(4)	(6)	(8)	(10)	(12)	(12)	(16)	(18)	(20)	N. L.
Beob. v	200.02	48.38	85.08	113.08	134.08	147.93	159.00	167.23	174.28	179.88	183.98	200.03
Corr. v	197.80	48.34	84.86	112.61	133.34	146.96	157.83	165.86	172.76	178.22	182.21	197.81
k	1.1504	1.1503	1.1514	1.1493	1.1260	1.1278	1.1187	1.1294	1.1308	1.1206		—
$\alpha = \ln k$	0.14011	0.14007	0.14099	0.13940	0.11868	0.12026	0.11211	0.12165	0.12294	0.11389		—

c) $\ell' = 1.0199$ M. F. $L' = L_4'$.

N:o 1. 11. VI. 96. $\vartheta = 18°.1$ C. $W = 3.117$ Ohm.							10 Acc. $W_n = 303$ Ω. $D = 134.65$ cm.					
—	N. L.	(2)	(4)	(6)	(8)	(10)	(12)	(14)	(16)	(18)	(20)	N. L.
Beob. v	199.99	25.00	48.77	70.07	85.30	99.97	111.95	121.32	130.00	137.50	144.22	200.00
Corr. v	197.47	25.00	48.75	70.03	85.19	99.74	111.59	120.82	129.36	136.80	143.31	197.48
k	1.0700	1.0769	1.0803	1.0654	7.0719	1.0668	1.0585	1.0608	1.0595	1.0586		—
$\alpha = \ln k$	0.06770	0.07407	0.07721	0.06332	0.06940	0.06463	0.05685	0.05906	0.05782	0.05676		—

N:o 2. 26. VI. 96. $\vartheta = 19°.7$ C. $W = 12.508$ Ohm. | 10 Acc. $W_n = 305\ \Omega$. $D = 134.5$ cm.

—	N. L.	(2)	(4)	(6)	(8)	(10)	(12)	(14)	(16)	(18)	(20)	N. L.
Beob. v	200.33	30.05	56.98	80.38	98.00	112.88	124.25	134.33	142.95	149.90	156.03	200.33
Corr. v	197.80	30.04	56.94	80.30	97.70	112.56	123.70	133.61	142.05	148.87	154.86	197.80
k		1.0859	1.0913	1.0949	1.0839	1.0828	1.0729	1.0744	1.0730	1.0674	1.0675	—
$\alpha = \ln k$		0.08236	0.08738	0.09068	0.08059	0.07955	0.07039	0.07180	0.07051	0.06523	0.06530	—

N:o 3. 25. VI. 96. $\vartheta = 20°.0$ C. $W = 24.625$ Ohm. | 10 Acc. $W_n = 305\ \Omega$. $D = 134.5$ cm.

—	N. L.	(2)	(4)	(6)	(8)	(10)	(12)	(14)	(16)	(18)	(20)	N. L.
Beob. v	200.43	36.05	67.20	91.98	111.10	126.10	138.15	148.00	156.18	162.73	168.48	200.93
Corr. v	197.89	36.05	67.16	91.82	110.74	125.52	137.34	147.09	154.99	161.38	166.98	197.99
k		1.1058	1.1126	1.1101	1.1032	1.0973	1.0932	1.0917	1.0881	1.0839	1.0867	—
$\alpha = \ln k$		0.10053	0.10670	0.10447	0.09818	0.09286	0.08911	0.08771	0.08444	0.08054	0.08315	—

N:o 4. 25. VI. 96. $\vartheta = 20°.0$ C. $W = 42.006$ Ohm. | 10 Acc. $W_n = 304\ \Omega$. $D = 134.5$ cm.

—	N. L.	(2)	(4)	(6)	(8)	(10)	(12)	(14)	(16)	(18)	(20)	N. L.
Beob. v	200.04	45.15	80.18	107.00	127.05	142.13	153.40	161.93	169.88	175.28	179.95	200.03
Corr. v	197.51	45.13	80.10	106.70	126.46	141.25	152.32	160.60	168.35	173.58	178.11	197.50
k		1.1385	1.1392	1.1371	1.1305	1.1238	1.1155	1.1065	1.1251	1.1039	1.1106	—
$\alpha = \ln k$		0.12973	0.13035	0.12846	0.12271	0.11670	0.10956	0.10120	0.11785	0.09885	0.10493	—

N:o 5. 26. VI. 96. $\vartheta = 19°.3$ C. $W = 65.057$ Ohm. | 10 Acc. $W_n = 305\ \Omega$. $D = 134.5$ cm.

—	N. L.	(2)	(4)	(6)	(8)	(10)	(12)	(14)	(16)	(18)	(20)	N. L.
Beob. v	200.56	56.80	97.98	128.05	146.95	162.10	171.35	178.98	184.13	187.83	190.38	200.56
Corr. v	197.97	56.77	97.77	127.44	145.97	160.76	169.76	177.16	182.15	185.70	188.20	197.97
k		1.1841	1.1871	1.1919	1.1646	1.1821	1.1485	1.1643	1.1602	1.1355	1.1207	—
$\alpha = \ln k$		0.16899	0.17150	0.17557	0.15241	0.16733	0.13846	0.15213	0.14859	0.12708	0.11393	—

d) $C = 2.0229$ M. F. $L' = L_4'$.

N:o 1. 9. VI. 96. $\vartheta = 19°.0$ C. $W = 3.129$ Ohm.							10 Acc. $W_n = 147$ Ω. $D = 136.0$ cm.					
—	N. L.	(2)	(4)	(6)	(8)	(10)	(12)	(14)	(16)	(18)	(20)	N. L.
	199.8	26.1	49.1	68.9	87.0	101.0	113.0	122.7	131.0	138.2	144.8	199.85
	199.85	26.3	49.3	68.8	87.0	101.0	112.9	122.8	131.0	138.3	144.7	199.9
	199.8	26.2	49.2	69.0	87.1	101.0	113.0	122.8	131.0	138.3	144.7	199.9
	199.85	26.1	49.3	69.2	87.0	101.1	112.9	122.7	131.0	138.2	144.8	199.8
	199.9	26.1	49.2	68.8	87.1	101.2	112.8	122.6	131.0	138.2	144.8	199.9
	199.85	26.2	49.3	69.0	87.2	101.0	112.9	122.8	131.1	138.2	144.7	199.85
Beob. v	199.84	26.17	49.23	68.95	87.07	101.05	112.92	122.73	131.02	138.23	144.75	199.87
Corr. v	198.23	26.17	49.22	68.97	87.11	101.06	112.87	122.61	130.81	137.94	144.37	198.26
k	1.0734	1.0746	1.0737	1.0785	1.0694	1.0669	1.0625	1.0590	1.0575	1.0579	—	
$\alpha = \ln k$	0.07078	0.07193	0.07108	0.07559	0.06710	0.06470	0.06065	0.05729	0.05593	0.05632	—	

N:o 1. 26. VI. 96. $\vartheta = 20°.0$ C. $W = 3.142$ Ohm.						10 Acc. $W_n = 148$ Ω. $D = 134.5$ cm.					
—	N. L.	(20)	(22)	(24)	(26)	(28)	(30)	(32)	(34)	(36)	N. L.
	200.15	145.0	150.0	154.7	158.9	162.5	165.5	168.3	171.0	173.2	200.2
	200.2	145.0	150.1	154.7	158.8	162.4	165.6	168.4	171.0	173.3	200.2
	200.2	144.9	150.0	154.8	158.9	162.5	165.6	168.3	171.0	173.3	200.1
	200.15	145.0	150.1	154.7	158.8	162.4	165.5	168.4	171.0	173.2	200.2
	200.2	144.9	150.2	154.8	158.9	162.4	165.5	168.3	171.1	173.2	200.1
	200.2	145.0	150.0	154.8	158.9	162.5	165.5	168.4	171.0	173.2	200.15
Beob. v	200.18	144.97	150.07	154.75	158.87	162.45	165.53	168.35	171.02	173.23	200.16
Corr. v	198.50	144.58	149.59	154.20	158.26	161.76	164.77	167.55	170.16	172.31	198.48
k	—	1.0503	1.0509	1.0491	1.0465	1.0438	1.0439	1.0453	1.0401	—	
$\alpha = \ln k$	—	0.04907	0.04967	0.04796	0.04541	0.04285	0.04299	0.04426	0.03935	—	

N:o 1. 8 & 9. VI. 96. $\vartheta = 19°.0$ C. $W = 3.129$ Ohm.						10. Acc. $W_n = 145$ & 147 Ω. $D = 135$ cm.					
—	N. L.	(1)	(3)	(5)	(7)	(9)	(11)	(13)	(15)	(17)	(19)	N. L.
Red. v	100.0	193.1	180.3	169.2	159.7	151.7	145.1	139.8	135.2	131.8	128.8	100.0
k	—	1.0768	1.0772	1.0767	1.0746	1.0707	1.0645	1.0633	1.0521	1.0508	—	
$\alpha = \ln k$	—	0.07396	0.07440	0.07384	0.07193	0.06827	0.06252	0.06141	0.05080	0.04955	—	

N:o 2. 26. VI. 96. $\vartheta = 20°.0$ C. $W = 12.513$ Ohm.							10 Acc. $W_n = 148$ Ω. $D = 134.5$ cm.					
—	N. L.	(2)	(4)	(6)	(8)	(10)	(12)	(14)	(16)	(18)	(20)	N. L.
Beob. v	200.19	31.95	61.03	84.08	103.03	117.90	130.35	140.03	148.05	155.23	161.03	200.18
Corr. v	198.52	31.94	61.03	84.12	103.03	117.81	130.14	139.70	147.61	154.67	160.37	198.51
k		1.0917	1.1007	1.0963	1.0946	1.0877	1.0864	1.0782	1.0749	1.0775	1.0721	—
$\alpha = \ln k$		0.08771	0.09597	0.09192	0.09035	0.08409	0.08289	0.07530	0.07223	0.07465	0.06963	—

N:o 3. 24. VI. 96. $\vartheta = 22°.1$ C. $W = 24.643$ Ohm.							10 Acc. $W_n = 148$ Ω. $D = 134.5$ cm.					
—	N. L.	(2)	(4)	(6)	(8)	(10)	(12)	(14)	(16)	(18)	(20)	N. L.
Beob. v	201.04	40.27	75.02	101.33	120.95	136.43	148.02	157.72	165.03	170.97	175.92	201.04
Corr. v	199.33	40.27	75.04	101.33	120.84	136.15	147.58	157.11	164.30	170.11	175.00	199.35
k		1.1195	1.1312	1.1226	1.1304	1.1146	1.1050	1.1071	1.0978	1.0949	1.0959	—
$\alpha = \ln k$		0.11285	0.12333	0 11884	0.12252	0.10850	0.09979	0.10177	0.09335	0.09068	0.09157	—

N:o 4. 23. VI. 96. $\vartheta = 20°.0$ C. $W = 42.023$ Ohm.							10 Acc. $W_n = 148$ Ω. $D = 134.5$ cm.					
—	N. L.	(2)	(4)	(6)	(8)	(10)	(12)	(14)	(16)	(18)	(20)	N. L.
Beob. v	200.31	51.97	91.73	120.02	140.03	154.88	165.33	173.25	179.12	184.00	187.27	200.38
Corr. v	198.63	51.96	91.75	119.91	139.71	154.33	164.60	172.33	178.13	182.84	186.00	198.70
k		1.1637	1.1714	1.1651	1.1558	1.1531	1.1408	1.1373	1.1324	1.1391	1.1178	—
$\alpha = \ln k$		0.15160	0.15819	0.15285	0.14479	0.14248	0.13175	0.12867	0.12436	0.13024	0.11133	—

N:o 5. 21. VI. 96. $\vartheta = 19°.8$ C. $W = 65.069$ Ohm.							10 Acc. $W_n = 147$ Ω. $D = 134.6$ cm.					
—	N. L.	(2)	(4)	(6)	(8)	(10)	(12)	(14)	(16)	(18)	(20)	N. L.
Beob. v	199.11	66.00	111.03	139.92	158.27	170.98	179.13	185.02	189.00	191.97	193.88	199.13
Corr. v	197.47	66.01	111.00	139.60	157.66	170.12	178.08	183.81	187.68	190.56	192.40	197.49
k		1.2256	1.2330	1.2224	1.2056	1.2064	1.1876	1.1913	1.1811	1.1900	1.1672	—
$\alpha = \ln k$		0.20343	0.20944	0.20079	0.18702	0.18764	0.17191	0.17504	0.16641	0.17398	0.15457	—

II. Serien für verschiedene Combinationen L', bei unverändert gelassener Capacität.

a) $C = 2.0229$ M. F. $L' = L_1'$.

N:o 1. 1. VII. 96. $\vartheta = 19°.7$ C. $W = 1.160$ Ohm.							10 Acc. $W_n = 147$ Ω. $D = 134.5$ cm.					
—	N. L.	(2)	(4)	(6)	(8)	(10)	(12)	(14)	(16)	(18)	(20)	N. L.
Beob. v	200.03	37.23	70.03	93.92	113.05	128.33	140.43	150.02	157.98	164.07	169.48	200.00
Corr. v	198.36	37.22	70.05	93.95	113.00	128.15	140.10	149.56	157.38	163.35	168.65	198.33
k	1.1095	1.1232	1.1214	1.1060	1.1026	1.0978	1.0927	1.0913	1.0819	1.0856	—	
$\alpha = \ln k$	0.10392	0.11624	0.11460	0.10074	0.09770	0.09330	0.08863	0.08734	0.07875	0.08211	—	

b) $C = 2.0229$ M. F. $L' = L_2'$.

N:o 1. 30. VI. 96. $\vartheta = 19°.0$ C. $W = 1.710$ Ohm.							10 Acc. $W_n = 147$ Ω. $D = 134.5$ cm.					
—	N. L.	(2)	(4)	(6)	(8)	(10)	(12)	(14)	(16)	(18)	(20)	N. L.
Beob. v	200.20	31.17	61.30	85.05	103.33	118.87	130.35	139.97	148.03	154.78	160.28	200.21
Corr. v	198.53	31.16	61.30	85.08	103.33	118.78	130.15	139.65	147.60	154.23	159.64	198.54
k	1.0891	1.1044	1.0998	1.0916	1.0926	1.0800	1.0777	1.0752	1.0722	1.0673	—	
$\alpha = \ln k$	0.08536	0.09929	0.09514	0.08768	0.08853	0.07691	0.07479	0.07251	0.06972	0.06512	—	

N:o 2. 2. VII. 96. $\vartheta = 18°.9$ C. $W = 11.077$ Ohm.							10 Acc. $W_n = 147$ Ω. $D = 134.5$ cm.					
—	N. L.	(2)	(4)	(6)	(8)	(10)	(12)	(14)	(16)	(18)	(20)	N. L.
Beob. v	200.00	42.05	78.03	104.85	124.10	138.98	150.65	159.48	166.30	172.18	176.78	199.99
Corr. v	198.33	42.05	78.06	104.85	123.96	138.67	150.18	158.85	165.53	171.29	175.78	198.32
k	1.1266	1.1399	1.1343	1.1211	1.1165	1.1131	1.1044	1.0971	1.1014	1.0951	—	
$\alpha = \ln k$	0.11916	0.13095	0.12600	0.11435	0.11020	0.10716	0.09927	0.09270	0.09655	0.09079	—	

N:o 3. 2. VII. 96. $\vartheta = 18°.9$ C. $W = 23.203$ Ohm.							10 Acc. $W_n = 147$ Ω. $D = 134.5$ cm.					
—	N. L.	(2)	(4)	(6)	(8)	(10)	(12)	(14)	(16)	(18)	(20)	N. L.
Beob. v	199.98	55.03	98.13	125.18	145.03	158.85	168.43	175.98	181.15	185.15	188.13	199.96
Corr. v	198.31	55.03	98.15	125.03	144.64	158.24	167.62	175.00	180.05	183.94	186.83	198.29
k	1.1765	1.1961	1.1691	1.1685	1.1574	1.1427	1.1475	1.1299	1.1274	1.1189	—	
$\alpha = \ln k$	0.16252	0.17905	0.15625	8.15575	0.14615	0.13339	0.13758	0.12215	0.11987	0.11237	—	

N:o 4. 2. VII. 96. $\vartheta = 18°.9$ C. $W = 40.580$ Ohm.							10 Acc. $W_n = 147$ Ω. $D = 134.5$ cm.					
—	N. L.	(2)	(4)	(6)	(8)	(10)	(12)	(14)	(16)	(18)	(20)	N. L.
Beob. v	199.97	71.08	118.88	147.03	164.73	176.23	183.30	188.35	192.00	194.10	195.73	199.98
Corr. v	198.30	71.10	118.79	146.61	163.99	175.25	182.14	187.04	190.59	192.62	194.20	198.31
k		1.2486	1.2648	1.2401	1.2274	1.2200	1.1942	1.1978	1.2082	1.1648	1.1766	—
$\alpha = \ln k$		0.22199	0.23491	0.21518	0.20486	0.19883	0.17748	0.18052	0.18916	0.15257	0.16266	—

N:o 5. 2. VII. 96. $\vartheta = 18°.9$ C. $W = 63.627$ Ohm.							10 Acc. $W_n = 147$ Ω. $D = 134.5$ cm.					
—	N. L.	(2)	(4)	(6)	(8)	(10)	(12)	(14)	(16)	(18)	(20)	N. L.
Beob. v	200.00	91.05	140.90	167.00	180.25	188.93	193.23	195.48	197.00	—	—	200.00
Corr. v	198.33	91.08	140.57	166.22	179.18	187.61	191.78	193.95	195.43			198.33
k		1.3599	1.3627	1.3412	1.2949	1.3365	1.2793	1.2187	1.2290	—	—	—
$\alpha = \ln k$		0.30740	0.30945	0.29358	0.25844	0.29010	0.24633	0.19777	0.20617	—	—	—

c) Identisch mit der Serie I d.

III. Abhängigkeit der Dämpfung von der Grösse der normalen Ladung.

N:o 1. 17. VI. 96. $\vartheta = 19°.4$ C. $W = 3.134$ Ohm.							1 Acc. $W_n = 2150$ Ω. $D = 134.65$ cm.					
—	N. L.	(2)	(4)	(6)	(8)	(10)	(12)	(14)	(16)	(18)	(20)	N. L.
Beob. v	200.14	14.80	28.05	40.27	51.45	62.05	72.00	80.98	88.73	95.78	102.72	200.15
Corr. v	199.41	14.80	28.05	40.26	51.43	62.02	71.97	80.96	88.72	95.75	102.69	199.42
k		1.0393	1.0380	1.0376	1.0371	1.0378	1.0383	1.0373	1.0345	1.0333	1.0353	—
$\alpha = \ln k$		0.03855	0.03728	0.03693	0.03638	0.03712	0.03760	0.03659	0.03387	0.03277	0.03465	—

N:o 2. 16. VI. 96. $\vartheta = 20°.9$ C. $W = 3.154$ Ohm.							2 Acc. $W_n = 847$ Ω. $D = 134.65$ cm.					
—	N. L.	(2)	(4)	(6)	(8)	(10)	(12)	(14)	(16)	(18)	(20)	N. L.
Beob. v	199.99	16.98	32.17	46.10	58.87	69.82	80.00	88.93	97.17	105.02	111.95	199.98
Corr. v	198.59	16.98	32.16	46.08	58.84	69.78	79.93	88.85	97.06	104.89	111.79	198.58
k		1.0457	1.0446	1.0447	1.0447	1.0416	1.0419	1.0399	1.0396	1.0410	1.0389	—
$\alpha = \ln k$		0.04469	0.04361	0.04368	0.04373	0.04078	0.04103	0.03908	0.03884	0.04020	0.03820	—

N:o 3. 16. VI. 96. $\vartheta = 20°.9$ C. $W = 3.154$ Ohm.							4 Acc. $W_n = 384$ Ω. $D = 134.65$ cm.					
—	N. L.	(2)	(4)	(6)	(8)	(10)	(12)	(14)	(16)	(18)	(20)	N. L.
Beob. v	200.00	20.08	38.87	55.87	69.88	82.25	93.00	102.85	110.93	118.38	125.10	200.00
Corr. v	197.39	20.08	38.86	55.84	69.82	82.11	92.76	102.50	110.49	117.89	124.44	197.39
k		1.0551	1.0576	1.0583	1.0534	1.0520	1.0496	1.0502	1.0450	1.0454	1.0440	—
$\alpha = \ln k$		0.05363	0.05602	0.05664	0.05199	0.05068	0.04842	0.04893	0.04400	0.04439	0.04301	—

N:o 4. 16. VI. 96. $\vartheta = 20°.9$ C. $W = 3.154$ Ohm.							6 Acc. $W_n = 250$ Ω. $D = 134.65$ cm.					
—	N. L.	(2)	(4)	(6)	(8)	(10)	(12)	(14)	(16)	(18)	(20)	N. L.
Beob. v	199.92	22.27	43.78	61.93	77.85	90.33	101.93	111.40	119.97	127.03	133.62	199.95
Corr. v	197.57	22.27	43.76	61.90	77.81	90.24	101.74	111.12	119.58	126.54	133.01	197.60
k		1.0616	1.0676	1.0648	1.0644	1.0563	1.0583	1.0529	1.0528	1.0478	1.0490	—
$\alpha = \ln k$		0.05980	0.06542	0.06275	0.06235	0.05478	0.05667	0.05153	0.05146	0.04670	0.04783	—

N:o 5. 16. VI. 96. $\vartheta = 19°.8$ C. $W = 3.139$ Ohm.							8 Acc. $W_n = 185$ Ω. $D = 134.65$ cm.					
—	N. L.	(2)	(4)	(6)	(8)	(10)	(12)	(14)	(16)	(18)	(20)	N. L.
Beob. v	199.53	23.12	46.15	66.03	83.10	95.98	107.28	117.20	125.95	133.03	139.20	199.35
Corr. v	197.57	23.12	46.14	66.02	83.10	95.95	107.19	117.03	125.67	132.66	138.73	197.40
k		1.0642	1.0734	1.0729	1.0721	1.0614	1.0605	1.0595	1.0586	1.0527	1.0505	—
$\alpha = \ln k$		0.06222	0.07080	0.07037	0.06958	0.05961	0.05874	0.05780	0.05690	0.05139	0.04930	—

N:o 6. 2. VI. 96. $\vartheta = 19°.0$ C. $W = 3.129$ Ohm.							10 Acc. $W_n = 147$ Ω. $D = 136.0$ cm.					
—	N. L.	(2)	(4)	(6)	(8)	(10)	(12)	(14)	(16)	(18)	(20)	N. L.
Beob. v	199.84	26.17	49.23	68.95	87.07	101.05	112.92	122.73	131.02	138.23	144.75	199.87
Corr. v	198.23	26.17	49.22	68.97	87.11	101.06	112.87	122.61	130.81	137.94	144.37	198.26
k		1.0734	1.0746	1.0737	1.0785	1.0694	1.0669	1.0625	1.0590	1.0575	1.0579	—
$\alpha = \ln k$		0.07078	0.07193	0.07108	0.07559	0.06710	0.06470	0.06065	0.05729	0.05593	0.05632	—

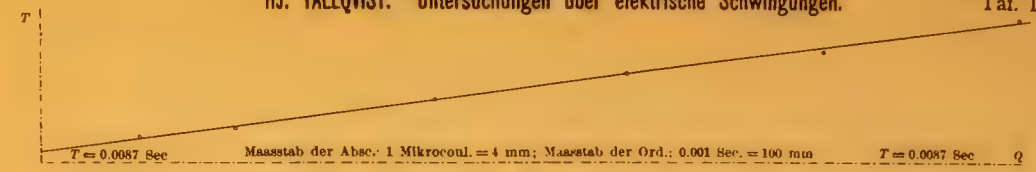


Fig. 1.

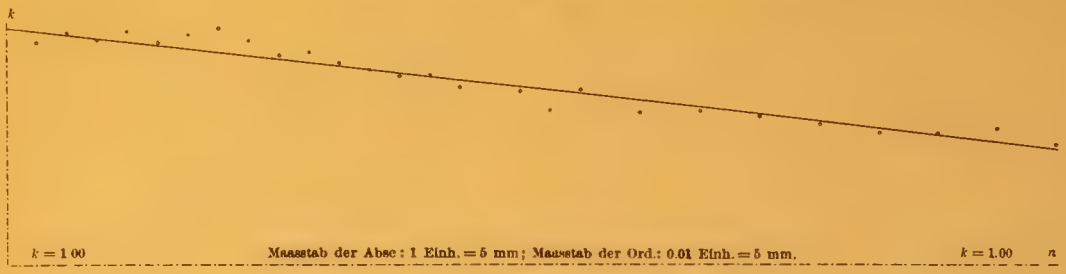


Fig. 2.

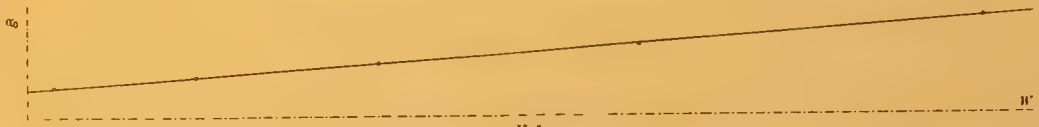
I b.

I c.

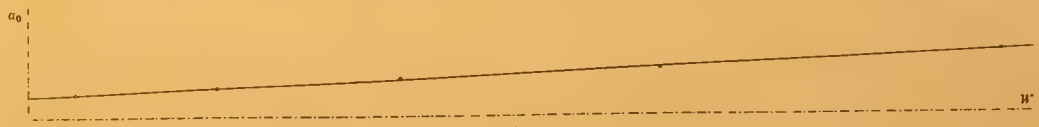
I d.

Fig. 3.

Maasstab der Absc.: 1 Ohm = 2.5 mm; Maasstab der Ord. 0.1 = 5 mm.



II b.



II c.

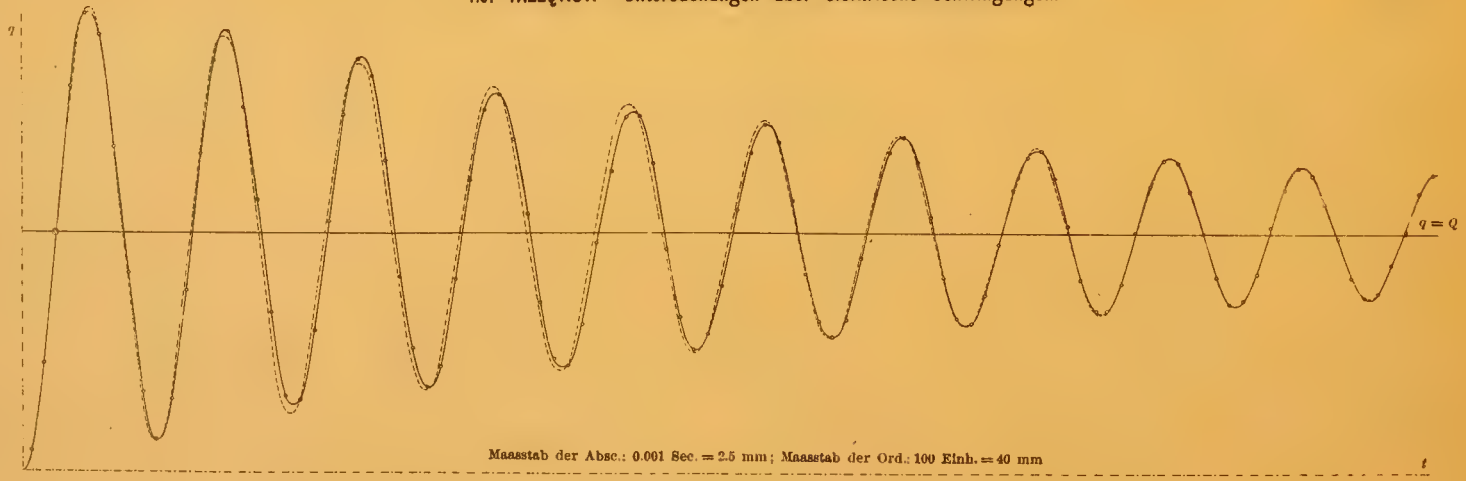

q
q = Q
t
Maasstab der Absc.: 0.001 Sec. = 2.5 mm; Maasstab der Ord.: 100 Einh. = 40 mm

Fig. 1.

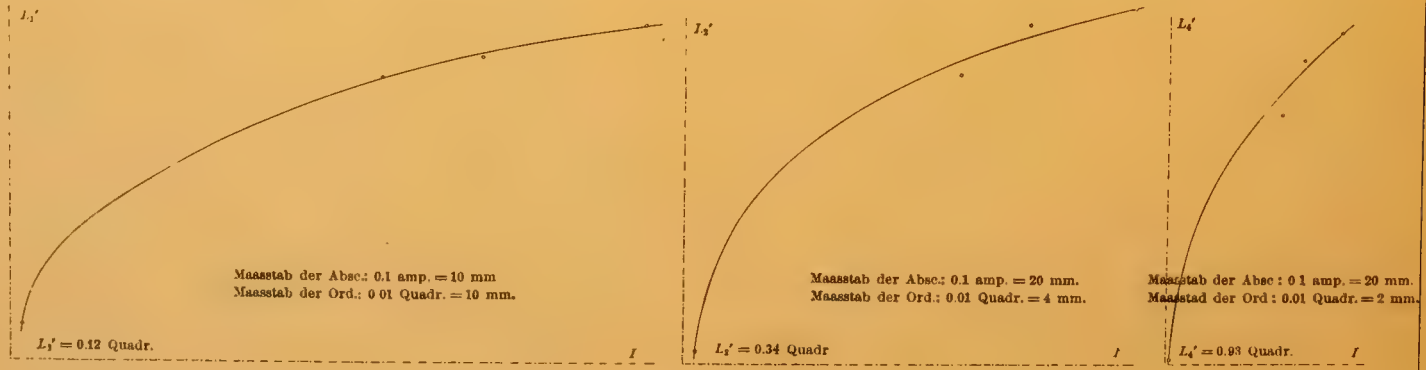
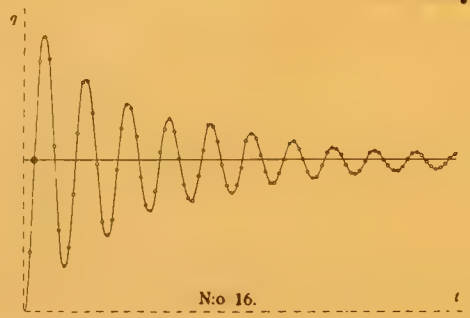
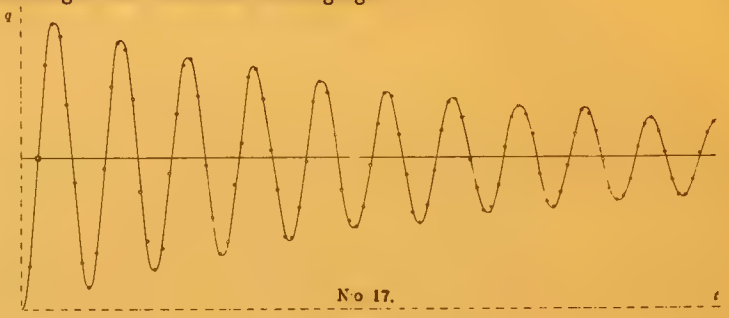

L_1'
Maasstab der Absc.: 0.1 amp. = 10 mm
Maasstab der Ord.: 0.01 Quadr. = 10 mm.
$L_1' = 0.12$ Quadr.
I
L_2'
Maasstab der Absc.: 0.1 amp. = 20 mm.
Maasstab der Ord.: 0.01 Quadr. = 4 mm.
$L_2' = 0.34$ Quadr
I
L_4'
Maasstab der Absc: 0.1 amp. = 20 mm.
Maasstad der Ord: 0.01 Quadr. = 2 mm.
$L_4' = 0.93$ Quadr.
I

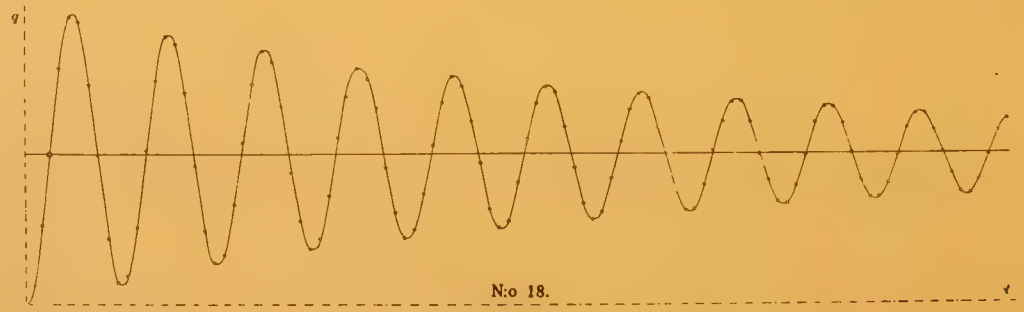
Fig. 2.



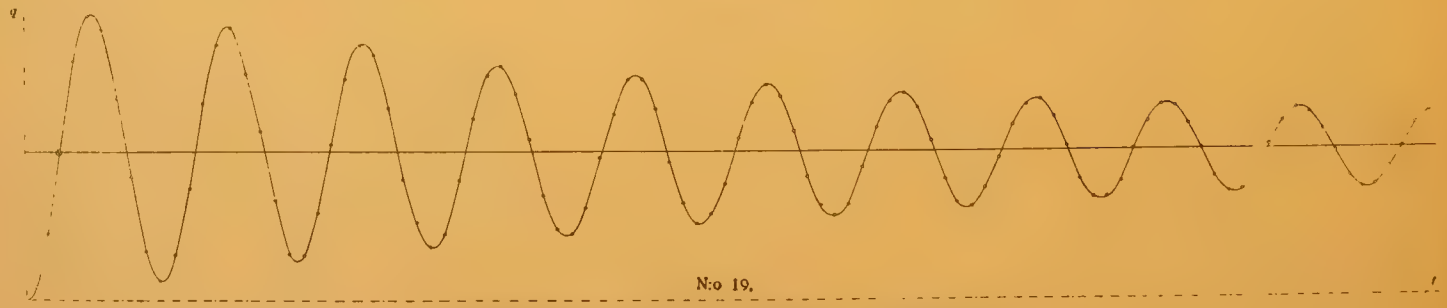
N:o 16.



N:o 17.

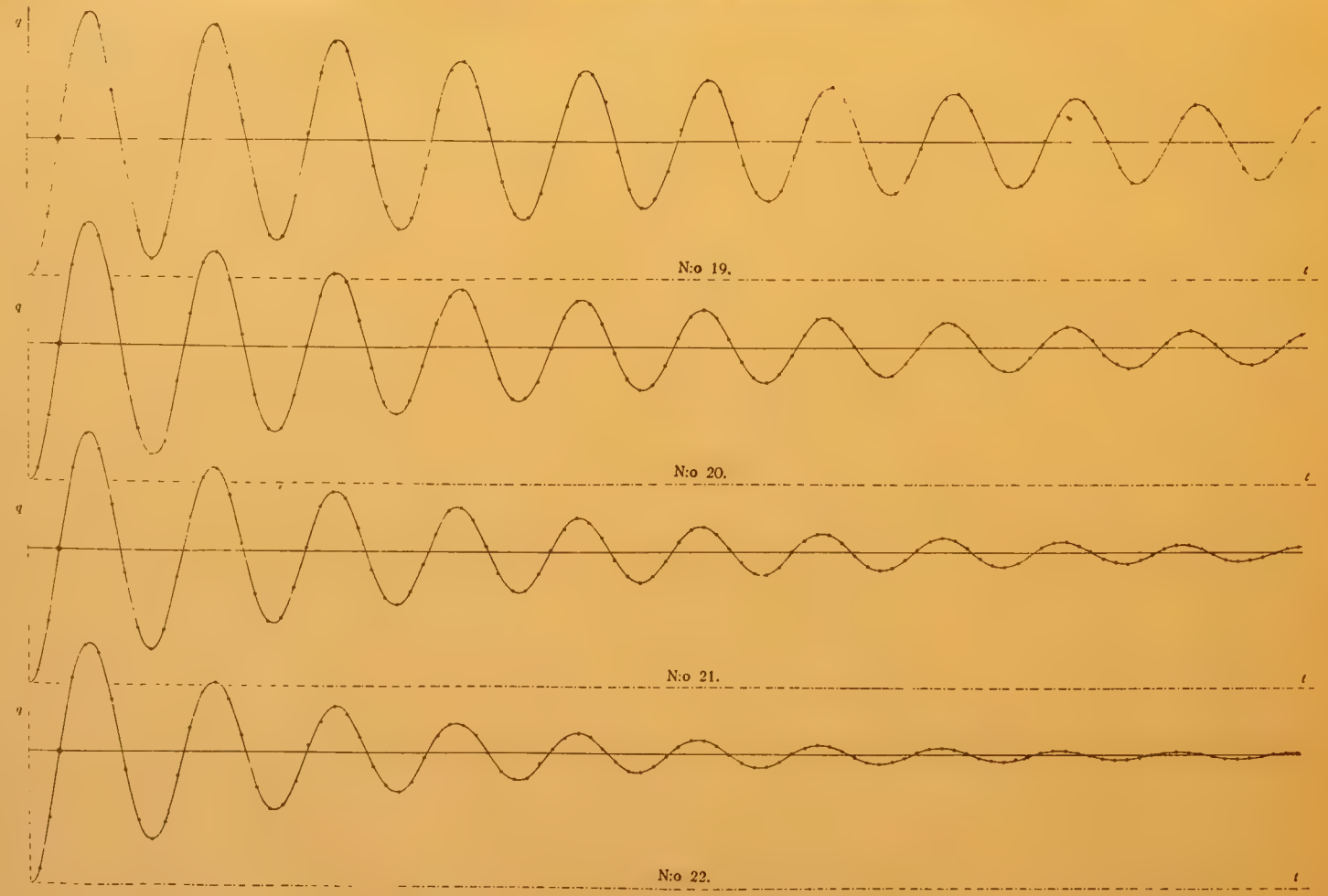


N:o 18.

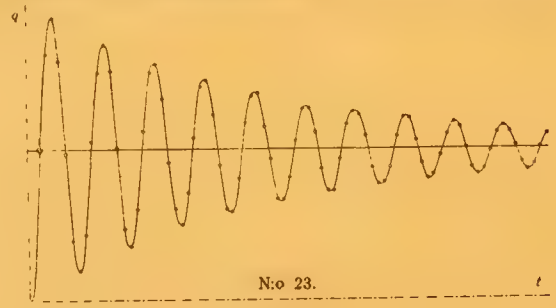


N:o 19.

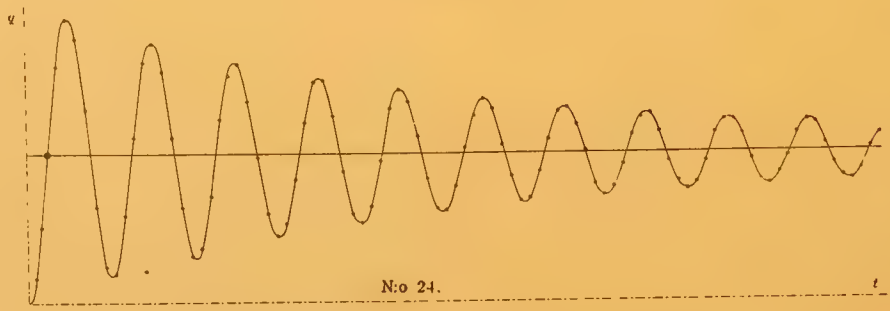
Maasstab der Abse: 0 001 Sec. = 2.5 mm; Maasstab der Ord.: 100 Einh. = 25 mm.



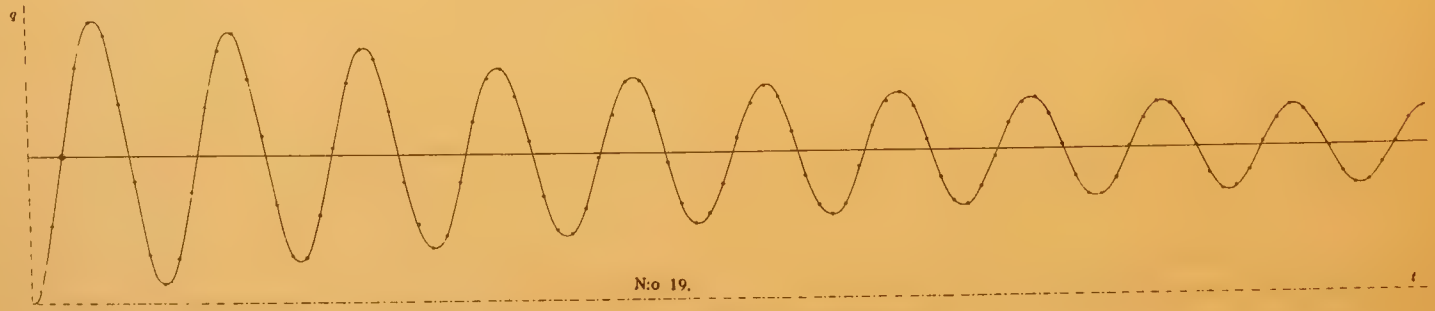
Maasstab der Absc.: 0.001 Sec. = 2.5 mm; Maasstab der Ord.: 100 Einh. = 25 mm.



N:o 23.



N:o 24.



N:o 19.

Maasstab der Absc: 0.001 Sec. = 2.5 mm; Maasstab der Ord.: 100 Einh. = 25 mm.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ.

TOM. XXIV. № 4.

STUDIEN ÜBER DAS CENTRALE NERVENSYSTEM.

I.

ÜBER DAS RÜCKENMARK EINIGER TELEOSTIER.

VON

DR RUD. KOLSTER.

DOCENT FÜR PATH. ANATOMIE.

(AUS DEM PATHOLOGISCHEN INSTITUT ZU HELSINGFORS.)

(VORGETRAGEN AM 18. JAN. 1898.)

Vorrede.

Im Plane der vorliegenden Arbeit, dessen erster Theil hiermit der Oeffentlichkeit übergeben wird, lag es ursprünglich sich nur auf ein Isoliren der Strangsysteme im Rückenmark niederer Wirbelthiere zu beschränken. Dieses sollte auf experimentellem Wege durch Verfolgung entstehender secundärer Veränderunden nach künstlichen Läsionen und durch Beachtung der Markscheidenentwickelung an Embryonen geschehen, zwei Methoden die für das gewählte Thema bisher nicht verwendet worden sind.

Bei der vorbereitenden Untersuchung über die Histologie des Rückenmarkes ergaben sich einzelne von dem bisher Bekannten abweichende Resultate. Dieselbe sind in diesem ersten Theil aufgenommen.

Für das embryologische Material bin ich Herrn D:r O. Nordqvist, Chef des Fischereiwesens und Herr cand. phil. A. Wickström, Assistent am hiesigen Zoologischen Institut zu Dank verpflichtet.

Helsingfors im Januar 1898.

Der Verfasser.

Inhalts-Angabe.

Seite.

Einleitung . . . . . 1.

Untersuchungsmethoden . . . . . 4.

Stützsubstanz des Rückenmarkes 10

Gangliezellen im embryonalen Rückenmarke . . . . . 32.

Die Nervenzellen des ausgewachsenen Rückenmarkes . . . . . 40.

Die MAUTHNER'schen Fasern . . . . . 52.

Strangsysteme des Rückenmarkes . . . . . 78.

Tafelerklärungen . . . . . 86.

Einleitung.

Das Rückenmark der Teleostier hat bisher nur wenig Berücksichtigung gefunden. Die ausführlichsten Bearbeitungen stammen von Stieda und sind zu einer Zeit vorgenommen, in welcher die histologische Technik ihre ersten, schwankenden Gehversuche machte.

Um so mehr muss man sich wundern, dass es diesem Forscher gelungen ist, manche Details zu entdecken, deren principielle Bedeutung lange Zeit unterschätzt wurde und in Vergessenheit gerieth, um später mit neuen besseren Methoden wieder von Neuem aufgefunden zu werden.

Als Beispiel hiervon sei seine Entdeckung des Verhaltens der Ependymfasern angeführt, deren Verlauf bis an die Circumferenz des Rückenmarkes von ihm beobachtet und beschrieben worden ist.

Spätere Forscher haben das Rückenmark nur insofern beachtet, als es zu einer Abrundung ihrer Beobachtungen am Gehirn und der Medulla oblongata nöthig gewesen ist. So hat es Mayser bei seinen verdienstvollen Untersuchungen über das Gehirn der Knochenfische, mit besonderer Berücksichtigung der Cyprinoiden, gemacht.

Genauer sind die electrischen Fische untersucht worden, deren electrische Organe schon frühzeitig die Aufmerksamkeit der Physiologen fesselte.

Schon vor Stieda waren aber einige wichtige Details bekannt geworden. So hatte Mauthner die nach ihm genannten grossen paarigen Nervenfasern beschrieben und das Auftreten einer doppelten ventralen Commissur constatirt, welcher seiner Zeit auch sein Name gegeben wurde, obwohl dieselbe später unter der Bezeichnung accessorische Commissur mehr bekannt geworden ist.

Die ersten Untersuchungen mit den neuesten Imprägnationsmethoden sind am Rückenmarke der Teleostier von Retzius vorgenommen worden.

Retzius erste Untersuchungen führten nur zu einer Darstellung des Ependymgerüstes in der Medulla oblongata von *Esox*. Später benutzte dieser Forscher auch embryologisches Material und lieferte eine Darstellung des Ependymgerüstes bei Larven von *Salmo salar*.

Später ist noch in derselben Weise von Aichel das embryonale Rückenmark von *Coregonus, Salmo* und *Trutta* untersucht worden.

v. Gehuchten hat ebenfalls mit der Golgi'schen Imprägnationsmethode das Rückenmark von *Trutta fario* untersucht.

Füge ich noch hinzu, dass auch Béla Haller sich bemüht hat, seine eigenartigen Ansichten über das Nervensystem durch Untersuchungen an *Esox*, *Salmo, Anguilla* und *Perca* mit der Imprägnationsmethode und durch Anwendung von Tinctionen am Rückenmarke von *Orthagoriscus* zu stützen, so ist wohl das wichtigste der mit neuen Methoden am Teleostier-Rückenmarke geleistete erwähnt.

Eigenartige Dorsalzellen fand Fritsch bei *Lophius*, Dahlgren bei *Anacanthinen*, Haller bei *Orthagoriscus* und *Tetrodon, Ussow* bei *Trigla*.

Einiger wenigen Untersuchungen mit der Weigert'schen Markscheidenfärbung erwähnt Edinger in seinen bekannten Vorlesungen über den Bau der nervösen Centralorgane, und dass bisher erreichte ist von Kölliker in seinem Handbuche gesammelt worden.

Aus der hier gegebenen kurzen Uebersicht, die keineswegs auf Vollständigkeit Anspruch macht, geht aber hervor, dass von den wichtigsten Methoden, deren sich die moderne Neurologie bei Untersuchungen des Nervensystems bedient, nur die Golgi-Methode bisher eine Verwendung gefunden hat. So viel mir bekannt ist aber eigentlich nur an embryologischem Material.

Schon die seit längerer Zeit im täglichen Gebrauch stehende Weigert'sche Markscheidenfärbung ist kaum zur Verwendung gekommen.

Vollkommen fehlen aber bisher alle Versuche mit der von Flechsig angegebenen Methode, die sich auf die systemartige Entwickelung der Markscheiden stützt.

Ebenso ist das Teleostier-Rückenmark bisher noch nicht nach experimentell gesetzten Läsionen auf die Art und Weise der danach auftretenden secundären Degeneration untersucht worden.

Unter diesen Umständen schien es mir Erfolge zu versprechen diese neuen Methoden bei einer Bearbeitung des Rückenmarkes der Knochenfische in Anwendung zu ziehen.

Eine genauere Kenntniss des Rückenmarkes und des Gehirns niederer Thiere ist aus dem Grunde noch von Interesse, weil diese Thiere unter anderen

Verhältnissen leben wie viele höher stehende und daher einzelne Theile ihres centralen Nervensystems bedeutend mehr entwickelt besitzen müssen. als dieses bei höheren Vertebraten der Fall ist.

Ich verweise in dieser Beziehung z. B. auf den statischen nervösen Apparat, der bei Fischen ganz anderen Ansprüchen Genüge leisten muss als z. B. dieses bei den auf dem Lande lebenden Vierfüsslern der Fall ist.

Die Möglichkeit aus solchen vergleichend anatomischen Untersuchungen Fingerzeige zu erhalten, deren weitere Verfolgung beim Studium höherer Vertebraten von Werth sein könnte, liegt ja auf der Hand.

I.

Untersuchungsmethoden.

Das embryologische Material für vorliegende Arbeit ist in folgender Weise behandelt worden.

So lange die Embryonen noch nicht dicker als 1—2 mm waren, wurden dieselben lebend und heil in Golgi's bekannte, von Ramon y Cajal modificirte Flüssigkeit

1 % Osmiumsäure = 1 Th.
3.5 % Kali-bichr. = 4 Th.

gebracht. Nachdem dieselben eine Zeit von wenigen Stunden bis zu 8 Tagen in dieser Lösung verweilt hatten wurden die so vorbehandelten Embryonen in eine 0.75 % Lösung von salpetersaurem Silber übertragen. In der Silberlösung verblieben dieselben 1—2 Tage, worauf die ganze Behandlung wiederholt wurde.

Diese doppelte Imprägnation ergab bedeutend bessere und reinere Präparate als die einfache Behandlung. Zur Vornahme einer dreifachen Imprägnation wie sie für sehr schwierige Objecte von Ramon y Cajal vorgeschlagen worden ist, habe ich niemals Veranlassung gehabt.

Hatten die Embryonen die oben angegebene Grösse überschritten, so wurde die ventrale Hälfte durch einen Scheerenschlag abgetrennt und der dorsale Theil wie oben angegeben behandelt. Durch dieses Verfahren blieb stets eine, wenn auch nur geringe, Hülle aus Muskel- und Knorpelgewebe um das centrale Nervensystem herum bestehen und konnte dadurch als Schutz gegen unvermeidlichen Niederschläge dienen. Bei den Grössen, welche die von mir nach dieser Methode untersuchten Larven besassen, erschwerte die umgebende Schicht nicht die Imprägnation.

Bei erwachsenen Thieren nahm ich das Rückenmark aus dem Centralkanal heraus, und umgab dasselbe mit einer dünnen Blutschicht, um die auf der Oberfläche entstehenden Niederschläge abzuhalten. Sonst war die Behandlung dieselbe wie bei den Embryonen.

Da dieses Material keine längere Einwirkung von absolutem Alkohol verträgt, bettete ich dasselbe folgenderweise in Celloidin ein. Die imprägnirten Stücke wurden auf Fliesspapier in kleine Glasschalen gelegt und mit abs. Alkohol übergossen; nach 10 Minuten wurde derselbe durch neuen ersetzt und nach weiteren 10 Minuten noch einmal. Diese dritte Portion Alkohol durfte ebenfalls nur 10 Minuten einwirken, um darauf mit Alkohol-Aether ersetzt zu werden, in welchem Gemisch die Stücke ebenfalls nur 10 Minuten verblieben. Darauf kamen die Stücke in eine mitteldünne Celloidinlösung auf eine halbe Stunde, wurden dann auf Kork geklebt und in 60 % Alkohol so lange gelassen, dass die umgebende Celloidinschicht erstarrte. Bei dieser Einbettung wurden meistens die innersten Theile nicht ganz durchtränkt; die Konsistenz des Materials und speciell die durchtränkten äusseren Lagen genügten aber vollständig, um Schnitte in der nöthigen Dünne herzustellen, ohne dass dieselben zerfielen.

Bedeutend bessere und reinere, d. h. von Niederschlägen freie Präparate erhielt ich aber bei Anwendung der von *Cox* angegebenen Methode.

Hierbei wurden die Embryonen, sogar noch 70 mm lange *Esox*embryonen heil in eine Flüssigkeit gebracht von folgender Zusammensetzung:

5 %	Kali-bichr.	20 Th.
5 %	Sublimat	20 Th.
5 %	Kalichrom-flav. . . .	16 Th.
	Aqua	30 Th.

In dieser Lösung verweilten die Embryonen 2—4 Monate, wurden dann in fliessendem Wasser 24 Stunden ausgewaschen und darauf in gewöhnlicher Weise in Celloidin eingebettet und geschnitten.

Ein bedeutender Vorzug, speciell für die Anfertigung von Serienschnitten liegt in der möglichen, regelrechten Celloidineinbettung. Einen zweiten Vortheil gewährt aber die *Cox*'sche Methode noch dadurch, dass dieselbe eine Nachfärbung einzelner Schnitte und eine Durchfärbung ganzer unzerlegter Embryonen gestattet. Leider blieben aber Versuche, dieselbe auch am centralen Nervensystem ausgewachsener Thiere anzuwenden ohne Resultat. Nach dieser *Cox*'schen Methode angefertigte Schnitte vertragen Deckgläser.

Es wird dieser Methode nachgesagt, dass durch dieselbe stets *alle* vorhandenen Elemente gefärbt würden und, dass sie dadurch nicht so geeignet

wäre wie die Golgi-Methode, die Beschaffenheit der einzelnen Bestandtheile zu erforschen sondern mehr für topographische Untersuchungen zu empfehlen wäre. Dieses vermag ich nicht zu bestätigen. Bei meinem Material hat die *Cox*'sche Sublimatimprägnation sich stets nur einzelne Theile ausgesucht, diese dann aber bis in feine Details dargestellt.

Noch eine dritte Imprägnation ist in gewissen Fällen beim ausgewachsenen Rückenmark benutzt worden. Dieses ist der zuerst von Hoyer jun. vorgeschlagene Ersatz der Osmiumsäure durch Formol bei der Silberimprägnation. Hierbei wurde die von Kopsch [1]) gegebene Anweisung befolgt.

Die Rückenmarkstücke wurden zuerst in eine frisch bereitete Lösung von

3.5 % Kal. bichrom. . . . . 40 Th.
käufliche Formaldehydlösung . 10 Th.

gelegt und nach 24 Stunden in einfach 3.5 % Kal. bichrom.-Lösung übertragen.

Nachdem die Stücke in letzterer 1—6 Tage gelegen hatten, wurden dieselben in die Silberlösung gebracht und darauf wie bei der Golgi-Methode weiter behandelt.

Die so erhaltenen Schnitte zeichnen sich durch ihre helle Farbe und Durchsichtigkeit aus, da ja keine Schwärzung der Markscheiden stattfindet, auch sind dieselben so gut wie ganz frei von Niederschlägen. Dagegen muss aber hervorgehoben werden, dass die erreichte Imprägnation sehr unvollständig und gering ist. Für einzelne Zwecke kann dieselbe aber mit grossem Nutzen verwendet werden, besonders in Fällen, wo die Schwärzung der Markscheiden aus Deutlichkeitsgründen möglichst zu vermeiden ist.

Ein weiterer Theil meines embryologischen Materials wurde in Flemmings Chrom-Osmium-Essigsäure und in Müller'sche Flüssigkeit oder 5 % Kal. bichrom.-Lösung gebracht. Erstere diente als Vorbereitung für das Aufsuchen von Zelltheilungen, die beiden letzteren als Vorbereitung für eine spätere Markscheidenfärbung nach Weigert.

Da ein Verfolgen, der sich mit Mark umgebenden Bahnen, die Anwendung von Serien nöthig machte, die Schnitte aber zu klein waren, um die von Weigert zu diesem Zweck angegebene Celloidinplattenmethode praktisch zu verwerthen, so veränderte ich das auch sonst angewendete Verfahren die Schnitte mit Alkohol-Aether direkte auf den Objectträger zu befestigen, in folgender Weise.

---

[1]) Kopsch. Erfahrungen über die Verwendung des Formaldehyds bei der Chromsilber-Imprägnation. Anat. Anz. Bd 11, 1896.

Auf die schwarze Glasunterlage wurde die Grösse des zur Verwendung kommenden Deckglases mit gelbem Fettstift gezeichnet, der Objectträger draufgelegt und die Schnitte Stück für Stück mit einem Pinsel vom Messer auf denselben übertragen und in so lange Reihen geordnet wie die Grösse des Deckglases erlaubte. So wie eine solche Reihe fertig war, wurde dieselbe mit abs. Alkohol entwässert und mit Alkohol-Aether reichlich benetzt. Das Celloidin löste sich hierbei theilweise auf und klebte die Schnitte an den Objectträger an.

Dadurch, dass die folgende Reihe so dicht an die vorhergehende gelegt wurde, dass diese bei Behandlung jener mit Alkohol-Aether stets theilweise wieder mitgelöst wurde, vertheilte sich das Celloidin als gleichmässig feine Haut über den Objectträger. Zu dieser Reihenweisen Aufklebung der Schnitte wurde ich dadurch bewogen, dass mehrmals bei gemeinsamer Aufklebung aller fertigen Reihen auf einmal ein Fortschwimmen einzelner Schnitte und Anhaften an andere eintrat, und so eine Störung der Serie entstand.

Da die Entfärbung so vieler Schnitte auf einmal, bei der Weigert'schen Markscheidenfärbung oft einen feinen röthlichen Niederschlag ergab, der sich nicht mehr vom Celloidin fortschwemmen liess, habe ich die Entfärbung so ausgeführt, dass der Objectträger stets mit der Schnittseite nach unten auf kleine Unterlagen in die stark verdünnte Entfärbungsflüssigkeit gelegt wurde. Der hier entstehende Niederschlag fiel dabei stets auf den Boden der Schale und die Schnitte blieben rein.

Das Rückenmark der ausgewachsenen Thiere wurde stets innerhalb des von Weichtheilen befreiten Rückgrades in die Fixirungsflüssigkeiten gebracht und erst später aus dem Rückgradkanal herausgenommen.

Als Fixirungs- und Härtungsflüssigkeiten habe ich 4 % Formollösung, Müller'sche Flüssigkeit, gesättigte Sublimatlösung und absoluten Alkohol verwendet.

Die von Nissl für die Färbung der chromatophilen Körper in den Ganglienzellen angegebene Methylenblaufärbung habe ich in folgender Modifikation angewandt. Es war mir drum zu thun ein Erhitzen der Schnitte auszuschliessen.

Die dünnen Schnitte wurden für längere Zeit in eine ½ % Lösung vom Methylenblau in physiologischer Kochsalzlösung übertragen, gewöhnlich einige Stunden in derselben gelassen. Darauf für mehrere Tage in 90 % Alkohol übertragen.

Sollte die Entfärbung schneller vorgenommen werden så wurden einige Tropfen Origanumöl zu absoluten Alkohol gethan und die Schnitte in diesem

Gemisch in einer Glasschale auf eine weisse Unterlage gestellt. In dieser Weise war der richtige Entfärbungsgrad leicht festzustellen.

Zuweilen wurden die nach Nissl vorgefärbten Schnitte noch mit einer äusserst stark verdünnten wässerigen Lösung von Säurefuchsin nachgefärbt.

Meine Degenerationsversuche wurden nach der von Marchi angegebenen Methode behandelt.

Nach 8—12 tägigem in Verweilen Müller'scher Flüssigkeit wurden die Rückenmarke in kleine Stücke zerlegt, in das Flemming'sche Chrom-Osmium-Essigsäure Gemisch gebracht und für eine Woche in den Wärmschrank gestellt. Diese von Marinesco eingeführte Modifikation der ursprünglichen Marchi-Methode hat stets reine Resultate ergeben.

Ausserdem ist für das Studium dieses experimentell gewonnenen Materiales noch die von Homén eingeführte Methode in Anwendung gezogen. Diese Methode war ursprünglich von Weigert zum Färben der erytrophilen Ringe der Markscheiden angegeben. Nach derselben wurden möglichst dünne Schnitte für 1 Stunde in gesättigter wässeriger Lösung von Säurefuchsin überfärbt. Die tiefrothen Schnitte wurden alsdann in Wasser abgespült und in einer bis 5 % starken Lösung von Kalihydrat in Alkohol entfärbt.

Der richtige Zeitpunkt der erreichten Entfärbung ist Erfahrungssache und anfangs nicht ganz so leicht zu bestimmen, da die Schnitte eine bräunliche Farbe annahmen, die beim Entfernen des Kalihydrates mit reinem absoluten Alkohol wieder röthlich wird.

Ist die richtige Entfärbung getroffen, so zeigen alle degenerirenden Axencylinder eine scharfe, auffallend blauröthliche Farbe, während die gesunden leicht röthlich sind.

Auch mit einfacher kurzer Färbung in Säurefuchsin in stark verdünnter Lösung kann eine Unterscheidung der degenerirenden und nicht degenerirenden Axencylinder getroffen werden. Diese ist aber der von Homén angegebenen bedeutend unterlegen.

Schliesslich habe ich noch die Marchi-Methode mit der Homén'schen combinirt und dadurch ein Mittel erhalten, zweifelhafte Schwärzungen der Markscheiden zu beurtheilen.

Bekanntlich kommt es manchmal vor, dass auch im normalen Rückenmarke durch das Marchi-Verfahren einzelne Nervenfasern eine geschwärzte Scheide zeigen und daher Vorversuche in dieser Richtung stets bei der verwendeten Thierspecies gemacht werden müssen.

Um nun einen Entscheid treffen zu können, was man als Folge der experimentell gesetzten Läsion anzusehen hat, ist es von grosser Bedeutung die gleichzeitige Degeneration des Axencylinders festzustellen.

In vielen Fällen ist ausserdem noch die v. Gieson'sche Doppelfärbung und die von Schmaus angegebene Axencylinderfärbung mit Black blue und Pikrinsäure verwendet.

Hämatoxylintinctionen habe ich stets nur durch Anwendung langdauernder Färbung in schwachen Farblösungen erzielt.

Andere gebrauchte allgemein bekannte Tinctionen sind an den betreffenden Orten erwähnt worden.

II.

Stützsubstanz des Rückenmarkes.

Untersuchungen an Embryonen.

a) Salmo salvelinus.

Die Imprägnation nach der doppelten Methode von Ramon y Cajal kann schon an Embryonen, welche dem Ei kurz vor dem Ausschlüpfen entnommen sind, gelingen. An diesen kleinen Objecten ist sie aber sehr unsicher, und die sonst auch schwer zu beherrschende Launenhaftigkeit derselben macht sich hier noch mehr bemerkbar als sonst. Trotz vielfacher Versuche, die in Serien ausgeführt wurden und wobei die Einwirkungsdauer des Golgi-Gemisches um je eine Stunde wechselte, wurde in diesem Stadium nur wenig gelungenes erzielt; dann aber auch in überraschender Reinheit.

Reichlichere und leichtere Imprägnationen erhielt ich aber bei etwas älteren Larven, welche eine Länge von 15—20 mm hatten. Auch in einem Fall von Zwillingen, wo der grössere derselben eine Länge von 12, der kleinere eine von 9 mm hatte, gelang die Imprägnirung an beiden gut.

Die Anwendung der *Cox*'schen Flüssigkeit scheint auch übereinstimmend mit der Golgi-Methode nach meinen Erfahrungen an vorliegendem Material, besser bei den etwas älteren, als bei den früher dem Ei entnommenen Stadien zu gelingen. Ein schon früher erwähnter Vortheil liegt aber darin, dass die Präparate frei von Niederschlägen bleiben und die Möglichkeit besteht eine Nachfärbung zuzulassen.

Embryonen von *Salmo salvelinus* habe ich bis zu einer Länge von 50 mm untersucht.

Die Stadien bis zu einer Länge von 20 mm ungefär stimmen im Wesentlichen mit einander überein, kleinere Abweichungen vom ersten Stadium treten später immer zahlreicher auf.

Ein Embryo von 15 mm Länge, welcher mit Boraxkarmin durchgefärbt war, ergab folgenden Befund. Rund um den Centralkanal, welcher eine ovale Form besitzt und die Längsrichtung dorso-ventral zeigt, finden sich zwei, stellenweise drei Reihen grosser, runder Kerne. Die am meisten nach innen liegende Reihe zeigt die Kerne in regelmässigen Abständen von einander. An den beiden folgenden Reihen ist diese Regelmässigkeit viel geringer, besonders in der dritten, ausserhalb welcher sich noch Kerne vorfinden, welche ihrem Aussehen nach mit den reihenförmig geordneten übereinstimmen, aber unregelmässig zerstreut liegen.

An Präparaten, die nach Flemming fixirt und mit Saffranin gefärbt worden, lässt sich mit Leichtigkeit nachweisen, dass in diesem, dem Centralkanal anliegenden Gebiete des Rückenmarkes ein reges Wachsthum herrscht. Hier finden sich zahlreiche Zelltheilungsfiguren, welche aber mit nur wenigen Ausnahmen in der innersten, den Centralkanal begrenzenden, Reihe liegen. Diese Anordnung macht es ohne weiteres ersichtlich, dass die Kerne der äusseren Reihen als Abkömmlinge der inneren zu betrachten sind, da, wenn keine Verschiebung der neugebildeten Zellen nach aussen stattfände, der Centralkanal in diesem Stadium der Entwickelung bedeutend an Umfang zunehmen müsste. Dass dieses aber nicht der Fall ist, lässt sich an wenig älteren Stadien, sowohl durch Zählung der Kerne der inneren Reihe, wie durch Messen der Weite des Centralkanals leicht feststellen.

Imprägnationen nach Golgi oder *Cox* erläutern die oben gegebene Beschreibung in hohem Maasse.

Wir finden den Centralkanal umgeben von hellbraun bis schwarzbraun (Golgi) oder grauschwarz *(Cox)* gefärbten Zellkörpern. In denselben lässt sich meistens ein heller gefärbter (Golgi) oder beinahe ganz klarer *(Cox)*, bläschenförmiger Fleck auffinden, der seiner Grösse und Lage nach mit den oben erwähnten Kernen übereinstimmt, Dass wir es hier wirklich mit denselben Kernen zu thun haben, zeigen Karminnachfärbungen der nach *Cox* imprägnirten Präparate. Ein zierlicheres Bild, als die rothgefärbten Kerne in einer gut imprägnirten Rückenmarkszelle, lässt sich kaum auffinden.

Wie aus den Fig. 1—4 hervorgeht, zeigen uns die Imprägnationen sehr wechselnde Formen an den Zellenleibern der Ependymzellen. Mag auch manches hiervon auf Rechnung von Niederschlägen oder pericellularer Incrustation [1]) zu

[1]) Rossbach und Sehrwald. Ueber die Lymphwege des Gehirns. Centralblatt f. d. med. Wissensch. 1888.

Sehrwald. Der Einfluss der Härtung auf die Grösse der Gehirnzellen und auf die Gestalt der Golgi'schen Bilder. Zeitschr. f. wissensch. Mikroskopie. 1889.

setzen sein, so ist es andererseits doch auch als feststehend zu betrachten, dass die Ependymzellen in diesem frühen Larvenstadium wechselnde Formen besitzen. Wäre dieses nicht der Fall, so wäre es schwer, eine hinreichende Erklärung für die Beobachtung zu finden, dass verschiedene Präparate so vollkommen ähnliche Bilder zeigen, dass man, um bestimmte Schnitte wiederzuerkennen, sich niemals auf das Aussehen der Ependymzellenleiber als Erkennungszeichen verlassen darf. Täuschungen und Zeitverluste sind mir aus diesem Grunde anfangs in Menge vorgekommen.

Betrachten wir nun zuerst die Zellen, welche die Ependymauskleidung des Centralkanals jedenfalls zum grössten Theil bilden oder mit anderen Worten die Zellen, deren Kerne in der innersten Reihe stehen, so zeigt schon ein erstes flüchtiches Beachten der Fig. 1—3, dass dieselben einen der Grösse nach sehr wechselnden Basaltheil besitzen. Wo die Ependymzelle eine mehr runde Form hat, ist dieser Theil breit; hat die Zelle eine langgestreckte Form, so ist die Basis oft nur ein Viertel der Vorigen Fig. 2.

Ebenso wie die Beschaffenheit des Basaltheiles ist auch die Contour der Zelle verschiedenen Gestaltungen unterworfen. Einzelne zeigen eine glatte äussere Begrenzung. Die Mehrzahl besitzt kleine Auswüchse, scharfkantige oder runde Vorsprünge. In vielen Fällen entspringen diesen Unebenheiten kurze Härchen, welche in extremen Fällen eine grössere Länge als die Zellen selber erreichen können. Ist dieses der Fall, so lassen sich an den Härchen beinahe stets bei scharfer Vergrösserung [1]) gabelförmige Theilungen auffinden. Bis zu 5 solcher Härchen verschiedener Länge habe ich an einer Zelle rechnen können.

An den meisten Zellen erscheint der Basalsaum tiefer gefärbt als der übrige Zellenleib, zuweilen finden sich auch Andeutungen als ob dieser Basalsaum zu beiden Seiten der Zelle ein wenig hervorträte.

Die Zellen, welche die Kerne der zweiten Reihe besitzen, weichen in ihrem Verhalten bedeutend von den eben beschriebenen ab Fig. 4. Der Zellenleib zeigt die verschiedensten, oft bizarren Formen, welche in so weiten Grenzen wechseln, dass eine Zusammengehörigkeit derselben zu einer Klasse auf den ersten Blick als fraglich erscheinen kann. Wir finden hier Formen, welche als rund, spindelförmig, drei- oder mehreckig, oft auch kaum zu bezeichnen sind. Ihre Grösse ist auch verschieden. So kann es bisweilen im Dorsaltheil sehr schwierig sein, den Entscheid zu treffen, was eigentlich Zellenleib ist,

[1]) Für die Benutzung starker Vergrösserungen, schon von Zeiss Apochromat 8.0 und Ocular 18 an ist es von Wichtigkeit nicht zu vergessen, dass die Imprägnation sich in Körner auflösen lässt. *Cox*-Präparate besonders werden leicht undeutlich und ungenau.

und nur durch Benutzung nachgefärbter *Cox*-Präparate lässt sich diese Frage lösen.

Allen diesen Zellen gemeinsam ist ein sich verschmälernder Ausläufer, welcher vom inneren Ende der Zelle entspringt und an den Centralkanal herantritt. Da diese Ausläufer sich zwischen die verschieden geformten Zellen der ersten Reihe hindurchzwängen müssen, ist es leicht erklärlich, dass dieselben sowohl in Form wie Verlauf verschieden ausfallen. Während einzelne Zellen einen ziemlich derben, glatten Ausläufer haben, der nebenbei ziemlich kurz ist, zeigen andere einen langen, feinen, nur stellenweise kleine Anschwellungen besitzenden, welcher geradlinig verläuft, und noch andere Zellen wieder Ausläufer, welche nur unter vielen Knickungen den Centralkanal erreichen können.

Viele Zellen verschmälern sich allmälich, um in den Ausläufer überzugehen. Bei einigen entspringt derselbe unvermittelt, kaum dass ein geringer Vorsprung die Ursprungsstätte kennzeichnet. Selten ist nur die Beobachtung zu machen, dass kurze, feine Haare am medialen Ausläufer ihren Anfang nehmen.

Der unregelmässig geformte Zellenleib besitzt sonst die meisten Eigenschaften, welche bei den Zellen der inneren Reihe oben erwähnt wurden. Wir finden ihn manchmal vollbesetzt mit Unebenheiten und kleineren oder grösseren Höckern oder spitzen Auswüchsen. Ein anderes Mal entspringt demselben ein einziges, langes, feines Haar, welches sich am Ende gabelig spaltet, oder auch schon früher im Verlauf zahlreiche feine Äste abgiebt. Hin und wieder treffen wir einen dickeren Vorsprung an, der sich in ein Büschel feiner Fasern auflöst. Zuweilen wieder scheint die ganze Zelle mit feinen Fasern besetzt zu sein. Fig. 4.

Auch an diesen Zellen macht der den Centralkanal erreichende Ausläufer sich durch dunklere Imprägnirung an dieser Stelle kenntlich.

Gemeinsam für die Zellen der inneren und die medialen Fortsätze derjenigen der zweiten Reihe ist, dass hin und wieder einzelne Präparate ein feines, scheinbar starres Haar in den Centralkanal hineintreten lassen. Dasselbe ist nicht stets ganz rein imprägnirt worden. Oft hatte sich zwischen denselben ein hellerer Niederschlag gebildet, von welchem diese Gebilde durch tiefere Färbung abstachen. Hervorzuheben ist noch, dass dieselben gegen die Einwirkung der *Cox*'schen Flüssigkeit bedeutend resistenter erschienen als gegen die Einwirkung der Golgi-Methode während der Imprägnation.

Die Stützzellen, welche der Lage ihrer Kerne nach der dritten Reihe angehören oder noch weiter vom Centralkanal entfernt liegen, zeigen wieder

andere Formen von Zellenleibern. Ebenso wie die oben beschriebenen wechseln dieselben sehr; ihnen allen aber ist gemeinsam, dass sie vollständig vom Centralkanal abgelöst sind. Einen medialen Ausläufer zum Centralkanal vermissen wir stets.

Die verschiedenen Formen dieser Zellen sind schwer zu kennzeichnen, die Fig. 1—4 enthalten sämmtliche einige Beispiele. Dieselben besitzen, wie die Zellen der zweiten Reihe Unebenheiten und Vorsprünge und zeigen oftmals ihren ganzen Umkreis mit Haaren besetzt. Diese können sowohl ungetheilt bleiben, wie sich theilen. Zuweilen ist die Verästelung derselben sogar sehr reichlich. Fig. 3.

Allen diesen oben beschriebenen, verschieden gelegenen Zellkörpern kommt aber ein gemeinsames Kennzeichen zu, dieselben entsenden von ihrem peripherwärts gerichtetem Ende einen langen Fortsatz, welcher die Peripherie des Rückenmarkes erreicht um hier mit einer kleinen Anschwellung zu enden. Dieser periphere Ausläufer beginnt stets mit einer Verjüngung des Zellkörpers. Einen gänzlich unvermittelten Beginn habe ich in keinem Falle beobachtet. Beinahe stets ist die sich verschmälernde Partie des Zellkörpers glatt, selten finden sich an derselben kleine Höcker und noch seltener dient dieselbe als Ursprungsstätte für feine Fasern.

Der periphere Fortsatz ist in den meisten Fällen leicht zu verfolgen d. h. wenn die Schnitte dick genug sind. Nur ausnahmsweise ist der Verlauf derselben gerade. Gewöhnlich schlängelt er sich förmlich auf die Peripherie zu [1]), Als Hauptform muss die ungetheilte gelten; gabelig sich theilende, wie Fig. 4 einen zeigt, trifft man nur selten an. Ebenso sind Ausläufer, die schon kurz nach ihrem Beginn in mehrere zerfallen und das Aussehen eines Buschwerkes darbieten, so selten, dass ich dieselben lange Zeit für durch Niederschläge hervorgebrachte Verschmelzungen mehrerer gehalten habe. Erst in letzter Zeit ist mir ein Umstand aufgefallen, der ein wenig gegen diese Auffassung sprechen könnte. Bei den wenigen Fällen, wo ich diese Formen zu Gesicht bekommen habe, nahmen dieselben stets eine gleiche Lage im Schnitte ein. Ausserhalb des untersten Theiles der lateralen Sectoren, (wenn man sich den Rückenmarksquerschnitt in vier Theile getheilt denkt, so dass man 2 laterale 1 ventralen und 1 dorsalen Sector erhält) habe ich dieselben nie angetroffen. Da dieselben mir aber immerhin als etwas zweifelhaft vorkommen, habe ich keine Abbildung derselben auf meine Tafeln aufgenommen.

[1]) Bei der Projection dieser Fasern in eine Ebene, wie es die Anfertigung von Zeichnungen erfordert, verschwindet diese Schlängelung zum grössten Theil, indessen kommt dieselbe in den Fig. 1 und 3 doch zum Ausdruck.

Diese Ependymfasern sind nun auch nach verschiedenen Typen gebaut.

Zahlreich sind Formen vorhanden, welche den von Retzius [1]) am Lachse beschriebenen und abgebildeten ähnlich sind. Diese besitzen ihrer ganzen Länge nach einen feinen, reif- oder moosartigen Belag, stellenweise an aneinander gereihte, aufgerollte Härchen erinnernd. In meinen Präparaten ist derselbe nicht ganz so gleichmässig, wie die von Retzius gegebenen Abbildungen zeigen; auch kann ich mich nicht ganz von der Ansicht frei machen, dass Niederschläge eine Rolle spielen. Da diese Formen ausserdem, wie gesagt, schon von früher bekannt sind, habe ich dieselben auch nicht abbilden lassen.

Bedeutend häufiger, nach meinen Präparaten, ist eine von der eben erwähnten, abweichende Beschaffenheit der Ependymfasern. Dieselben bestehen aus einem beinahe in ganzer Länge glatten und gleichmässig starken Faden, dem nur hin und wieder ein ganz geringer Moosbelag anhaften kann. Statt dessen gehen aber feine, glatte Äste in wechselnder Zahl von dem Hauptfaden aus. Diese Äste haben eine sehr verschiedene Länge; häufig spalten dieselben sich in mehrere; oft scheint es, als ob 2 oder mehr, in ihrem Verlauf divergirende von demselben Punkte des Stammfadens entspringen. Wo dieselben sehr reichlich vorhanden sind, oder wenn zwei imprägnirte Ependymzellen nahe an einander liegen, ist es schwer, die Verfilzung dieser Fasern aufzulösen und jeder Stammfaser das ihr zugehörige zuzutheilen.

Ganz andere Bilder bieten besonders die im Dorsaltheile des Rückenmarkes liegenden Ependymfäden dar. Hier zeigt der Stammfaden stets eine viel grössere Dicke als in den übrigen Theilen des Querschnittes. Beinahe stets ist derselbe mit scharfkantigen und spitzen Höckern versehen; oft zeigt er auch einen winkelig geknickten Verlauf. Fig. 4. Eine reichliche Verästelung, bei ziemlich glatten und gleichmässig starken Ependymfaden zeigt Fig. 3; geringe Verästelung Fig. 2. Diese Art Zellen steht stets in Zusammenhang mit dem Centralkanale.

Periphere Ependymfäden von Zellen, welche ohne Zusammenhang mit dem Centralkanal stehen, treten zuerst im dorsalen Sector des Querschnittes auf. Erst viel später findet man dieselben in den lateralen Theilen des Rückenmarkes und selbst bei einer Länge von 50 mm habe ich keine im ventralen Sector beobachtet. Dieselben zeigen stets dieselbe Beschaffenheit wie die oben beschriebenen, indem feine Äste, welche sich oft spalten, vom Stammfaden entspringen.

---

[1]) G. Retzius. Biologische Untersuchungen N. F. V.

Bei einem Vergleich mit einem van Gieson- oder einem einfachen Hämatoxylinpräparat findet man, dass die Ependymzellen, welche dem Dorsaltheile des Centralkanals angehören, von den übrigen bedeutend abweichen. Während die Ependymzellen, welche der lateralen und der ventralen Seite des Centralkanals anliegen, ein dunkles Protoplasma und dicht am Centralkanal liegende Kerne besitzen, zeigen die dorsalen Ependymzellen ein viel helleres Protoplasma und oft weit vom Centralkanale entfernte Kerne.

Es erscheint als wahrscheinlich, dass diese Abweichung der dorsalen Ependymzellen von den übrigen, auf die Verschmelzung der beiden lateralen ectodermalen Wülste zu dem rohrförmigen Rückenmarke zurückgeführt werden muss, wodurch der Ursprung der dorsalen nicht ganz der gleiche ist wie der übrigen Ependymzellen.

Allerdings hat Calberla[1]) nach eigenen Untersuchungen die Ansicht vertreten, dass das Rückenmark der Teleostier strangförmig angelegt werde und der Centralkanal erst sekundär entstände. Eine Bestätigung dieser Ansicht habe ich nirgends angetroffen und sehe gerade in dem Verhalten der Ependymfasern der dorsalen Region, welches das gleiche wie bei höheren Vertebraten ist, eine schwerwiegender Einwendung gegen Calberla's Darstellung.

An den mehr als 20 mm langen Embryonen lassen sich allmälich immer mehr Abweichungen von den beschriebenen Stützzellen wahrnehmen.

Zuerst treten Veränderungen in der Gegend der ventralen Wurzelaustrittzone auf. Hier zeigen die Ependymzellen oft eine mehr regelmässige Cylinder- oder Spindelform; die peripheren Ausläufer sind mehr und mehr geradlinig. Die Haare und Höcker an Zellen und Ependymfäden verschwinden immer mehr, nur am peripheren Ende des Ependymfadens zeigen sich noch Äste. Fig. 1 und 4.

Aber auch in anderen Theilen des Ausschnittes finden sich bei den grösseren Embryonen ähnliche Formen. Auch hier zeigen die Zellen und die inneren Theile der Ependymfaden eine glatte gleichmässige Beschaffenheit.

Diese glatteren Ependymzellen und Fäden lassen sich zuerst am Uebergangstheil der Oblongata ins Rückenmark nachweisen. Je grösser die Embryonen sind, desto weiter caudalwärts werden diese Formen angetroffen.

Aber noch bei Embryonen, welche 50 mm lang sind, finden sich Ependymzellen und Fäden, welche vollkommen mit den an 15—20 mm langen Embryonen übereinstimmen.

---

[1]) Calberla. Zur Entwickelung des Medullarrohres und der Chorda dorsalis der Teleostier und Petromyzonten. Morphologisches Jahrbuch, Bd III, 1877.

b) Esox lucius.

Das Stützgerüst bei *Esox*embryonen wurde an einem Material studirt, welches theils aus soeben dem Ei entschlüpften theils aus grösseren, schliesslich eine Grösse von 70 mm erreichenden Thieren bestand.

An den ganz jungen Embryonen, bis zu einem Alter von 3 Wochen, gelang die Imprägnation nie allzugut, stets wurde nur verhältnissmässig wenig der Gerüstsubstanz imprägnirt. Einen Schnitt aus dem oberen Dorsalmark stellt Fig. 5 dar. Derselbe stammt von einem 2 Wochen alten Embryo.

An demselben sieht man, dass sowohl Ependymzellen wie Fäden viel regelmässiger und glatter als bei *Salmo salvelinus* gebaut sind. Während die entsprechenden Stadien von *Salmo* an Zellen und Fäden zahlreiche sich verästelnde Haare besassen, zeigen die Ependymzellen hier nur kleine Höcker und Unebenheiten. Ebenso sind die Ependymfasern nicht mit Haaren versehen, sondern nur uneben.

Ziemlich oft finden sich Verästelungen, welche aber ganz die gleiche Stärke und Beschaffenheit wie der Stammfaden zeigen.

Der Fuss, mit welchem die Ependymfäden an die Peripherie herantreten, ist plump und gross. Eine regelmässige Form besitzt derselbe in diesem ersten Stadium nicht. Von demselben können zuweilen haarähnliche Gebilde rückwärts in das Rückenmark hinein verlaufen.

In meinen Präparaten habe ich nie, wie bei *Salmo salvelinus* Zellen imprägnirt erhalten, welche mit einem centralen fadenförmigen Fortsatze an den Centralkanal herantreten. Ich glaube dieses auf den Umstand zurückführen zu müssen, dass mein Material von *Esox*embryonen nicht alle Stadien vom Ei bis zu einer Länge von 70 mm umfasst, sondern eine Lücke besitzt, welche dadurch entstanden ist, dass ich die Larven nur 3 Wochen nach dem Verlassen des Eies am Leben erhalten konnte. Das Leitungswasser, welches die Brutapparate speiste, wurde um diese Zeit schon so warm, dass die Thiere starben. Die grösseren Thiere wurden aus einem Binnensee gesammelt. Die kleinsten hierbei gewonnenen maassen aber schon 25 mm während die grössten gezüchteten nur 12—15 mm lang waren.

Hervorheben will ich noch, dass an den gezüchteten *Esox*larven im Gebiet des caudalen Endes der Oblongata in der ventralen Wurzelzone einzelne Ependymfäden gefunden wurden, welche in ihrem ganzen Verlauf glatt waren, während die übrigen Höcker und Unebenheiten besassen.

Fig. 6 ist die Wiedergabe einer selten schön gelungenen Imprägnation des mittleren Rückenmarkes von einem 30 mm langen Embryo. Hier hat nur

der linke mittlere Ependymfaden noch einige Unebenheiten und kurze Äste aufzuweisen. Alle anderen Ependymfasern sind glatt und dünn. Diese mittlere laterale Ependymzelle erreicht auch nicht mit ihrer Basis den Centralkanal, sonder erst vermittelst einer sich verschmälernden Partie des Zellenkörpers. Eine ähnliche Beschaffenheit zeigt die rechte ventrale Ependymzelle. Alle übrigen besitzen einen breiteren Basaltheil, mit welchem sie an den Centralkanal herantreten. Ein Ependymfaden, dessen Zelle leider nicht in denselben Schnitt gefallen ist, zeigt eine periphere Verästelung.

In diesem Schnitt zeigt sich auch der periphere Fuss der Ependymfäden viel gleichmässiger gebaut. Derselbe hat eine dreieckige Form angenommen und wendet die Basis nach aussen. Diese Form und Lage behält derselbe von diesem Stadium an bei.

Fig. 7 ist nach einem Schnitt aus dem mittleren Theil des Rückenmarkes einer 40 mm langen Larve gezeichnet. Dieselbe zeigt ein ventrales Keilstück imprägnirt, welches hier aus vier Ependymzellen und Fäden besteht. Zwei der Zellen sitzen dem Centralkanal mit breiter Basis an, zwei andere sind von Spindelform und erreichen den Centralkanal mit einem feinen Fortsatz. Die zwei Zellenkörper, die an den beiden Seiten des imprägnirten Keilstückes liegen, gehören demselben wohl auch noch an, obgleich die Fäden beim Verfertigen des Schnittes abgetrennt worden sind.

An der entgegengesetzten dorsalen Seite des Centralkanals finden wir hier nur eine Zelle in ganzer Ausdehnung imprägnirt. Diese sitzt der Lichte des Kanals mit einem kleinen Körper auf, welcher wohl am leichtesten dem Zellenkörper der übrigen Ependymzellen zu vergleichen wäre. Dieses ist jedoch nicht der Fall, sondern haben wir es wahrscheinlich mit einem Kunstprodukt zu thun, das auf Rechnung der Methode zu setzen ist. Nach oben zu verjüngt dieser Körper sich zu einem dünnen Faden um nach kurzem Verlauf eine grössere spindelförmige Anschwellung zu bilden, von deren peripheren Ende ein feiner Faden bis nahe an die Peripherie gradlinig verläuft. In der Nähe des äusseren Randes des Querschnittes biegt er nach rechts hinüber und endet an demselben mit kleiner Verdickung. In der Mitte der spindelförmigen Anschwellung markirt sich am Präparat deutlich ein heller Fleck, wie derselbe oben schon als Kernbild bei diesen Präparaten beschrieben worden ist. Damit ist nun die Natur dieses spindelförmigen Körpers als Zellenleib erwiesen.

Auf demselben Schnitt, Fig. 7, ist ausserdem noch eine Stützzelle wiedergegeben, deren Zellenkörper ohne jeglichen Zusammenhang mit dem Centralkanale steht. Der Zellenkörper lag hier in dem Theil des Querschnittes, welcher nicht aus Nervenfaserquerschnitten bestand, und trotzdem seine Form von der an

erwachsenen Thieren gefundenen abweicht, als graue Substanz in Anspruch genommen werden darf.

Diese Zelle hat einen sehr grossen Zellenkörper, welcher grosse Höcker oder Auswüchse besitzt. Am ventralen Ende der Zelle entspringen drei Haare, von welchen das oberste eine Endspaltung in zwei Äste zeigt. Auch von einem dorsalwärts gerichteten Vorsprunge entspringt ein Haar.

Am dorso-lateral gerichteten Ende dieses Zellenkörpers beginnt ein peripherer dicker, zahlreiche eckige Auswüchse zeigender Fortsatz, welcher mit recht grosser, dreieckiger Anschwellung an der Peripherie endet. Von den Spitzen der verschiedenen Verdickungen dieses Fadens nehmen ungetheilt verbleibende Fasern ihren Anfang.

Diese Form von Stützzellen tritt in meinen Präparaten zuerst bei einer Embryonenlänge von ungefär 40 mm auf. Von dieser Grösse anfangend trifft man dieselben vereinzelt in der dorsalen Hälfte des Rückenmarkes an, bis die jungen Hechte eine Länge von 50 mm und mehr erreicht haben. Von diesem Zeitpunkt an ist der periphere Faden meistens feiner und zeigt immer weniger Äste, so dass schliesslich kein Zeichen mehr aufzufinden ist, durch welches dieselben sich von entsprechenden Zellen voll ausgebildeter Thiere unterscheiden.

Untersuchungen an ausgewachsenen Thieren.

Diese Untersuchungen wurden an Rückenmarkspräparaten von *Salmo trutta, Perca fluviatilis, Leuciscus rutilus, Esox lucius* und *Anguilla vulgaris* vorgenommen. Da dieselben einen für die verschiedenen Arten in den Hauptzügen übereinstimmenden Bau ergeben haben, werde ich diesen nicht für die einzelnen Thiere besonders beschreiben, sondern gebe mehr ein Typenbild gemeinsam für alle. Kleinere, wichtige Unterschiede werden allerdings im Laufe der Beschreibung auch Erwähnung finden.

Für diesbezügliche Studien lassen sich neben Imprägnationspräparaten auch noch gewöhnliche Färbungen sehr vortheilhaft verwenden. Besonders grosse Vortheile boten gewöhnliche Weigert'sche Markscheidenfärbungen, wobei allerdings sehr leicht anstatt des dunkelblauen Farbtones ein mehr ins grünliche spielender ohne nachweisbare Ursache erhalten wurde, ausserdem v. Gieson'sche Doppelfärbung und Hämatoxylinpräparate. Um alles zu sehen, was mit letzterem Farbstoff zu erzielen ist, habe ich die Schnitte in äusserst stark ver-

dünntem DELAFIELD'schen Hämatoxylin 24 Stunden gefärbt und darauf für mehrere Tage in Wasser gebracht.

Fig. 8 ist nach einem so hergestelltem Hämatoxylinpräparat gezeichnet worden und stellt das Rückenmark eines Aales dar. An derselben lassen sich leicht vier verschiedene Gruppen von Ependymzellen unterscheiden. Zwei derselben, die dorsale und ventrale, bilden ausgesprochene Keil- oder Tonnenförmige Figuren. Besonders am dorsalen Keilstück lassen sich die einzelnen Ependymfäden gut peripherwärts verfolgen. In ihrem Verlauf nähern sie sich einander, ohne jedoch zu einem Septum zusammenzuschmelzen und weichen kurz vor dem dorsalen Rande des Querschnittes fächerförmig aus einander.

Der ventrale Keil ist bedeutend kürzer. In geringer Entfernung vom Centralkanale lagern sich die einzelnen Ependymfäden aneinander, um so zu einem Bündel vereinigt als Septum anterior oder richtiger ventralis gegen den ventralen Rand des Rückenmarks zu ziehen, wo sie wieder auseinanderweichen. Während des Verlaufes als Bündel lassen sich die einzelnen Fasern nicht alle im ganzen Verlauf verfolgen. Ein solcher Versuch wird umsomehr hier erschwert, weil Blutgefässe mit ihren Hüllen oft an dieser Stelle eintreten.

In beinahe gleicher Weise vereinigen sich die lateralen Ependymfäden nach kürzerem, bogenförmigen Verlauf innerhalb der grauen Substanz zu einem lockeren Bündel, welches sich aber nur eine kurze Strecke verfolgen lässt. Zum Unterschied von dem dorsalen und besonders dem ventralen Bündel, lassen sich die einzelnen Fäden der lateralen gut differenzieren. Dieselben bleiben, so weit sie sich verfolgen lassen, stets durch geringe Mengen zwischenliegender, grauer Substanz von einander getrennt.

Hervorzuheben ist, dass während die oberen lateralen Ependymfäden sofort einen ventralwärts offenen Bogen bilden, die beiden dem ventralen Keilstück zu jeder Seite am nächsten liegenden erst einen ventralwärts konvexen Bogen bilden, um erst später in einen medialwärts offenen überzugehen.

Eine Andeutung eines ähnlichen Verlaufes dieser beiden Ependymfäden sehen wir auch auf Fig. 9, welche ein GOLGI-Präparat vom Rückenmark von *Salmo trutta* darstellt. An den übrigen von mir untersuchten Thieren habe ich diese beiden Fasern nie so weit deutlich gesehen, dass ich sagen könnte, ob diese auch dort denselben Verlauf hätten.

Vergleichen wir mit dem beschriebenen Präparat von ANGUILLA die Fig. 10, welche einem Rückenmarksquerschnitt von *Salmo trutta* entnommen ist, der nach WEIGERT's Markscheidenfärbung behandelt war und dieselben Details wie v. GIESON- und Hämatoxylinpräparate zeigte, so finden wir eine genaue Ueber-

einstimmung. Auch hier lassen sich die Ependymzellen sofort in 4 verschiedene Gruppen unterbringen, eine dorsale, eine ventrale und zwei laterale.

Sowohl die dorsale wie die ventrale Gruppe lassen durch Anordnung ihrer Zellenkörper und Ependymfäden keilförmige Gebilde entstehen. Dieselben werden bei *Salmo* im Gegensatze zu Anguilla zum grössten Theile durch die langgestreckten halbmondförmigen Zellenkörper gebildet, während die Ependymfäden nur die spitzen Endstücke derselben bilden. Besonders gilt dieses vom dorsalen Keilstücke. Die Ependymfäden lagern sich bald aneinander und bilden hier sowohl ein dorsales wie ventrales Septum. Auch bei den übrigen untersuchten Thieren tritt das dorsale Bündel mehr als selbständiges Septum hervor.

Die beiden lateralen Ependymzellengruppen lassen an gewöhnlichen Tinctionspräparaten jeglicher Art keine, wenigstens deutliche Fortsätze zur Wahrnehmung gelangen. Die besten Resultate ergab noch *Esox* in dieser Beziehung. An diesem Teleostier sind dieselben auch schon früher von Stieda [1]) gesehen worden.

An meinen Tinctionspräparaten von den übrigen untersuchten Knochenfischen liessen sich stets die genannten vier Gruppen von Ependymzellen gut unterscheiden, und kamen immer die beiden Keilstücke, das dorsale und das ventrale, gut zur Darstellung.

Dieses hängt zum grossen Theil davon ab, dass die lateralen Ependymzellen nur sehr wenig Protoplasma besitzen, welches aber jedes Tinctionsmittel viel stärker aufnimmt, wie die dorsalen und ventralen Zellen. Ausserdem scheinen dieselben viel dichter mit tingiblen Körnern gefüllt zu sein. Dadurch nehmen dieselben Zellenkörper eine beinahe ebenso tiefe Tinction an wie ihre Kerne. Der Unterschied zwischen dorsalen und ventralen Gruppen einerseits, und den beiden lateralen andererseits ist so gross, dass die beiden ersten oft als Lücken im Ependymzellenring imponiren.

Weiter liegen die Zellen in den beiden lateralen Gruppen in mehreren Reihen und so dicht an einander gedrängt, dass es unmöglich ist, den Zusammenhang zwischen einem Faden und der entsprechenden Zelle festzustellen, besonders da die Kerne und das Protoplasma, wie schon gesagt, eine beinahe gleich tiefe Färbung zeigen.

Dass die bei Anguilla beschriebene Anordnung der lateralen Ependymfasern eine principielle Bedeutung für das Rückenmark der Teleostier hat, wodurch beinahe die ganze obere Hälfte des Rüchenmarkquerschnittes ohne Epen-

[1]) Stieda. Ueber das Rückenmark und einzelne Theile des Gehirns von Esox lucius. I. D. Dorpat 1861.

dymgerüst bleibt, von der dorsalen Keilstückregion abgesehen, scheint aus den Imprägnationspräparaten auch hervorzugehen.

Fig. 9, welche bei kleiner Vergrösserung nach einem Golgi-Präparat von *Salmo trutta* gezeichnet ist, zeigt in vollster Uebereinstimmung mit der Abbildung 8, dass die lateralen Zellen ihre Ependymfäden in einem ventralwärts offenen Bogen zu einen Bündel vereinigen. Noch deutlicher geht dieses aus Fig. 11 [1]), welche die lateralen Ependymfäden aus Fig. 9 bei grösserer Vergrösserung darstellt.

Ein einziges Mal habe ich laterale Zellenausläufer eine andere etwas mehr dorsalwärts gewandte Richtung einschlagen sehen. Dieses war bei *Perca fluviatilis*. Der hier vorgefundene Verlauf ist in Fig. 12 wiedergegeben.

Die Form der lateralen Ependymzellen hat oben bei Besprechung der Tinctionspräparate keine Erwähnung gefunden. So schwer diese sich an derartigen Schnitten genau feststellen lässt, wie dünn und scharf tingirt die Schnitte auch erscheinen mögen, so leicht gelingt dieses an Imprägnationen. Wie aus den Fig. 9, 11—16 hervorgeht, haben die lateralen Ependymzellen bei *Salmo, Leuciscus* und *Perca* übereinstimmend eine Cylinder- oder Spindelform, je nachdem sie dem Centralkanale direkt anliegen oder durch eine zwischenliegende Zellenschicht von demselben getrennt sind. Auch bei den übrigen von mir untersuchten, obgleich nicht abgebildeten Formen ist dieses der Fall.

Das vom Centralkanal abgewendete Ende verjüngt sich stets und geht dann in den Ependymfaden über, ohne Haare oder Höcker aufzuweisen. Nur selten ist es mir gelungen das vom medialen Zellenende in den Centralkanal hineinragende haarförmige Gebilde rein imprägnirt zu erhalten. Die dargestellten Präparate zeigen kein solches; dass es aber dennoch überall existiren wird, geht genugsam aus anderen Schnitten hervor.

An einem kleinen Exemplare von *Perca fluviatilis* erhielt ich einmal ein Bild, welches in Fig. 13 wiedergegeben ist. Hier zweigen sich am Uebergangstheil zwischen Zelle und Ependymfaden einige Äste ab. Diese einzig dastehende Beobachtung ist nicht ganz leicht zu deuten. Möglich ist, dass es ein Artefact wäre, aber auch ist es nicht ganz von der Hand zu weisen, dass bei dem kleinen Exemplare noch Reste aus der früheren Entwickelungsperiode vorhanden wären.

Der Ependymfaden geht an meinen Präparaten bis an die Peripherie des Schnittes und endigt hier mit einer Anschwellung. Bei Anwendung dünner

[1]) An diesen Abbildungen, welche nur Theile des Querschnittes wiedergeben, habe ich in der chematischen Wiedergabe der grauen Substanz zur leichteren Lageorientirung die Mauthner'schen Fasern auch andeuten lassen.

Schnitte lässt derselbe sich nur in wenigen Fällen so weit verfolgen, während dieses bei dicken Schnitten leichter gelingt, ein Befund der weiter unten noch besprochen werden soll.

Gewöhnlich ist der Verlauf der stets glatten und gleichmässigen Ependymfäden nicht ganz grade oder regelrecht bogenförmig. Kleine Schlängelungen gehören vielmehr zu den stets wiederkehrenden Befunden.

Im Allgemeinen steht ihr Verlauf in voller Uebereinstimmung mit den grösseren Septen in der ventralen Hälfte des Rückenmarkes, wie ein Vergleich mit Tinctionspräparaten zeigt. Nur sind diese stets viel dicker als die entsprechenden Ependymfasern.

Gabelige Spaltungen der Ependymfasern kommen in geringer Zahl vor. Nur an Fig. 13 habe ich ein Auflösen des Ependymfadens in spitz auslaufende, sich selber verzweigende Äste gefunden. Hier tritt diese Verzweigung ausserdem schon innerhalb der grauen Substanz ein.

Oben wurde hervorgehoben, dass die Ependymfäden sich nur an dicken Schnitten und, wie hier hinzufügen ist, auch an solchen nicht stets bis an die Peripherie verfolgen lassen. Um diesen Punkt näher aufzuklären habe ich Längsschnitte verschiedener Richtung angefertigt. Dieselben waren aber an und für sich wenig belehrend, da dieselben meistens nur kurze Enden der Ependymfäden enthielten. Erst als ein besonderes Verfahren bei ihrer Untersuchung eingeschlagen wurde, liess sich die Bestätigung der Annahme, dass dieselben durch das Mikrotommesser abgeschnitten wären, erbringen.

Mit Hilfe der Abbé'schen Camera wurden auf Pauspapier mehrere auf einander folgende Schnitte gezeichnet. Die einzelnen Schnittzeichnungen wurden mit ihren Umrissen auf einander gelegt; als Marke wurde eine austretende ventrale Wurzel benutzt, und zusammen durchgepaust. In dieser Weise ist Fig. 14 aus 3 Schnitten kombiniert worden.

Dieselbe zeigt sofort, dass die grosse Mehrzahl der Ependymfäden keineswegs in einer Querschnittsebene senkrecht auf die Peripherie zuläuft, sondern meistens bedeutend von dieser Richtung abweicht. Eine Thatsache, welche die oben erwähnte Beobachtung vollkommen verständlich macht.

Aber noch in anderer Beziehung wirkt diese Kombinationsfigur 14 aufklärend. Dieselbe zeigt, dass sich die Ependymfäden aus ziemlich gleich grossen Gebieten zu Bündeln zusammenlegen. Durch diese Anordnung wird das Rückenmark von relativ festen Stützen durchzogen, ein Umstand, welcher vielleicht von Wichtigkeit für die Construction des die nervöse Substanz zusammenhaltenden Gerüstes sein kann.

Es mag noch bemerkt werden, dass auch die Längsschnitte keine Bilder ergeben haben, welche für eine reichlichere Verästelung der Ependymfäden sprächen.

Das Stützgewebe des Rückenmarkes besitzt ausser diesen vom Centralkanale bis zur Peripherie ziehenden Fasern noch weitere Bestandtheile. Diese lassen sich am besten in zwei getrennten Gruppen beschreiben, solche, welche mittelst einem langen Hauptausläufer die Peripherie erreichen ohne jedoch Verbindung mit dem Centralkanal zu haben, und solche deren Ausläufer alle gleichwerthig, und im Vergleich mit dem Hauptausläufer der ersten Gruppe relativ kurz sind.

Ich acceptire für die erstere Gruppe die Bezeichnung Astroblasten, obgleich wir es hier mit bestehenden Formen zu thun haben, während dieser Name sonst bei den höher stehenden Thieren nur ein Entwickelungsstadium der Zellen der zweiten Gruppe oder Astrocyten bezeichnen soll. Es scheint mir aber aus dem Grunde erlaubt, dass die Teleostier tiefer stehende Thiere als z. B. die Säuger sind, und die Astroblasten ja leicht als tiefer stehende Form in der phylogenetischen Reihe ebenso gut wie in der embryologischen Entwickelung aufgefasst werden können.

Astroblasten von *Leuciscus rutilus* und *Perca fluviatilis* sind in den Fig. 15—19 dargestellt. Aus diesen Abbildungen, welche verschiedene Stücke des Rückenmarkquerschnittes wiedergeben, geht über die Verbreitung der Astroblasten hervor, dass dieselben mit ihren Hauptausläufern das ganze Rückenmark durchziehen, und keineswegs wie die Ependymfäden vorzugsweise an gewisse Gebiete gebunden sind.

Diese Stützzellen zeigen in einigen Präparaten einen sehr wechselnden Zellenkörper, Fig. 15. Derselbe hat alsdann eine ziemlich beträchtliche Grösse und bizarre Formen, während andere Schnitte und, wie ich hervorheben will, die Mehrzahl ihnen einen in Grösse, und besonders in Form, übereinstimmende Beschaffenheit ertheilen. Leider habe ich mir die Grösse der verschiedenen Exemplare nicht genauer notirt und kann daher nicht entscheiden, ob diesen verschiedenen Präparaten nicht vielleicht verschiedene Entwickelungsstufen entsprächen.

Die in den Abbildungen 16—19 wiedergegebenen Astroblasten haben alle einen recht kleinen Zellenkörper, wenn man denselben mit dem Hauptausläufer vergleicht. Seiner Form nach zeigt derselbe eine gute Uebereinstimmung mit Zellenkörpern, die man auch an Tinctionspräparaten findet.

Diese Zellenkörper findet man in der ganzen grauen Substanz vor; ihre hauptsächliche Domäne scheint aber das Grenzgebiet zwischen grauer und weisser Substanz zu sein. In der weissen Substanz kann eine solche Zelle oft

scheinbar liegen, bei genauerem Nachsehen befindet sich der Zellenkörper aber dennoch in einem Gebiet grauer Substanz, welche, wie es bei den Teleostiern oft der Fall ist, sich in die weisse Substanz hinein verlängert. Am dorsalen Theile der ventralen Hörner sind, wie gewöhnliche Präparate zeigen, stets Bündel von Nervenquerschnitten innerhalb der Maschen eines Netzwerkes grauer Substanz zu finden.

Die typische Form dieser Zellen ist die birnenförmige, die breitere Hälfte ist gegen den Centralkanal gerichtet. Von diesem Zellenkörper strahlen kurze Fasern nach allen Richtungen aus. Meistens sind diese unverzweigt. Ausnahmsweise finden gabelige Spaltungen statt.

Vom schmalen Zellenende entspringt eine kräftige Faser, welche anfangs in den meisten Fällen, besonders im Dorsaltheile, einen kleinen Bogen beschreibt, um darauf in radiärer Richtung der Peripherie zuzustreben, wo dieselbe, ebenso wie die Ependymfäden, mit kleiner Anschwellung endet.

Im Gegensatz zu den Ependymfäden verzweigen sich diese langen Fasern der Astroblasten ebenso oft, wie sie ungespalten verlaufen. Die Äste derselben sind bedeutend feiner als der Hauptstamm, und schlängeln sich im Verlauf bedeutend.

Oftmals liegen zwei oder mehr lange Fasern in ihrem peripheren Verlauf dicht neben einander. Auch lässt sich nachweisen, dass sie besonders in der ventralen Wurzelaustrittzone sich gern an hier verlaufende Ependymfäden anschliessen.

Vergleicht man Präparate, welche zahlreiche Astroblasten imprägnirt zeigen, bei schwacher Vergrösserung mit v. Gieson-Präparaten, so findet sich eine grosse Uebereinstimmung. An beiden Präparaten, sofern sie derselben Region entnommen sind, finden sich gleichgelagerte Septa, welche an den Schnitten nur in der Farbe wechseln und an Imprägnationen schwarz, an v. Gieson-Präparaten roth erscheinen. Stärkere Vergrösserungen lassen ohne weiteres erkennen, dass besonders die kurzen Septa durch die Lage der Astroblasten vorgezeichnet sind. Für die langen Septa ist dieses schon oben bei den Ependymfäden erwähnt. Wie aber die langen Septa bedeutend breiter als die Ependymfasern waren, ist dasselbe auch in Bezug auf Astroblastenfasern und kurze Septa der Fall.

Die Astrocyten zeigen in allen Präparaten, wo sie imprägnirt worden sind, eine ähnliche Beschaffenheit. Kennzeichnend für dieselben ist ein äusserst winziger Zellenkörper, oft so klein, dass er nur ein Knotenpunkt für die nach allen Richtungen oder auch nach zwei Hauptrichtungen ausstrahlenden feinen Fasern zu sein scheint. Diese Fasern oder Strahlen sind äusserst fein und

strecken sich nach allen Richtungen hin, so dass diese Zellen vollständig den Namen Astrocyten verdienen, den v. Lenhossék [1]) für diese Gebilde vorgeschlagen hat.

Astrocyten trifft man im ganzen Rückenmark an; nur lassen sie sich in der weissen Substanz nicht stets gleich auffinden, weil dieselben von den Osmiumgeschwärzten Markscheiden oft und leicht verdeckt werden. Aber auch in der grauen Substanz ist es nicht leicht, eine Strahlenzelle zu isolieren, weil gewöhnlich ein Gewebe von Strahlen imprägnirt ist, welches die einzelnen Zellenkörper verdeckt.

Neben diesen Fasern, welche unzweifelhaft mit Zellenkörpern in Verbindung stehen, zeigen aber alle Präparate noch Massen von feinen, kurzen Fasern, die auch trotz noch so sorgfältigen Suchens keine Verbindung mit irgend einer Zelle aufweisen. Bei der Unsicherheit der Imprägnationsmethode, welche ja wie bekannt, nie alle vorhandenen Elemente darstellt, ist es sehr schwer sich über die Fasern eine sichere Anschauung zu bilden. Die Möglichkeit, dass die zugehörenden Zellen nicht imprägnirt wären, liegt immer offen; dass dieselben nicht in den Schnitt gefallen, lässt sich durch die Dicke der verwendeten Schnitte schon leichter eliminiren. Da eine andere Methode, diese Gebilde bei Kaltblütern zur Wahrnehmung zu bringen bisher nicht existirt [2]) muss die Bedeutung dieser Fasern bis auf weiteres dahingestellt bleiben. Nach meinen Präparaten zu urtheilen, möchte ich in denselben ein von den übrigen Stützzellen gesondertes Gerüst erblicken.

In den Fig. 16, 17, 19, 20 habe ich möglichst naturgetreu die einzelnen, imprägnirten Theile des Stützgerüstes der entsprechenden Regionen nach verschiedenen, einzelnen Schnitten zeichnen lassen. Hierbei wurde stets das Princip befolgt, die ganze Dicke des Schnittes zu durchmustern, welches zur Folge hatte, dass eine scheinbar reichlichere Verzweigung herauskam, als wirklich vorhanden war, wenn das Ende einer Faser dem Längsverlaufe einer anderen in anderer Ebene entsprach.

Die Fig. 17 und 19 zeigen die Neuroglia hauptsächlich in je zwei Streifen imprägnirt. Eine solche streifenweise Imprägnation ist mir oft aufgefallen, ohne dass sich irgend eine besondere Ursache auffinden liess. Ein Vergleich mit einer nicht wiedergegebenen Beobachtung, nach welcher der Centralkanal von einem ringförmigen dichtem Filz umgeben ist, lässt, wie es mir scheint,

---

[1]) v. Lenhossék. Der feinere Bau der Nervensystems im Lichte neuester Forschungen 2:te Auflage. Berlin 1895.

[2]) Die neue Weigert'sche Neurogliafärbung gelingt, wie mich zahlreiche Versuche belehrt haben, nicht an Fischen.

die Annahme solcher präformirter Filzstränge nicht ohne weiteres von der Hand weisen. Bei höheren Vertebraten ist ja dieser ringförmiger Filz um den Centralkanal herum als ein besonderer Theil des Gerüstwerkes auch angenommen. Es erscheint ja auch nur als eine natürliche Annahme, dass die Imprägnation dort mehr Elemente findet, die zur Darstellung geeignet sind, wo sie in grösserer Menge als an anderen Stellen vorkommen.

Es erübrigt nun noch den Bau der Septen im Rückenmarke der von mir untersuchten Teleostier ins Auge zu fassen. Oben ist darauf hingewiesen, dass in den langen Septen Ependymfasern, in den kurzen dagegen die Hauptausläufer der als Astroblasten bezeichneten Zellen gefunden werden, ohne dass diese jedoch die an Tinctionspräparaten gefundene Breite der Septa allein erklären können.

Nach dem, was für das Rückenmark des Menschen und der Säuger bekannt ist, war es anzunehmen, dass hier den eintretenden Blutgefässen und deren bindegewigen Hüllen eine Bedeutung zuertheilt werden müsse.

Dieses liess sich auch mit Leichtigkeit an Gefrierschnitten demonstriren, welche von Thieren stammten, die mit wässerigen Farbstofflösungen injiciert waren [1]). Dass dieses aber keineswegs die einzige Ursache des frappanten Unterschiedes in der Breite der Septa an den nach verschiedenen Methoden erhaltenen Präparaten sei, zeigten gute Imprägnationen.

In Fig. 16 ist eine Imprägnation des hinteren Septums von *Leuciscus rutilus* mit Auslassung des Ependymgerüstes wiedergegeben. Aus dieser ist zu ersehen, dass hier ein dichter und breiter Filzstreifen von sich verflechtenden feinen Fasern vorhanden ist. Diesem muss jedenfalls ein grosser Antheil bei der Bildung des Septums zuerkannt werden.

Fig. 20 stellt den Anfangstheil eines langen Septums der ventralen Hälfte des Rückenmarkes dar. Auch hier finden wir eine dichte Anlagerung feiner Fasern an den Ependymfaden.

Einen ähnlichen Bau besitzen auch die kurzen Septa.

Vergleichen wir nun zum Schlusse die oben dargelegten Beobachtungen aus dem Embryonalstadium mit denen an ausgewachsenen Thieren, so finden wir einen bedeutenden Unterschied. Nicht nur fehlen den Embryonen viele

[1]) Selbstverständlich hätten Leimlösungen bessere Präparate ergeben, der Bequemlichkeit wegen zog ich aber diese vollkommen genügende Methode zur Entscheidung dieser mehr nebensächlichen Frage heran.

Theile die am Stützgewebe des voll ausgebildeten Teleostiers einen bedeutenden und vielleicht richtiger den hauptsächlichsten Theil ausmachen, sondern auch die überall zuerst angelegten Theile zeigen wichtige und bedeutsame Verschiedenheiten.

Dass dieses der Fall ist, kann keine Verwunderung hervorrufen, da es ja schon im Begriff der Entwickelung liegt, dass ein Complettieren und Ausbilden einfach angelegter Organe erfolgt.

Mehr hervorzuheben ist der Umstand, dass die weitere Ausbildung embryonal angelegter Theile mit einer gleichzeitigen Rückbildung und einem gleichzeitigen Verluste einzelner Bestandtheile verknüpft ist. Dieses ist wie aus dem oben gesagten hervorgeht mit dem Ependymgerüst der Fall. Ohne Analogie steht diese Beobachtung allerdings nicht, wissen wir doch, dass bei den Säugern das Ependymgerüst einer Rückbildung unterliegt. Hier erreichen die einfachen Ependymfäden im embryonalen Stadium die Oberfläche des Rückenmarkes, während das erwachsene Rückenmark nur äusserst kurze Ependymfortsätze auffinden lässt.

In etwas anderer Richtung geht aber die Rückbildung der Ependymfäden bei den Teleostiern vor sich.

Wie aus meinen Präparaten von *Salmo salvelinus*, die in principiellen Theilen eine vollständige Uebereinstimmung mit denen von Retzius [1]) nach Präparaten vom Lachs gegebenen Abbildungen zeigen, hervorgeht, besitzen die embryonalen Ependymfasern zahlreiche Äste und Haare, welche vom Stammfaden entspringen. An meinen frühesten Präparaten von *Esox*embryonen sind auch kleine Verdickungen und Verzweigungen wahrzunehmen, wenn auch lange nicht so ausgesprochen wie bei *Salmo salvelinus*.

Von all diesen Anhängseln der Ependymfasern finden sich bei den verschiedenen von mir mittelst Golgi-Methode untersuchten ausgewachsenen Thieren keine Spuren mehr vor. Die Ependymfäden dieser vollständig ausgebildeten Teleostier zeigen durchwegs ein glatte Beschaffenheit ohne jegliche auch noch so feine Haare. Dass hier eine im Laufe der Entwickelung sich vollzogene *Rückbildung* stattgefunden haben muss, steht ausser jedem Zweifel.

Für diese Thatsache ist nun ein von mir bei der Beschreibung der Beobachtungen an den Embryonen erwähnter Umstand von grosser Bedeutung. Dort wurde hervorgehoben, dass im Grenzgebiet zwischem lateralen und ventralem Sector, in der ventralen Wurzelaustrittzone zuerst glatte Ependymfäden angetroffen werden. Weiter wurde noch angegeben, dass solche Fasern zuerst im

[1]) Retzius l. c.

cerebralem Ende des Rückenmarkes auftreten und erst allmälich, je grösser und mehr entwickelt das Thier wird, desto näher dem caudalen Ende, ohne jedoch in den von mir untersuchten Embryonengrössen die Cauda in allen Theilen derselben gänzlich zu erreichen.

Aus embryologischen Untersuchungen wissen wir [1]), dass sich der cerebrale Theil der Medullarinne zuerst schliesst, während der caudale noch offen ist, und daher ist wohl die Annahme erlaubt, dass sich hier im Allgemeinen früher definitive Zustände entwickeln als in dem sich später schliessenden caudalen.

Weiter geht es aus meinen unten näher zu beschreibenden Beobachtungen über die nervösen Bestandtheile des Rückenmarkes der Teleostier hervor, dass die ventralen Wurzeln sich um weniges früher als die dorsalen mit Markhüllen umgeben.

Da nun das erste Auftreten dieser glatten Ependymfäden gerade in der Austrittzone der ventralen Wurzel stattfindet und vom Kopfe gegen die Cauda vorschreitet, so geht hervor, *dass ihr Auftreten in engstem Zusammenhang mit der sich allmälich entwickelnden definitiven Beschaffenheit des Rückenmarkes steht.*

Vorläufer zu den bleibenden Astroblasten finden wir schon sehr früh in der dorsalen Hälfte des Rückenmarkes. Wie schon früher erwähnt, stelle ich dieses in Zusammenhang mit der Beobachtung, dass die zuerst offen angelegte Medullarrinne sich nicht durch Einrollung der beiderseitigen Wülste schliesst, so dass die ganze die Rinne auskleidende Zellenschicht zur Bildung des Ependymkanals verwendet wird, sondern theilweise sich aneinander lagert, wodurch natürlich diese den Ependymzellen homologe Zellen vom Centralkanal abgeschieden werden und infolge dessen eine andere Lage einnehmen. Dieselbe Auffassung ist für höhere Vertebraten schon früher von Waldeyer [2]), Corning [3]) und nach Anwendung der Golgi-Methode auch von v. Lenhossék [4]) ausgesprochen worden.

Die ersten Astrocytenformen habe ich an 40 mm langen *Esox*embryonen angetroffen.

---

[1]) Calberla's abweichende Ansicht für das Teleostierrückenmark ist schon früher berührt worden.

[2]) Waldeyer. Ueber die Entwickelung des Centralkanals im Rückenmark. Anhang zu Leyden. Ueber Hydromyelus und Syringomyelie. Virchows Arch. Bd LXVIII, 1891.

[3]) Corning. Ueber die Entwickelung der Substantia gelatinosa beim Kaninchen. Arch. f. mikr. Anat. Bd. 31, 1888.

[4]) v. Lenhossék. Zur Kenntniss der Neuroglia des Menschlichen Rückenmarkes. Anat. Anz., 1891.

Für die schon durch Nansen [1]) festgestellte Thatsache, dass das Stützgerüst ectodermaler Natur ist, bringt vorliegende Arbeit auch einige Belege, obgleich ich dieser anerkannten Thatsache nur wenig Beachtung geschenkt habe.

Die feinen Fasern, für welche kein Zusammenhang mit Zellen nachgewiesen werden konnte, mögen noch erwähnt werden. Dieselben stellten sich in meinen Präpatäten in Form eines feinen Filzes dar. Sehen wir von der Periode ab, welche die Golgi-Methode noch nicht kannte, so finden wir zur Zeit zwei verschiedene Ansichten über den Bau der Neuroglia vertreten. Die einen, und hierzu sind wohl die meisten Benutzer der Imprägnationsmethode zu rechnen, nehmen an, dass das Stützgewebe des Centralnervensystems nur aus Gliazellen und Ependymzellen bestehe, deren Strahlen den alleinigen Bestandtheil des filzigen Stützgerüstes bilden.

Die andere Ansicht stammt von Ranvier und wird durch Weigert's [2]) neue Arbeit mit eigener elektiver Methode unterstützt. Nach derselben soll im Rückenmark ein feiner, dichter Filz von Fasern vorhandensein, welcher ohne directem Zusammenhang mit den Gliazellen stände. Diese letzteren liegen den Fasern nur an.

In einer kritischen Bearbeitung der früheren Untersuchungen am menschlichem Rückenmarke kommt Reincke [3]) zu dem Resultate, dass sowohl die Ausläufer der Gliazellen, wie auch von diesen isolirte Fasersystem die Stützsubstanz bilden sollen.

Für diese letztere Ansicht stimmen die von mir an Teleostiern gefundenen Stützelemente.

Das Stützgerüst des Teleostierrückenmarkes ist, soweit mir bekannt, bisher nur von Retzius [4]), Aichel [5]) und v. Gehuchten [6]) mit der Golgi-Methode untersucht worden. Von den Arbeiten der beiden letzteren Forschern stehen mir nur kurze Referate Verfügung. Nach diesen hat Aichel an Embryonen von *Salmo*, *Trutta* und *Coregonus* mannigfaltige Ependymzellen gefunden, über v. Gehuchten's Beobachtungen an *Trutta* wurde nur gesagt, dass derselbe die

---

[1]) Nansen. Structur and Combination of the Histological Elements of the Central Nervous System. Bergen's Museums Aarsberetning for 1886 nur aus Citaten bekannt.

[2]) Weigert. Beiträge zur Kenntniss der normalen menschlichen Neuroglia. Festschrift. Frankfurt 1895.

[3]) Reincke. Beiträge zur Histologie des Menschen. Arch. f. mikr. Anat. Bd. 50, 1897.

[4]) Retzius. Biologische Untersuchungen N. F. Bd V.

[5]) Aichel. Zur Kenntniss des embryonalen Rückenmarkes der Teleostier. Sitz. Ber. Ges. Morph. Physiol. München, Bd 11, ref. in Zoologischer Jahresbericht 1895.

[6]) v. Gehuchten. La moelle épinière de la Truite (Trutta fario). La Cellule. Bd 11, ref. in Zoologischer Jahresbericht 1895.

Glia beschreibe. Ob v. Gehuchten auch erwachsene Exemplare von *Trutta fario* oder nur Embryonen untersucht hat ist nicht erwähnt.

Retzius' Untersuchungen beziehen sich hauptsächlich auf Embryonen von *Salmo salar;* er giebt indessen auch eine Abbildung eines Präparates aus der Medulla oblongata von *Esox lucius*. Diese betrifft aber nur die Ependymzellen des Dorsaltheiles. Vom Rückenmarke selber gibt er keine Abbildung sondern sagt: „Tiefer hinab in der eigentlichen Medulla spinalis konnte ich die Enden der Ependymzellen nicht weit hinaus wahrnehmen“ [1]). Dass dieses nur der Launenhaftigkeit der Methode zur Last gelegt werden muss, geht aus dem oben über dieselben noch gelungeneren Imprägnationen gesagten hervor.

In keiner dieser Arbeiten ist aber bisher *die im Laufe der Entwickelung geschehende Umwandlung der embryonalen Ependymfasern in die bestehenden gedacht worden ebensowenig wie der näheren Localisation dieses Ueberganges bei verschiedenen Grössenstadien der Embryonen.*

---

[1]) Retzius. Zur Kenntniss der Ependymzellen der Centralorgane. Biologiska föreningens Förhandlingar. Bd III, 1891.

III.

Gangliezellen im embryonalen Rückenmarke.

Am embryonalen Rückenmarke von *Salmo salvelinus* und *Esox lucius* wurde die Art der hier zu findenden Ganglienzellen ausschliesslich mit der *Cox*'schen Imprägnirung studirt. Diese Zellen lassen sich in folgende Abtheilungen ordnen:

1:o. Motorische Zellen;
2:o. Strangzellen;
3:o. Commissurenzellen:
4:o. Commissurenstrangzellen.

1) Von diesen zeichnen sich die motorischen Vorderhornzellen im Allgemeinen durch ihre Grösse aus. Ihr Zellenkörper fällt meistens durch seine plumpe Form sofort auf. Eine bestimmte Form ist demselben nicht eigen. Der Körper kann rund oder eckig sein, bisweilen sogar eine Form wie Fig. 22 zeigen, welche den von v. Lenhossék [1]) bei *Pristiurus* beschriebenen Commissurenzellen sehr ähnlich ist.

Characteristisch für diese Zellen ist das enorme Verbreitungsgebiet ihrer Dendriten. Dieselben sind auffallend kräftig, oft uneben und höckerig und stark verästelt. Wo eine solche Zelle einmal ganz oder doch zum grössten Theil innerhalb eines Schnittes liegt, sieht man, dass die Dendriten die ganze entsprechende Lateralhälfte umfassen, sowohl graue wie weisse Substanz. Auch in der Längsrichtung ist ihre Ausbreitung sehr gross. Nach Vergleich einiger aufeinander folgenden Serienschnitten kann dieselbe auf 2—3 Schnitte von 0.1 mm Dicke geschätzt werden.

---

[1]) v. Lenhossék. Beobachtungen an den Spinalganglien und dem Rückenmarke von Pristiurusembryonen. Anat. Anz. VII, 1892.

Die Dendriten entspringen meistens von einer Hervorragung am Zellenkörper, um bald darauf in zahlreiche sich wieder theilende Äste zu zerfallen. Nach meinen Präparaten endigen dieselben spitz auslaufend.

Von ihrem ventralen Ende entsenden diese Zellen ihren Neuraxon. Dieser zieht oftmals s. z. B. Fig. 21 eine Verlängerung des Zellenkörpers ein Stück mit sich fort. Von diesen Protoplasmafortsatz entspringt dann noch ein letzter, sich gewöhnlich in der lateralen Seite verästelnder Dendrit.

Was die Bahn des Axons betrifft, so strebt dieselbe ja stets der ventralen Wurzelaustrittzone zu, ohne aber darum immer einen auch nur annähernd geradlinigen Verlauf zu wählen. Solche Fälle sind ziemlich selten, s. z. B. Fig. 23. Meistens bilden sie Bogen und sogar Schlingen, ehe sie in die Austrittzone eintreten.

Ohne weiteres lassen sich zwei Anfangsportionen der vorderen Wurzeln unterscheiden. Ein Theil der Neuraxone motorischer Zellen verläuft mehr oder weniger weit lateral von den Mauthner'schen Fasern zur Austrittstelle. Einige verlaufen sogar so weit lateralwärts, dass man geneigt wäre, diese Gruppe noch in zwei Unterabtheilungen zu theilen.

Andere Zellen dagegen senden ihren Neuraxon stets erst medial von den Mauthner'schen Fasern, bevor dieselben sich lateral und ventralwärts wenden, um sich mit den Neuraxonen der ersten Gruppe zu vereinigen. Die Mutterzellen dieser Neuraxone können dabei ganz im lateralen Theil der grauen Substanz liegen oder dorsal vom Centralkanal; gewöhnlich liegen sie jedoch in selber Höhe oder ventral von demselben, s. Figg. 7, 21, 22 und 23.

Die Zellen der ersten Gruppe nehmen durchschnittlich eine mehr ventrale Lage als die der zweiten ein.

In einigen Fällen sind Dendriten beobachtet worden, welche von der gewöhnlich sich lateralwärts wendenden Mehrzahl dadurch abweichen, dass sie von der medialen Seite entspringen und in die ventrale Commissur eintreten. Eine solche Zelle ist in Fig. 7 wiedergegeben.

2) *Strangzellen* sind relativ oft imprägnirt worden. Dieselben sind in allen Theilen der grauen Substanz angetroffen; sowohl in den dorsalen Hörnern als auch in den lateralen und ventralen Abschnitten der grauen Substanz. Gewöhnlich lagen dieselben in der Nähe der Theile der weissen Substanz, wohin sie ihre Neuraxone sendeten. Dieses lässt sich mit Sicherheit allerdings nur an günstig getroffenen Längsschnitten nachweisen, da an Querschnitten der Neuraxon bald durchtrennt wird. Nach diesen zu urtheilen, treten die Neuraxone der Strangzellen vorzugsweise in die lateralen Stränge und in das hin-

tere Längsbündel ein. Doch habe ich auch in den übrigen Theilen, mit Ausnahme der Hinterstränge, Strangzellenneuraxone einbiegen sehen. Strangzellen, welche ihre Neuraxone in die lateralen Stränge eintreten lassen, zeigen die Figg. 23 und 24.

Im Allgemeinen sind die Neuraxone der Strangzellen unverästelt. Eine scheinbar reichliche Verzweigung zeigen die beiden Strangzellen der eben erwähnten Abbildungen. Diese beiden Zellen besitzen eine Birnenform. Die eine, Fig. 23, wendet ihr schmales Ende dorsolateralwärts, die zweite, Fig. 24, ventrolateralwärts. Von diesen schmalen Enden entspringt je ein kurzer, ziemlich kräftiger Stamm, der sich bald in zwei Äste theilt von welchen der eine sich wieder spaltet oder Zweige abgiebt, während der andere im weiteren Verlauf unverästelt bleibt und kurz darauf in die Längsrichtung umbiegt. Die Zelle in Fig. 24 giebt von ihrem dickerem Pol feine Dendriten ab. An der Zelle in Fig. 23 war dieses Ende glatt.

In Fig. 24 ist ausserdem im dorsalen Theil eine kleine Zelle zu sehen, welche einer besonderen Klasse anzugehören scheint. Erstens ist der im Verhältniss zu den eben erwähnten Zellen auffallend kleine Zellenkörper zu erwähnen. Von demselben entspringen in diesem Falle zwei gänzlich getrennte Ausläufer, welche, ohne sich zu verästeln, an weit von einander liegenden Stellen in die lateralen Stränge eintreten, um kurz darauf in die Längsrichtung umzubiegen. Ein dritter Fortsatz verläuft in der grauen Substanz und zerfällt hier in zwei Äste.

Die beiden ersten Ausläufer erscheinen im Schnitt vollkommen gleichwerthig, und sind wohl kaum anders als zwei Neuraxone ein und derselben Zelle zu deuten, obwohl es eigenthümlich erscheint, dass gerade Zellen dieser Art einen so äusserst winzigen Zellenkörper besitzen sollen.

Zwei Zellen, welche wohl zur selben Klasse gehören, wenngleich die spindelförmigen Körper bedeutend grösser sind, finden sich in Fig. 21 wiedergegeben. Die erstere dieser, welche in grösserer Ausdehnung in den abgebildeten Schnitt gefallen war, sendet vom dorsalen Pol einen langen, gleichmässig dicken und glatten Ausläufer bis zum dorsomedialen Rande des lateralen Stranges, wo derselbe abgeschnitten ist. Vom ventral gerichteten Pol entspringt ein etwas stärkerer Fortsatz, der sich bald in zwei Äste spaltet, von welchen der eine sich lateralwärts wendet, der andere dagegen ventralwärts verläuft, die austretenden ventralen Wurzelaxone kreutzt und in dem Vorderstrange endigt.

Die zweite, mehr medial liegende Zelle zeigt zwei kurze Fäden, welche an der medialen Seite beginnen und einen etwas längeren Ausläufer am dor-

salen Pol, der aber nur zu einem Theil in den Schnitt gefallen ist und sich nicht allzuweit verfolgen lässt. Vom ventralen Pol entspringt aber ebenso wie bei der vorigen Zelle ein kurzer, etwas stärkerer Ausläufer, der sich in zwei gleich starke Äste spaltet. Der eine Ast lässt sich bis zu dem ventralen Theile der Seitenstränge verfolgen, wo er abgeschnitten ist, der zweite ungefär ein ebenso langes Stück, ohne dass er jedoch noch in irgend einen Strang eingetreten wäre.

Ob die beiden Zellen, welche in derselben Abbildung die Wurzelaustrittzone einnehmen und je einen Neuraxon zum lateralen Strange senden, auch hierher gehören oder zu den Commisurenstrangzellen, lässt sich nicht entscheiden, da die dem anderen Pol entspringenden Ausläufer zu kurz in den Schnitt gefallen sind.

3. *Commissurenzellen* finden sich ebenfalls reichlich in der Mehrzahl der Schnitte vor. Nur ist es selten, dass dieselben in ganzer Ausdehnung in einen Schnitt fallen, wie z. B. die mehr dorsaler liegende in Fig. 25. Gewöhnlich ist das Bild der mehr ventraler liegenden, welche die Dendriten kurz am Zellenkörper abgeschnitten zeigt, dabei aber die Commissurenfaser mit ihren Verästelungen erhalten hat. Die mehr dorsal liegende hat ja auch ihre Commissurenfaser abgeschnitten, und nur durch genauem Vergleichen mit dem darauf folgenden Schnitte liess es sich entscheiden, dass diese Zelle auch wirklich hierher und nicht zur folgenden Gruppe gehörte. Aus einem Vergleich mit dem vorhergehendem Schnitt liess sich auch der Beweis erbringen, dass die weiter ventral verlaufende Faser zu einer Zelle gehörte, die im linken ventralen Horn lag.

Dieser Schnitt wurde zur Wiedergabe gewählt aus dem Grunde, weil die drei abgebildeten Theile sich gegenseitig complettiren. Die beiden Zellenkörper weichen bedeutend von einander ab, sowohl in Grösse als in Form. Noch grössere Abweichungen zeigt aber die kleine, rechts dorsal gelegene Commissurenzelle in Fig. 24. Hier ist der Zellenkörper als winzig zu bezeichnen. Die Dendriten, welche diesen Commissurenzellen entspringen, sind alle, wenigstens in den untersuchten Stadien, ziemlich wenig verästelt gewesen, obgleich einzelne Äste oft sehr lang sein können und sich weit in die weisse Substanz hinein erstrecken. Sie umfassen dadurch ein recht bedeutendes Gebiet des Rückenmarkquerschnittes, obschon sie wenigstens bei den Grössen der Thiere, die ich untersucht habe, bedeutend hinter den motorischen Zellen zurückstehen.

Ihre Neuraxone verlaufen wohl meistens in der ventral vom Centralkanal liegenden Partie des Rückenmarkes. Es finden sich aber zuweilen auch Bilder,

welche dafür zu sprechen scheinen, dass sie auch die dorsale Commissur durchlaufen, z. B. der sich rechts spaltende Axon aus dem linken Ventralkorn in Fig. 23.

Auffallend gering, im Vergleich mit Abbildungen von entsprechenden Zellen der höheren Vertebraten, ist stets die Endverzweigung des Neuraxons gewesen. Ein Zerfallen in zwei bis drei kurze und spitz auslaufende Äste, zuweilen noch die Abgabe weniger kurzer Zweige vor dem Endzerfall war der gewöhnliche Befund.

Während die Axone in dem ventral vom Centralkanal liegenden Theil sich zur anderen Seite hinüber begeben, halten dieselben keine bestimmte Bahnen inne. Man findet die Neuraxone in der ventralen Commissur, in der accessorischen oder Mauthner'schen Commissur, aber auch in den ventral und dorsal von letzterer verlaufenden Strängen.

Bei *Esox* ist die Mauthner'sche oder accessorische Commissur schon sehr früh ihrer Lage nach aufzufinden, wie es z. B. aus den später zu beschreibenden Abbildungen Weigert'scher Markscheidenfärbungen besonders hervorgeht. Aber auch die *Cox*-Präparate erlauben ein Auffinden derselben. Es ist daher mit grosser Leichtigkeit nachzuweisen, dass eine grosse Zahl der ventralwärts vom Centralkanal verlaufenden Neuraxone sich keineswegs an die accessorische Commissur halten.

In der ventralen Commissur habe ich ausser einzelnen seltenen, von der einen Seite zur andern hinüberziehenden Neuraxonen auch Dendriten, speciell der motorischen Zellen gefunden.

4) Die *Commissurenstrangzellen* scheinen unter den imprägnirten Zellen nächst den motorischen das grösste Contingent zu stellen. Dieselben stimmen theilweise ganz und gar mit den Commissurenzellen überein, was Zellenkörper, Dendriten und Verlauf des Neuraxons anbelangt.

Andererseits zeigen sie aber manchmal viel reichere Dendriten, und oftmals entspringen auch von ihrem Neuraxon noch weit im Verlauf feine Äste, von welchen es dahin gestellt werden muss, ob dieselben als vorgeschobene Dendriten oder als Collateralen aufzufassen sind. Dem grösseren Theil bin ich geneigt, erstere Beschaffenheit zuzutheilen, weil dieselben ziemlich dick sind, sich kurz nach ihrem Abgang in einzelne Äste aufspalten und der Axon nach ihrem Abgang verjüngt erscheint.

Relativ oft spaltet sich ihr Neuraxon, auf der anderen Seite angelangt, in zwei oder sogar drei Äste die an verschiedenen Stellen in die Längsrichtung übergehen.

Dieselben treten nach meinen Präparaten in alle verschiedenen Theile der weissen Substanz ein, und biegen in die Längsrichtung über.

Eine Gruppe dieser Zellen, scheint eine etwas genauere Erwähnung zu verdienen. Dieses sind kleine Zellen, welche ihre Lage in der Wurzelaustrittzone oder in der Commissura accessoria haben. In allen Gebieten der Mauthner'schen Commissur, von der einen ventralen Wurzelaustrittzone zur anderen, werden dieselben vereinzelt angetroffen. Stets ist ihr Zellenkörper klein, rund oder birnförmig.

Die Dendriten derselben sind lang, unverästelt und wenden sich beinahe immer lateralwärts; sehr selten ist eine mediale Richtung, wie z. B. in Fig. 23 an denselben zu contatieren.

Ihre Neuraxone habe ich zur Wurzelaustrittzone der entgegengesetzten Seite verfolgen können, nur wenige Male habe ich dieselben sich hier dorsalwärts wenden sehen. Oft endigen dieselben auch kurz abgeschnitten im Bereich des hinteren Längsbündels der entgegengesetzten Seite.

Im Zusammenhang hiermit müssen einzelne Fasern die mehrfach angetroffen worden sind, erwähnt werden. In relativ zahlreichen Präparaten finden sich kurze Fasern, welche aus der Commissura accessoria schräg in der Richtung der ventralen Wurzeln verlaufen. In Fig. 23 ist eine solche Faser oder Axon, die einer der eben erwähnten kleinen Zellen entstammt gezeichnet. Dieselbe tritt hier in das austretende Axonbündel der ventralen Wurzel ein, um kurz vor dem Austritt zu endigen.

Auf Fig. 7 finden wir eine Faser, welche dem ventralen Horn der entgegengesetzten Seite entstammt, durch die Commissura accessoria läuft, und in der entgegengesetzten Wurzelaustrittzone das Rückenmark verlässt. Leider gelang es nicht bei der sehr reichlichen Imprägnation der anliegenden Serienschnitte, die Fortsetzung dieser Faser mit absoluter Sicherheit festzustellen.

Diese Fasern sind sehr schwer zu deuten aus dem Grunde, dass von den meisten Forschern, besonders denen, die mit der Golgi-Methode gearbeitet haben, ein gekreutzter Ursprung der ventralen Wurzeln absolut in Abrede gestellt wird, z. B. Kölliker [1]) und v. Lenhossék [2]).

Stieda [3]) unterscheidet bei Knochenfischen drei Ursprungsbündel der vorderen Wurzel, ein laterales, ein centrales und ein Commissurenbündel. Dieses

[1]) Kölliker. Handbuch der Gewebelehre des Menschen. Zweiter Band. Leipzig 1896.

[2]) v. Lenhossék. Der feinere Bau des Nervensystems. Zweite Auflage. Berlin 1895.

[3]) Stieda. Ueber den Bau des Rückenmarkes und einzelner Theile des Gehirnes von Esox lucius. I. D. Dorpat 1861 und Studien über das centrale Nervensystem der Knochenfische. Zeitschrift für wiss. Zoologie Bd XVIII. 1868.

letztere führt seiner Ansicht nach der ventralen Wurzel Axencylinder von den motorischen Zellen des entgegengesetzten Ventralhornes zu, also gekreuzte Fasern.

Andere Forscher, z. B. Schaffer [1]), welcher mit der Weigert'schen Markscheidenfärbung gearbeitet hat, nimmt für die von ihm untersuchten Reptilien, einen solchen gekreutzten Ursprung an. Seine Ansicht wird aber von Kölliker [2]) auf die angewandte Methode zurückgeführt und als unrichtig bezeichnet.

Grünbaum [3]) hat aus gewissen Degenerationserscheinungen auf einen gekreutzten Ursprung geschlossen. Seine Originalarbeit ist mir leider nicht zugängig gewesen.

Edinger [4]) huldigt auch der Ansicht, dass die motorischen Wurzeln einen theilweise gekreutzten Ursprung haben. Er sagt S. 62 über die Ursprungsverhältnisse der motorischen Wurzeln „Wollen Sie nur festhalten, dass in dem ventraler liegenden Rückenmarksgrau lange Säulen von Ganglienzellen liegen, deren Axencylinder zum grösseren Theil in die Wurzeln der gleichen, zum geringerem in diejenigen der gekreuzten Seite hinaus gelangen".

Béla Haller [5]) vertritt ebenfalls mit Entschiedenheit den theilweise gekreuzten Ursprung der ventralen Wurzeln und zeichnet denselben auch nach Golgi-Präparaten z. B. in Fig. 30.

Bei niederen Thieren ist ein gekreuzter Ursprung der peripheren Nerven verschiedentlich erwiesen. Ich verweise hierbei nur auf die Untersuchungen von Retzius [6]) an *Astacus fluviatilis* und *Lumbricus terrestris*. Aus den gegebenen Abbildungen, die eine nach Anwendung der Methylenblaumethode, die andere nach der Golgi-Methode, geht es zur vollen Evidenz hervor, dass hier ein gekreuzter Ursprung der peripheren Nerven stattfindet. Besonders beweisend ist die Abbildung von *Lumbricus*.

Dass diese von mir gefundenen Fasern wirklich einen gekreuzten Ursprung der ventralen Wurzeln darstellen können, scheint mir besonders nach den Befunden an niederen Thieren, wo das Nervensystem über dies viel leichter zu übersehen ist als bei den Vertebraten, gar nicht unmöglich. Zum wenigsten

---

[1]) Schaffer. Vergleichend anatomische Untersuchung über Rückenmarksfaserung. Arch. f. mikr. Anat. Bd 38.

[2]) Kölliker l. c.

[3]) Grünbaum. Journal of Physiology. Vol. XVI 1894 n. v. Lenhossék l. c. citirt.

[4]) Edinger. Vorlesungen über den Bau der nervösen Centralorgane. 5:te Auflage. Leipzig 1896.

[5]) Béla Haller. Untersuchungen über das Rückenmark der Teleostier. Morphologisches Jahrbuch, Bd 23, 1895.

[6]) Retzius. Biologische Untersuchungen N. F. Bd I, Tafel IV und Bd III, Tafel I.

möchte ich aber hervorheben, dass der von v. Lenhossék gesperrt gedruckte Satz [1]) „Ein solcher gekreuzter Ursprung besteht bei keinem Wirbelthier" und der in der Note derselben Seite angeführte „Die vorderen Wurzeln haben *gewiss* keinen gekreuzten Ursprung und es muss eben für jene Degenerationen eine andere Erklärung gesucht werden" bei Erwähnung von Grünbaum's Arbeit jedenfalls verfrüht sind.

Fasern wie sie Aichel [2]) aufgefunden hat und welche „von aussen durch die ventrale Wurzel in das Rückenmark eintreten, sich in der grauen Substanz zersplittern und wahrscheinlich sympathisch sind" habe ich nie imprägnirt erhalten. Mit den oben erwähnten lassen dieselben sich ja wohl nicht identificiren, da sonst die Kreuzung derselben im Referat wohl hervorgehoben wäre.

---

[1]) l. c. Seite 248.

[2]) Aichel. Zur Kenntniss des embryonalen Rückenmarkes der Teleostier. Sitz. Ber. Ges. Morph. u. Physiol. München 11. Bd cit. n. Zoologisches Jahrbuch 1895.

IV.

Die Nervenzellen des ausgewachsenen Rückenmarkes.

Zu diesen Untersuchungen dienten hauptsächlich Rückenmarke von *Leuciscus rutilus* und *Perca fluviatilis*. Es ergaben sich bei einem ersten Vergleich von Schnitten verschiedener Arten der Hauptsache nach so grosse Uebereinstimmungen in den wichtigeren Anordnungen der Ganglienzellen, dass eine detaillirte Beschreibung der verschiedenen Arten, jede für sich, als unnöthig erschien. Ziemlich genau sind aber doch noch *Esox lucius*, *Acerinus cernua* untersucht worden, weniger genau *Gasterosteus aculeatus*, *Salmo trutta* und *Anguilla vulgaris*.

Das Material zu diesen Untersuchungen wurde entweder in absolutem Alkohol oder in Sublimat fixirt und gehärtet. Um möglichst sicher zu gehen wurde das Rückenmark nicht aus dem Rückgradskanal vor der Fixirung herausgenommen sondern nur die Weichtheile von der Wirbelsäule entfernt, die Kopfkapsel zur Freilegung der dorsalen Seite des Gehirns eröffnet und dann das Präparat in die gewählte Fixirungsflüssigkeit gehängt. Nach Sublimatfixirung wurde das Sublimat durch Zusatz Lugol'scher Lösung zu dem 50 % zur ersten Nachhärtung benutzten Alkohol entfernt.

Leuciscus rutilus.

Bei einem flüchtigen Durchmustern verschiedener Querschnitte, besonders aber an Serien, fällt sofort der verschiedene Reichthum an Zellen und auch sonst die wechselnde Beschaffenheit, besonders der ventralen Hälfte, auf.

Zu verschiedenen Zwecken habe ich mich der v. Gieson'schen Doppelfärbung, der gewöhnlichen Nissl'schen Methylenblaufärbung und schliesslich letz-

terer mit einer Nachfärbung mit äusserst verdünnter, wässeriger Säurefuchsinlösung bedient [1]).

An Schnitten, welche nach v. Gieson gefärbt sind, tritt die graue Substanz und die Commissura accessoria scharf hervor. Oftmals ist die letztere nur wenig ausgebildet und dann hauptsächlich in den lateralen Theilen derselben. Sie kann aber an Schnitten, welche in die Mitte des Abschnittes zwischen zwei aufeinander folgenden, ventralen Wurzeln gefallen sind, sogar so weit verschwunden sein, dass nur dem nach ihr besonders sorgfältig suchendem Auge eine wahrnehmbare Andeutung sich darbietet.

Aber auch Schnitte, welche mit Nissl's Methylenblaufärbung gefärbt sind, zeigen bedeutende Unterschiede. Diese Färbung ist durch ihre prägnante Tinction der chromatophilen Elemente der Nervenzellen, bei kaum schwach wahrnehmbarer Färbung der übrigen Zellen, besonders geeignet, die Anordnung der Ganglienzellen sichtbar zu machen. Oft aber kamen Schnitte zur Beobachtung, die nur einzelne oder überhaupt keine Andeutung von Nervenzellen zeigten, obgleich Ependymzellen und sonstige Zellen durch ihre Färbung deutlich annehmen liessen, dass die Entfärbung jedenfalls nicht zu weit getrieben war.

An Säurefuchsin-Methylenblauschnitten liess sich nachweisen, dass in solchen Schnitten auch die Commissura accessoria beinahe fehlte.

Noch auf einen anderen Umstand muss in diesem Zusammenhang hingewiesen werden.

Die Ganglienzellen, welche an einzelnen Schnitten gefunden wurden, stimmten sehr oft weder in Form noch Grösse überein.

Zuweilen lagen die tingirten Zellen in der Nähe des Centralkanals; ein anderes Mal war diese Region wieder ganz frei von Zellen, während Nervenzellen in anderen Theilen des Querschnittes tingirt waren.

Bei Benutzung von Schrägschnitten zeigte sich eigentlich stets eine grosse Verschiedenheit in Bezug auf die Ganglienzellen der beiden Hälften; oft war sogar die eine Hälfte ohne Nervenzellen während solche in der anderen reichlich vorhanden waren.

Dieses ist auch Stieda [2]) aufgefallen. Er schreibt „Die Zahl der Nervenzellen ist auf Querschnitten sehr wechselnd. Beim Hecht, beim Barsch, Wels und verschiedenen Cyprinenarten finde ich durchschnittlich 8—10 auf jeder

---

[1]) Letztere ist mir erst spät durch eine zufällige Verunreinigung bekannt geworden. Dieselbe beseitigt einen Uebelstand der Nissl'schen Methode, dass nämlich weisse und graue Substanz schwer zu trennen sind.

[1]) Stieda. Studien über das centrale Nervensystem der Knochenfische. Zeitschrift für wiss. Zoologie, Bd 18. 1868.

Seite, bedeutend vermehrt ist jederseits die Zahl sobald die Wurzeln getroffen sind; doch betrifft die Vermehrung, dann nur die Gruppe der Unterhörner, während die centrale ganz unverändert bleibt".

Beim Aale und bei der Quappe kommen nach ihm auch gänzlich zellenfreie Abschnitte vor.

Indem ich diesen letzteren Ausspruch für den Aal bestätigen kann, will ich nur hervorheben, dass, wie schon erwähnt, solche zellenfreie Abschnitte auch bei den anderen von mir untersuchten Arten vorkommen.

Aus diesen Beobachtungen lässt sich nun ohne weiteres schliessen, dass die bei den höheren Wirbelthieren angenommene Segmentation des Rückenmarkes bei den Teleostiern in weit ursprünglicherer Ausbildung besteht.

Diese Segmentation ist streng an das Auftreten der ventralen Wurzeln gebunden. Sowohl die accessorische Commissur als auch das Auftreten von Nervenzellen aller Arten, ist in Schnitten, welche die vordere Wurzelaustrittzone getroffen haben, am meisten ausgesprochen.

Aber auch im dorsalen Theil des Rückenmarkes macht sich eine entsprechende Eintheilung in Segmente geltend, wenngleich nicht ganz so scharf ausgesprochen. An einzelnen Schnitten finden sich nämlich in dem Theile der Dorsalhörner, der als Uebergangstheil vom centralen Grau in dieselben bezeichnet werden kann, einzelne grosse Ganglienzellen vor. In Fig. 26 *a* ist ein Weigert-Präparat von *Salmo trutta* wiedergegeben, welches zwei solche Zellen, eine zu jeder Seite, zeigt. Die Fig. *b* und *c* zeigen diese Zellen bei stärkerer Vergrösserung. Die gleiche Anordnung findet sich auch an den anderen untersuchten Arten.

Auf diese einzelnen, grossen Zellen im Dorsalhorn hat Rohon [1]) schon für die Forelle früher hingewiesen.

Ebenso ist das Auftreten kleiner und mittelgrosser Nervenzellen keineswegs in den dorsalen Hörnern aller Schnitte gleich, obwohl es mir nicht vollkommen gelungen ist für diese ein regelmässiges Verhältniss zu den dorsalen oder ventralen Wurzeln festzustellen. Auf einen solchen Zusammenhang deuten aber viele meiner Schnitte hin.

Nach den Resultaten der Nissl'schen Methylenblaufärbung lassen sich verschiedene Arten der Ganglienzellen unterscheiden und zwar sowohl nach der Anordnung und Beschaffenheit der chromatophilen Elemente, wie nach ihrem Vermögen, den Farbstoff bei der Entfärbung festzuhalten. Als erste Form mag die dargestellt werden, welche von den grauen motorischen Vorderhorn-

[1]) Cit. nach Kölliker. Handbuch der Gewebelehre des Menschen, 2:ter Bd. Leipzig 1896.

zellen gebildet wird und zu welcher auch die grossen dorsolateral vom Centralkanal liegenden gehören. Diese zeigen eine sehr grobe Beschaffenheit der chromatophilen Elemente. Die Anordnung derselben wechselt bedeutend je nach der Richtung, in welcher die Zelle im Schnitt getroffen ist.

Wenn der Schnitt die Längsachse der Zelle quer getroffen hat, so findet man um den grossen, bläschenförmigen Kern herum concentrisch angeordnete, tief blauschwarz tingirte, unregelmässig geformte Körner. Ist der Schnitt in die Längsrichtung der Zelle gefallen und besonders, wenn einer der grossen Dendritenursprünge auch der Länge nach sichtbar ist, so sind die chromatophilen Körperchen um den Kern herum allerdings noch concentrisch gelagert, ordnen sich aber gegen den Dendritenursprung hin in Längsreihen, welche convergiren. In diesen Längsreihen erscheinen die chromatophilen Elemente als an einander gereihte kurze Stäbchen.

Zellen mit ähnlich angeordneten chromatophilen Elementen und von ungefär gleicher Grösse liegen einzeln in den Anfangstheilen der dorsalen Hörner.

Noch zwei weitere Arten von Zellen lassen sich nach der Beschaffenheit der chromatophilen Elemente unterscheiden.

Die erste von diesen zeigt bei der gleichen Entfärbung stets viel hellere Granula, welche nebenbei noch durch relativ grosse, farblose Zwischenräume getrennt sind. Die chromatophilen Körper sind meistens hier von ziemlich gleicher Grösse, rund oder eckig. Diese Art Zellen habe ich nur in den Hinterhörnern entdecken können.

Die letzte und zahlreichste Klasse der Nervenzellen lässt sich am leichtesten entfärben. Am deutlichsten sind dieselben, wenn die Entfärbung nur so weit getrieben ist, dass die Zwischenräume zwischen den chromatophilen Elementen der grossen Vorderhornzellen eben anfangen, sichtbar zu werden. Dieselben besitzen äusserst feinkörnige, chromatophile Elemente, welche bei richtiger Entfärbung, der Zelle eine gleichmässige, hellblaue Farbe verleihen. Bei Anwendung schärferer Vergrösserungen lassen dieselben sich aber in feine blaue Körner auflösen, zwischen welchen gänzlich entfärbte Zwischensubstanz zu Tage tritt.

Ebenso wie bei höheren Thieren ändert sich die Anordnung dieser Elemente, wenn ihre Zellen durch irgend einen ihren Neuraxon betroffenen Insult geschädigt worden sind. Dieselben nehmen alsdann eine zusammengesinterte Beschaffenheit an und lassen sich auf den ersten Blick von den nicht alterirten Zellen trennen. Von dieser experimentell constatirten Eigenschaft ist in vorliegender Arbeit aber keine weitere Anwendung gemacht.

Ausser der oben erwähnten Segmentanordnung aller Zellen, wodurch grosse Gruppen im Rückenmark getrennt werden können, lassen sich noch leicht innerhalb derselben kleine Gruppen unterscheiden. Dieses nicht nur auf Grund ihrer Lage im Querschnitt, sondern besonders auch nach ihrem Verhalten in der Längsrichtung.

Das richtigste wäre wohl, hier dieselbe Eintheilung durchzuführen wie oben bei der Beschreibung der mittelst GOLGI-Methode aufgefundenen Zellen an den Embryonen. Ein solcher Versuch scheitert aber daran, dass diese Methode bei den Erwachsenen nicht Resultate giebt, und bisher keine Experimente vorliegen, auf welche man sich durch die erzeugten Degenerationen stützen könnte. Bis auf weiteres muss man sich daher mit einer topographischen Eintheilung begnügen.

Für eine solche Gruppirung ist es nun von grosser Bedeutung, dass verschiedene Schnitte verschiedene Gruppen von gleichartigen Nervenzellen zeigen. Dieses tritt auch an Schrägschnitten hervor, indem die beiden Hälften ein wechselndes Aussehen darbieten.

Grosse Zellen mit reichliche Dendriten lassen sich besonders an drei Stellen des Querschnittes in ziemlich begränzten Gruppen auffinden.

1:o Eine Gruppe liegt in dem Theil des Ventralhornes, welcher das laterale Ende derselben bildet, und ist wohl am besten als *laterale grosszellige Gruppe* zu bezeichnen.

2:o Eine zweite Gruppe findet sich in der Nähe des Centralkanals und umfasst denselben von der ventralen und lateralen Seite, *mediale grosszellige Gruppe.*

3:o Die dritte Gruppe liegt dorsolateral vom Centralkanal theils im centralen Grau, theils auch in dem hier von der grauen Substanz gebildeten Maschenwerk, *dorsolaterale grosszellige Gruppe.*

4:o Ausserdem finden sich vereinzelte grosse Zellen am Anfang der Dorsalhörner, *dorsale grosse Ganglienzellen.*

5:o Zellen mittlerer Grösse, oft ausgesprochen birnenförmig, nehmen im ventralen Horn eine Lage zwischen der medialen und lateralen grosszelligen Gruppe ein, *mittlere Gruppe des Ventralhornes.*

6:o Kleine Nervenzellen findet man an der Spitze des Ventralhornes; einzelne sind zuweilen ganz bis zur äusseren Peripherie verschoben, *laterale kleinzellige Gruppe.*

7:o Als besondere *ventrale Zellen* müssen noch diejenigen Nervenzellen unterschieden werden, welche, unter sich nicht ganz gleichartig, in der Commissura accessoria und den ventralen Strängen angetroffen werden.

8:o Die in den Dorsalhörnern zerstreut liegenden Ganglienzellen, die etwas grösser als diejenigen der lateralen kleinzelligen Gruppe sind, können als *kleinzellige Gruppe der Dorsalhörner* unterschieden werden.

Ausserdem findet man noch zahlreiche kleine Ganglienzellen zerstreut vor, die sich nicht einer der erwähnten Gruppen einreihen lassen.

Perca fluviatilis.

Das Rückenmark von *Perca fluviatilis* unterscheidet sich dadurch im Querschnittsbilde von dem von *Leuciscus rutilus*, dass der dorsale Theil bedeutend mehr abgeflacht ist. Das dorsale Septum ist viel breiter als bei *Leuciscus* und besonders der dorsale in das Rückenmark hereintretende Keil viel mehr ausgebildet. Derselbe entfernt hierdurch die beiden Hälften des Rückenmarkes ziemlich weit von einander, wie es aus Figg. 28 und 29 hervorgeht.

Die dorsalen Hälften des Rückenmarkes nehmen hierbei eine schmälere abgerundete Form an.

Im ganzen gilt das über *Leuciscus* gesagte auch für *Perca*, nur mag bemerkt werden, dass an dem dorsalen und lateralen Theil des Ventralhornes eine noch mehr ausgebildete reticuläre Substanz sich anschliesst.

Die angetroffenen Zellen und die Gruppirung derselben stimmen in ihren Hauptzügen mit dem oben gesagten überein. Ganz so deutlich wie bei *Leuciscus* ist allerdings die Gruppenbildung der Nervenzellen nicht durchgeführt. Zellen, die sich einer der erwähnten Gruppen nicht einreihen lassen, sind sehr oft anzutreffen.

In Uebereinstimmung mit dieser grösseren Unregelmässigkeit der Zellengruppirung steht auch das Vorkommen von zahlreichen Nervenzellen in den Vorder- oder richtiger Ventralsträngen, wie es Fig. 27 zeigt. Aus derselben geht hervor, dass hier von einem vereinzeltem Auftreten bei *Perca* nicht mehr gesprochen werden kann.

Derartige Nervenzellen lassen sich mit ganz seltenen Ausnahmen in beinahe allen Schnitten auffinden und liegen dabei vollkommen unregelmässig. Oft ist die Mehrzahl derselben ganz bis an die ventrale Peripherie hinausgeschoben und liegen dieselben dann dem Endkeil des ventralen Septums an. In anderen Schnitten ist die Peripherie der ventralen Wurzelaustrittzone Sitz für diese Zellen ohne dass dieselben dann in einem Ausläufer der grauen Substanz liegen. Manchmal ist dieses jedoch der Fall, und die scheinbar zu den in Frage stehenden Zellen gehörenden, sind in Wirklichkeit einer der *lateralen*

Gruppen zuzutheilen. Auch zwischen den Nervenfasern der hinteren Längsbündel können diese Zellen sich einnisten.

Von denselben sind die Zellen, welche innerhalb der Commissura accessoria liegen, vielleicht abzutrennen, da dieses Gebiet eigentlich einen Theil darstellt, der bei höheren Vertebraten mit der Commissura anterior seu ventralis verschmilzt. Der Einfachkeit halber habe ich dieselben aber der *ventralen* Gruppe zugezählt. In Fig. 27 ist zufällig keine dieser Zellen vorhanden.

Ein Lieblingssitz dieser Zellen ist die Kreuzung der accessorischen Commissur mit dem Septum ventralis.

Wir ersehen aus dem Gesagten, dass das ganze ventral vom Centralkanal liegende Stranggebiet, welches an den Seiten von den ventralen Wurzeln und den ventralen Hörnern begrenzt wird, Nervenzellen aufzuweisen vermag.

Aber nicht in den Vordersträngen allein können von der grauen Substanz vollständig geschiedene Ganglienzellen auftreten. Auch die lateralen Stränge besitzen solche Zellen. Hier ist der Entscheid, ob nicht ein Theil des Maschenwerkes grauer Substanz sich bis an die einzelnen Nervenzellen erstreckt und dieselben dennoch innerhalb des Rückenmarkgraues lägen, mit vielen Schwierigkeiten verknüpft. Durch Benutzung verschiedener Tinctionsmethoden und theilweise auch von Serienschnitten glaube ich aber dieses mit Sicherheit für viele ausschliessen zu können.

Drei aneinander gelagerte Zellen dieser Art zeigt Fig. 28 *a*. Dieselbe ist nach einem einfachen NISSL-Präparat gezeichnet worden.

Um sicher zu gehen, dass diese Zellen nicht in der reticulären Substanz lägen, wurde dieser Schnitt, nachdem die Zeichnung angefertigt war, vorsichtig vom Objectglase abgelöst und nach Entfernung des Balsams mit Säurefuchsin nachgefärbt. Dabei liess sich auch nicht das Geringste auffinden, welches für einen Zusammenhang mit der grauen Substanz spräche. Ein Zusammenhang mit derselben in longitudinaler Richtung ist allerdings hierdurch noch nicht ausgeschlossen, aber an Serienschnitten habe ich mich vergeblich abgemüht für andere Zellen derselben Natur einen solchen Zusammenhang aufzufinden und halte mich daher berechtigt zu der Annahme, dass diese Zellen vollständig isolirt zwischen längsverlaufenden Nervenfasern liegen.

Eine dicht an der Peripherie links oben liegende Zelle zeigte derselbe Schnitt ebenfalls. Auch hier war eine vollkommene Isolirung von dem reticulärem Gewebe nachzuweisen.

Ueber die Natur dieser Zellen können nun allerdings einige Zweifel entstehen, und war es Anfangs nicht ganz leicht, sich über dieselbe eine sichere Ansicht zu bilden.

Für die Annahme, dass wir es hier mit Nervenzellen zu thun haben, spricht in erster Hand, die scharfe, sogar langer Entfärbung widerstrebende Tinction chromatophiler Elemente, der bläschenförmige beinahe farblose Kern und die scharfe blauschwarze Farbe des Kernkörperchen bei Nissl'scher Methylenblaufärbung. In ganz derselben Weise stellen sich bei gewissen Schnittrichtungen sonst nur die motorischen Ganglienzellen der ventralen Hörner dar.

Ausserdem ist noch die eckige Form derselben hervorzuheben, die sich sehr gut mit abgeschnittenen oder entfärbten Dendriten vereinigen lässt. Bei stärkerer Vergrösserung sind diese Zellen in Fig. 28 *b* wiedergegeben.

Hierzu kommt noch, dass an einem Exemplar von *Perca*, dem das Rückenmark unterhalb der Rückenflosse durchtrennt war und welches am 5:ten Tage getödtet wurde, an Zellen derselben Art im oberen Drittel des Rückenmarkes bei derselben Färbung eine klumpenförmige Anordnung der chromatophilen Elemente zufällig gefunden wurde. Diese Veränderung unter ähnlichen Umständen ist bisher nur an Ganglienzellen, aber hier auch constant gefunden worden.

Am Teleostierrückenmark habe ich dieses sonst nur an motorischen Zellen gefunden, nachdem die entsprechenden ventralen Wurzeln einige Tage vorher durchtrennt waren, ein Nebenbefund bei zu anderen Zwecken unternommenen Experimenten.

Ähnlich gelagerte Zellen, aber bedeutend weiter ventralwärts im Rückenmark hat Burckhardt [1]) bei einem Dipnoer *Protopterus annectens* gefunden und sind seine Beobachtungen von Kölliker [1]) bestätigt worden. Dieselben bilden ebenso, wie die von mir bei *Perca fluviatilis* gefundenen, eine discontinuirliche Längsreihe. Allerdings treten dieselben stets in den Querschnitten nur einzeln auf, was als das regelmässigere aber auch für *Perca* gilt. Gruppen mehrerer, wie die Abbildung Fig. 28 eine zeigt, sind äusserst seltene Befunde, daher wurde auch eine solche zum Abbilden genommen.

Diese Zellen sind von Burckhardt als Gliazellen aufgefasst worden. Kölliker scheint sich dieser Auffassung nicht unbedingt anschliessen zu wollen, nach eigenen Untersuchuegen rechnet er dieselben aber zu den Nervenzellen, ohne sich jedoch entschieden über diesen Punkt auszusprechen.

Béla Haller [2]) beschreibt auch von *Esox* in den weissen Strängen liegende Ganglienzellen. Da nach ihm aber ein allgemeines Nervennetz bestehen

---

[1]) Kölliker. Handbuch der Gewebelehre. Zweiter Bd. Leipzig 1896.

[2]) B. Haller. Untersuchungen über das Rückenmark der Teleostier. Morphologisches Jahrb. Bd 23, 1895.

soll geht er nicht auf ihr Verhalten zu dem reticulären Netzwerk grauer Substanz ein.

Reissner [1]) bildet von *Petromyxon fluviatilis* in seinen Figg. 1 und 5 *b* ebenfalls Ganglienzellen ab, welche in den Strängen liegen und bei *Amphioxus* soll eine wirkliche Trennung zwischen Strängen und grauer Substanz noch nicht eingetreten sein.

Sollte es daher allzu gewagt sein diese Anordnung als ein Rest aus Zeiten einfacherer Organisation aufzufassen?

Eine ganz besondere Beachtung verdienen aber entschiedene Ganglienzellen, welche weder in der grauen noch weissen Substanz liegen, aber innerhalb der Hüllen des Rückenmarkes. Dieser dem Rückenmark s. z. s. aufliegenden Zellen habe ich in einer vorläufigen Mittheilung [2]) vor Kurzem erwähnt. Dieselben habe ich bei keinem der untersuchten Weichflosser gefunden und auch in früheren Arbeiten dieselben vergeblich gesucht. Bei Edinger [3]) habe ich folgenden Satz gefunden, der sich vielleicht hierauf beziehen könnte: „So giebt es eine Gruppe mächtiger derartiger (echte Ganglienzellen) Zellen an der Peripherie der Dorsalstränge der Cyclostomen und bei einigen Fischen *„Dorsalzellen“* —“. Wahrscheinlicher erscheint es jedoch, dass damit Dorsalzellen anderer Natur gemeint werden, auf welche ich weiter unten zurückkommen werde.

Dagegen hat Dahlgren [4]) bei Anacanthinen vor Kurzem Zellen gefunden, die auch bei den ausgewachsenen Thieren vorhanden sind und ihrer Lage noch mit den in Rede stehenden übereinstimmen.

Diese fraglichen Zellen sind bei ausgewachsenen Exemplaren von *Perca fluviatilis* und *Acerina cernua* von mir gefunden worden.

Diese Zellen liegen bei den drei genannten Arten innerhalb des breiten Keiles, den das dorsale Septum kurz vor der Insertion an die Rückenmarkshüllen bildet.

Bei *Perca* sind dieselben meistens ungefär in der Mitte dieses Keiles anzutreffen. Sie sind von kleinkernigen, spindelförmigen Zellen umgeben, welche eine Art von Kapsel um sie herum zu bilden scheinen. Die Kerne der Kap-

---

[1]) Reissner. Beiträge zur Kenntniss vom Bau des Rückenmarkes von Petromyxon fluviatilis. Müllers Archiv. 1860.

[2]) Kolster. Ueber bemerkenswerthe Ganglienzellen im Rückenmark von Perca fluviatilis. Anat. Anz., Bd XIV. 1898.

[3]) Edinger. Vorlesungen über den Bau der nervösen Centralorgane. Fünfte Auflage. Leipzig 1896,

[4]) Dahlgren. The Giant Ganglion Cells in the Spinal Cord of the Order Heterosomata Cope (Anacanthini Pleuronectoidei Guenther). Anat. Anz., Bd XIII. 1897.

selzellen nehmen bei Nissl'scher Färbung den Farbstoff sehr reichlich an und erscheinen tiefblau gefärbt. Bisweilen sind diese Kapselzellen auch nicht sichtbar, weder sind ihre Kerne, noch ist ihr hell tingirtes Protoplasma aufzufinden, dagegen lässt sich aber beinahe stets in solchen Präparaten ein schwarzblau gefärbter Saum um die Zelle herum wahrnehmen.

Die Zelle selber, Figg. 29 und 30, hat eine lang gestreckte ovale Form und liegt mit der Längsaxe in dorsoventraler Richtung. Der Kern ist gross und bläschenförmig und liegt ebenfalls mit dem Längsdurchmesser dorsoventral. Derselbe liegt meistens am oberen Pol der Zelle, manchmal auch excentrisch an einer der beiden Seiten, stets aber dem dorsalen Ende der Zelle näher als dem ventralen. Der Kern besitzt ein relativ grosses Kernkörperchen, welches eine blauschwarze Farbe zeigt und stets im Kern nach derselben Seite, wie der Kern in der Zelle, verschoben liegt.

Gewöhnlich verläuft ein kleines Blutgefäss dicht an der Zelle vorbei.

Der Zellenkörper besitzt scheinbar eine homogene Beschaffenheit, lässt sich aber bei Anwendung starker Vergrösserungen in Körner auflösen, Fig. 31. Solche Körner habe ich nie an der peripheren Seite des Kernes gefunden, sondern scheint derselbe stets mit der Contour der Zelle zusammenzufallen. Auch an der dem Zellenleib zugekehrten Seite des Kernes fehlen die chromatophilen Elemente, so dass der Kern innerhalb eines hellen Hofes zu liegen scheint.

Einen ebensolchen hellen, halbmondförmigen Raum findet man am ventralen Ende der Zelle. Derselbe erscheint nicht in allen Einstellungen rein peripher. So zeigt z. B. Fig. 31 die rechte Hälfte desselben ein wenig in das dunkelgefärbte Protoplasma hineinragend.

Das ventrale Ende dieses helleren Halbmondes setzt sich in einen Ausläufer von gleicher Farbe fort, der ungefär 1—2 Zellenlängen ventralwärts verläuft, um darauf in die Längsrichtung umzubiegen.

Bei der recht bedeutenden Grösse dieser Zellen, kann es nicht befremdlich erscheinen, dass dieselben oft ohne Kern im Schnitt zu sein scheinen und sich nur als runde oder ovale Gebilde darstellen. In solchen Schnitten sind meistens die als Kapselzellen gedeuteten, kleinen Zellen gut wahrnehmbar.

Diese Dorsalzellen liegen in ziemlich regelmässigen Abständen von einander. Nur im Uebergangstheil zwischen Rückenmark und Medulla oblongata lassen sie sich auf der gleichen Anzahl Schnitte etwas häufiger als weiter caudalwärts auffinden.

Das Gewebe, innerhalb welchem sie liegen, besteht zum grössten Theil aus den länglichen, stark verdickten Enden der dorsalen Ependymfäden. Ausser

den kleinen, zur Kapsel gezählten Zellen finden sich neben den auch schon erwähnten kleinen Blutgefässen nur noch vereinzelte Wanderzellen in diesem Gebiete vor.

Von *Acerina cernua* besass ich ein Rückenmark, welches nur kurze Zeit in Müller'scher Flüssigkeit gelegen hatte; ausserdem gelang es mir aber trotz vorgeschrittener Jahreszeit [1]) 2 lebende Thiere zu erhalten, von welchen das eine Rückenmark in abs. Alkohol, das zweite in Sublimat fixirt wurde.

Fig. 32 ist nach einem Hämatoxylinpräparat des in Müller'scher Flüssigkeit gefärbten Rückenmarkes angefertigt und deshalb gewählt worden, weil aus derselben ersichtlich ist, dass diese Dorsalzellen eine tiefere Lage einnehmen können als bei *Perca*.

Fig. 30 ist nach einem Nissl-Präparat gezeichnet. Vergleichen wir diese Abbildung mit Fig. 29 so finden wir, dass die fragliche Zelle eine ganz andere Detailbeschaffenheit zeigt, wenngleich sie ihrer Lage nach sonst ganz mit den bei *Perca* gefundenen übereinstimmt.

Diese Zelle liegt nicht wie bei *Perca* in der Mitte des Endkeiles des dorsalen Septums, sondern der einen Seite mehr genähert. Dieses scheint bei *Acerina* stets der Fall zu sein. Ihre Form entspricht auch nicht ganz der von *Perca*, in Fig. 31 abgebildeten. Der Hauptunterschied lag aber in der Lage des Kernes.

Dieser nahm in allen meinen Präparaten stets ungefär die Mitte der Zelle ein. Die Zelle selber war schmäler als bei *Perca*, etwas spindelförmig, so dass der Kern in der breiteren Partie lag und rund herum von chromatophilen Elementen umgeben war. Niemals war ein hellerer Hof um denselben sichtbar.

Das ventrale Ende verliert sich ganz wie bei *Perca*.

Ganz so deutlich wie bei diesem Teleostier habe ich eine Kapselgewebe bei *Acerina* nicht gefunden. Auch hier verliefen in der Nähe der Zelle kleine Blutgefässe, welche der Deutlichkeit halber in keiner der Figuren aufgenommen sind.

Bei *Lophius piscatorius* [2]) hat Fritsch oberhalb der *Medulla oblongata* zahlreiche Riesenganglienzellen gefunden, welche nach ihm im Zusammenhang mit den Blättchenanhängseln der veränderten Flossenstrahlen gesetzt werden. Er scheint dieselben zu den sensiblen Nerven rechnen zu wollen.

---

[1]) December.

[2]) Fritsch. Ueber einige bemerkenswerthe Elemente des Centralnervensystems von Lophius piscatorius. Arch. f. mikr. Anat., Bd 27. 1886.

Bei der Forelle hat Rohon [1]) ebenfalls ähnliche Zellen gefunden, welche allerdings nur im frühesten Larvenstadium vorhanden sind und später verschwinden.

Ähnliche Elemente hat Kupfer [2]) auch bei *Accipenser*embryonen gesehen.

Beard [3]) beschreibt dieselben von *Lepidosteus* und *Raja* und giebt auch einige Abbildungen, in welchen dieselben sichtbar sind.

Er weicht in der Auffassung derselben hier wie auch bei *Lophius* von Fritsch ab [4]), indem er diesen Zellen eine motorische Bedeutung zuschreibt und mit Hülfe derselben seine eigenthümlichen Ansichten über die Bildung der Nerven zu beweisen bemüht ist. Ausserdem ist er geneigt die Zellen bei *Lophius* als einen für den Gebrauch bei erwachsenen, umgeänderten Apparat zu halten, der eigentlich nur dem Larvenstadium zukäme und dem bei *Raja*embryonen beschriebenen homolog wäre.

In einer späteren ausführlichen Bearbeitung dieses embryonalen Apparates der Selachier hält Beard [5]) denselben für sensorisch im Gegensatz zu Studnička [6]), welcher für ihre motorische Natur eintritt.

Studnička [6]) hat bei *Perca*embryonen diese Zellen auch gesehen aber als nur dem Larvenstadium zukommend beschrieben, während meine Beobachtungen an voll ausgebildeten Exemplaren gemacht sind.

In meiner vorbereitenden Mittheilung sprach ich die Ansicht aus, dass diese Zellen möglicherweise im Zusammenhang mit der Beweglichkeit der Dorsalflosse stehen könnten, da ich dieselben bei Weichflossern nicht gefunden habe. Es scheint mir nachdem ich die Untersuchungen fortgesetzt habe, dass diesen Zellen doch wohl eine andere Bedeutung zukommen muss.

In Bezug auf die mögliche Natur dieser Zellen darf man aber nicht vergessen, dass die Entwickelungsgeschichte des Rückenmarkes eine sensible Natur dieser Zellen als wahrscheinlicher dahinstellt.

---

[1]) Rohon. Zur Histiogenese des Rückenmarkes der Forelle. Sitzb. d. math.-physik. Klasse d. Kgl. bayr. Acad. München 1886. Nur aus Citaten bekannt.

[2]) Cit. nach Kölliker. Handbuch der Gewebelehre. Zweiter Bd. Leipzig 1896.

[3]) Beard. The transient Ganglion Celle and their Nerves in Raja batis. Anat. Anzeiger, Bd VII. 1892.

[4]) Beard. The Histogenesis of Nerve. Anat. Anzeiger, Bd VII. 1892.

[5]) Beard. On the disappearance of the transient nervous apparatus in the series: Scyllium, Acanthias, Mustelus and Torpedo. Anat. Anzeiger XII, cit. nach Schmidts Jahrbücher, Bd CCLV.

[6]) Studnička. Ein Beitrag zur vergleichenden Histologie und Histogenese des Rückenmarkes. Sitz.-Ber. d. k. böhm. Ges. d. Wissensch. math.-naturwiss. Klasse. 1895. Cit. n. Schmidts Jahrbücher. Bd CCLV und nach Dahlgren l. c.

V.

Die Mauthner'schen Fasern.

Eine ganz eigenartige Kathegorie Nervenfasern ist bei den niederen Wirbelthieren aufgefunden. Dieselben zeichnen sich durch ihre Grösse aus und sind bei Amphioxus und den Cyclostomen in Mehrzahl vorhanden und marklos wie die übrigen Strangfasern. Hier werden dieselben gewöhnlich als Müller'sche Fasern bezeichnet.

Bei den Teleostiern fehlen sie einigen Arten, kommen aber bei der Mehrzahl vor ebenso wie bei den Ganoiden und Dipnoern. Ueber die Selachier habe ich keine Angaben gefunden. Ebenfalls sind dieselben bei einigen Amphibien nachgewiesen worden.

Dieselben sollen nach den so ziemlich übereinstimmenden Angaben verschiedener Forscher mit grossen Zellen im Gebiet des Acusticuskernes in Verbindung stehen, resp. hier entspringen.

Nach meinen Untersuchungen an *Esox*- und *Salmo*-Embryonen gehören die paarig auftretenden Mauthner'schen Fasern zu denjenigen, welche zuerst mit einer Markhülle versehen werden. Es ist daher leicht möglich, dieselben bis ans letzte Caudalende zu verfolgen, welches sich bei späteren Entwickelungsstadien nicht machen lässt, da diese Fasern sich gegen das Schwanzende zu so weit verfeinern, dass sie von den übrigen anliegenden nicht zu unterscheiden sind.

Trotz gut gelungener Nachfärbungen Weigert'scher Schnitte oder Anwendung der für den Zweck Axencylinder und zugehörende Zellen nachzuweisen sehr geeigneten Methode von Schmaus habe ich nirgends auch nur eine Andeutung von Zellen in der Cauda gefunden, von welchen diese Mauthner'schen Fasern ihren Ursprung nehmen könnten. Dieselben laufen nach meinen Präparaten hier stets spitz aus.

In den am meisten dem caudalen Ende naheliegenden Schnitten, welche die Mauthner'schen Fasern noch deutlich von Mark umgeben, zeigen, liegen dieselben ventralwärts vom Centralkanal und ein wenig seitlich von demselben. In etwas weiter cerebralwärts liegenden Schnitten, welche auch schon eine breitere, ventrale Basis zeigen, liegen dieselben etwas höher als in den vorigen, sind aber etwas mehr von einander entfernt als vorher. Später, ungefär in der Höhe des hinteren Endes der Rückenflosse nähern dieselben sich wieder einander, um auf den hier erreichten Abstand von einander parallel weiter zu ziehen bis ins obere Ende der Oblongata, wo sie wenigstens bei 2—3 wöchentlichen *Esox*embryonen nicht mehr aufzufinden sind.

Bei meinen 30 mm langen *Salmo*embryonen sind dieselben schon überall von anderen markhaltigen Fasern umgeben. Hier ist aber der Querschnitt derselben im Verhältniss zu den umgebenden so auffallend gross, dass dieselben sich cerebralwärts leicht verfolgen lassen. So lässt sich die Kreuzung derselben am Boden des vierten Ventrikels ganz deutlich sehen, weiter sind die Mauthner'schen Fasern hier aber auch nicht aufzufinden.

An Längsschnitten von Cox- oder Golgi-Präparaten ist es nicht gelungen dieser Fasern bei Embryonen habhaft zu werden.

Bei erwachsenen Teleostiern — ich beziehe mich hier in erster Hand auf *Esox lucius*, *Perca fluviatilis* und *Leuciscus rutilus* — findet man diese Fasern in dem caudalen Ende des Rückenmarkes bei gewöhnlicher Fixirung und Härtung [1]) nicht auf. Dieselben besitzen, wie es auch von früheren Forschern schon constatirt worden ist, in diesem Endtheile des Rückenmarkes einen Durchmesser, der mit dem umgebenden harmonirt, und treten dadurch gar nicht auf Schnitten besonders hervor.

Je weiter man cerebralwärts die Schnitte legt, desto deutlicher werden dieselben. Dieses ist sowohl darauf zurückzuführen, dass der Axencylinder an Dicke schnell zunimmt, wie darauf dass die Markscheide sich verbreitert und aus mehr und mehr Lagen zu bestehen scheint.

In folgender Tabelle habe ich die Mittelzahlen zahlreicher Messungen an zwei verschieden grossen Exemplaren von *Leuciscus* und einem ungefär 40 cm langen *Esox* angegeben. Das Rückenmark dieser Thiere war, ohne aus dem Rückenmarkskanal herausgenommen zu sein, mit anhängender Wirbelsäule in Müller'scher Flüssigkeit gehärtet.

In dieser Tabelle bezeichnen 1, 2, 3, 4 und 5 die Mitte von den Stücken, die erhalten werden, wenn das Rückenmark von der Stelle an, wo sich die

[1]) Alkoholus absolutus, Müller'sche Flüssigkeit und Sublimat.

Wirbelsäule nach oben in die Endflosse hinein biegt, bis zum Anfang der Verbreitung, die den Beginn der Oblongata kennzeichnet, in fünf Theile getheilt wird.

Mit 6 ist der Punkt der Mauthner'schen Fasern bezeichnet, an welchem dieselben beginnen, sich gegen die Raphe zu verlagern und mit 7 der Kreuzungspunkt, wo dieselben senkrecht über einander stehen.

Messungen des Axencylinders vorzunehmen habe ich für gänzlich unzweckmässig angesehen. An einigen Gefrierschnitten, welche mit wässeriger Lösung von Säurefuchsin behandelt waren, erhielt ich den Eindruck, als ob der Axencylinder den ganzen Raum innerhalb der Markscheiden einnähme, was ich aber an keinem der fixirten Präparate bestätigen konnte. In allen letzteren fand sich stets ein bedeutender unausgefüllter Raum zwischen Axencylinder und Markscheide, der meiner Auffassung nach sich nur durch eine künstlich bewirkte Schrumpfung des ersteren erklären liess. Andere Gründe zur Vernachlässigung dieser Messungen ergeben sich aus dem weiter unten dargelegten.

	1	2	3	4	5	6	7
Leuciscus	38 μ	70 μ	78 μ	94 μ	109 μ	106 μ	97 μ
Leuciscus	61 μ	85 μ	72 μ	106 μ	114 μ	127 μ	106 μ
Esox	57 μ	87 μ	126 μ	109 μ	106 μ	92 μ	95 μ

Gemeinschaftlich für alle drei Paare gemessener Mauthner'scher Fasern ist, dass gegen die beiden Enden derselben die Fasern an Dicke abnehmen. Das Maximum ihres Durchmessers wird bei *Leuciscus* in beiden Fällen erst in der Oblongata erreicht, wenn auch in verschiedenen Höhen. Bei *Esox* liegt dasselbe viel tiefer, schon im Anfang der cerebralen Hälfte des Rückenmarkes.

Ausserdem fällt bei dem grösseren Exemplare von *Leuciscus* auf, dass die Messungen in 2 einen grösseren Werth zeigt als in 3 um dann in 4 ungefär dasselbe Dickenverhältniss wie bei dem kleineren Exemplare von *Leuciscus* an dieser Stelle zu zeigen. Diese Maasse bestätigen daher in Zahlen eine auch sonst bemerkbare Schwankung des Kalibers dieser Fasern an verschiedenen Schnitten.

Es schien daher, bevor diese Maasse von eigens dazu bestimmten Thieren genommen waren, eigentlich wenig verlockend, Messungen verschiedener Höhen vorzunehmen, da dieselben aber aus weiter unten zu erwähnenden Gründen doch wünschenswerth erschienen, so wurden dieselben dennoch unternommen.

Nach Mauthner sollen diese Fasern bei *Esox* einen Durchmesser von 96 μ besitzen, nach Kölliker kann derselbe hier auf 90—110 μ steigen. Nach Stieda ist ihr Durchschnitt 50—60 μ. Bei diesen nach Kölliker's Zusammenstellung[1])

[1]) Kölliker. Haudbuch der Gewebelehre. Zweiter Bd. Leipzig 1896.

angeführten Zahlen ist aber zu erwähnen, dass hier von den *Fasern selbst* die Rede zu sein scheint und als ob die Markscheide nicht mit gemessen wäre. Die Zahlen, welche sonst ganz wohl in den Rahmen der von mir gefundenen passen, können in ihren Abweichungen ganz leicht eine Erklärung finden.

Absolute Maasse für diese Fasern, welche sich vergleichen liessen, können aber nur dann gegeben werden, wenn die gemessenen Fasern Thieren entstammen, welche dieselbe Entwickelungsstufe erreicht haben. Dass schon die Grösse der Thiere einen bedeutenden Einfluss ausüben kann, zeigen die Verschiedenheiten an den beiden Exemplaren von *Leuciscus*.

Die histologische Detailstructur dieser Mauthner'schen Fasern ist noch wenig ermittelt. Die genauesten Angaben hierüber finde ich bei Kölliker [1]) in Bezug auf diese Fasern von *Protopterus*. Nach Untersuchungen an Spirituspräparaten beschreibt er den Axencylinder als „aus kleinen und gröberen Fäserchen von 0.5—1—1.5 μ zusammengesetzt, welche meist rundlich eckig erschienen, dichtgedrängt beisammen lagen, und nicht selten noch wie eine Zusammensetzung aus noch feineren Fibrillen erkennen liessen. In einzelnen Mauthner'schen Fasern fanden sich auch etwas stärkere Elemente bis zu 3 und 4 μ von homogenem Aussehen, Axencylindern von gewöhnlichen Nerven ähnlich". Abzweigungen konnte er nicht beobachten. Gegen die Cauda zu wurden die Fasern immer einfacher zusammengesetzt. Nach Untersuchungen mittelst Golgi-Methode an einem lebend erhaltenem *Protopterus* hält er aber die oben gegebene Beschreibung für nicht ganz natürlich, und erklärt, dass diese Fasern aus einem gewöhnlichen Axencylinder mit umgebender echter Markscheide beständen.

Fulliquet [2]) sah bei *Protopterus* das proximale Ende der Fasern sich in feine Fäserchen auflösen.

Nach Burckhardt [3]) soll der Axencylinder der Mauthner'schen Fasern bei *Protopterus* eine deutliche fibrilläre Structur zeigen und fibrilläre Abzweigungen entsenden.

Goronowitsch [4]) schreibt über die Mauthner'schen Fasern bei *Accipenser:* „Auf glücklich orientirten Längsschnitten kann man die Faser auf einer langen Strecke in intaktem Zustande beobachten. Auf solchen Präparaten fand ich sehr feine Fäserchen von der Oberfläche des Axencylinders sich abspalten.

---

[1]) Kölliker. Handbuch der Gewebelehre. Bd II. Leipzig 1896.

[2]) Fulliquet. Recueil zool. suisse, 1886, nach Kölliker Handbuch d. Gewebelehre citirt.

[3]) Burckhardt nach Kölliker, Handbuch d. Gewebelehre citirt.

[4]) Goronowitsch. Das Gehirn und die Cranialnerven von Accipenser ruthenus. Morphologisches Jahrbuch Bd 13, 1888.

Diese Fäserchen sind sowohl proximal als auch distal gerichtet. Sie färben sich durch Karmin, haben kein gleichmässiges Kaliber und sind nicht streng cylindrisch, stellenweise bandförmig abgeflacht. Ich habe niemals beobachtet, dass sie in echte Nervenfasern sich umwandeln. In sehr seltenen Fällen konnte ich sie aus der Markhülle austreten sehen".

Meine eigenen Untersuchungen stützen sich auf die Anwendung zahlreicher verschiedener Methoden: Golgi-Methode, Hoyer's Modifikation derselben durch Ersatz der Osmiumsäure mit Formol, Cox-Methode, Fixirungen und Härtungen in Formol, absolutem Alkohol, Müller'scher Flüssigkeit und Sublimat. Die letzteren mit den verschiedensten Nachfärbungen kombinirt.

Ausserdem sind zahlreiche Rückenmarke untersucht worden, die in verschiedener Höhe durchschnitten waren, und an welchen die degenerirenden Markscheiden nach der Marchi-Methode geschwärzt waren.

Halten wir uns nun zuerst an die Golgi-Präparate, so ist die Beschaffenheit der Markscheide hervorzuheben. An keinen anderen Präparaten erscheint dieselbe so voluminös wie hier. Dieselbe besteht aus mehreren Lagen, welche in Bezug auf die angenommene Färbung bedeutend wechseln. Die aller äusserste Lage zeigt oftmals die hellste Färbung, ist hellgelb und von geringem Umfang. Darauf kommt eine dunkelbraun, bis braunschwarze Schicht, innerhalb welcher wieder einige helle Lagen anzutreffen sind.

Der Axencylinder ist bei dieser Bearbeitung meistens von sehr geringem Durchmesser. Seine Farbe ist ein mittleres Braun, bedeutend heller als dasjenige, welches die imprägnirten Zellen und deren Ausläufer zeigen.

Manchmal aber zeigt der Axencylinder eine ganz und gar abweichende Beschaffenheit. In diesen Fällen präsentirt sich die Markscheide ziemlich dünn, obwohl immerhin noch reichlich geschichtet. Zwischen den verschiedenen Lagen derselben sind helle, spaltförmige Räume wahrzunehmen. In denselben findet man hin und wieder eine querverlaufende Faser von derselben Farbe wie der Axencylinder. Manches Mal ist statt einer Faser auch ein glänzender, runder, braungefärbter Körper hier aufzufinden, welcher sich kaum anders als eine solche quer durchschnittene Faser deuten lässt.

Der Axencylinder selbst bestand in diesen Fällen aus einem Conglomerat solcher, bei gewissen Einstellungen scharf glänzender braunen Körper. Die meisten derselben waren rund und zeigten, wenn ihre Mitte so eingestellt war, dass sie möglichst starken Glanz zeigte, eine dunkelgefärbte Circumferenz, welche dunklen Kreise bei günstigen Präparaten durch ihre Lagerung an einander die Form und das Aussehen eines Maschenwerkes vorläuschten.

Die äussere Peripherie dieses Conglomerates ist sehr wechselnd, zuweilen eckig. Gewöhnlich lässt sich ein Zwischenraum, der seiner Grösse nach wechselt, zwischen der Markscheide und diesem Axengebilde auffinden.

An Längsschnitten, — diese Golgi-Präparate sind von *Salmo trutta, Esox lucius* und *Leuciscus rutilus* angefertigt worden — zeigen sich die Fasern oft aus hellbraun gefärbten längsverlaufenden feineren Fasern zusammengesetzt. Hin und wieder ist auch eine feine braune Faser zu finden, welche den Markmantel quer durchdringt.

Im Ganzen aber ist hervorzuheben, dass die eigentlichen Golgi-Präparate für diese Untersuchungen nicht vortheilhaft sind. Die starke Schwärzung der Markscheide verhindert die Verfolgung der feinen quer verlaufenden Fasern.

Um dieser Schwärzung der Markscheiden zu entgehen, wie auch den meistens reichlichen Niederschlägen wurde die Formol-Chrom-Silberimprägnation zu diesem Zweck versucht. Bei derselben nehmen die Markscheiden dieser Fasern nur eine saffrangelbe Farbe an und lassen deutlich imprägnirte Fasern hervortreten. Ein Nachtheil liegt allerdings darin, dass die Imprägnation noch launenhafter als bei der richtigen Golgi-Methode ist.

Nach solchen Präparaten sind die Figg. 33 und 34 angefertigt.

Im Allgemeinen ist der Axencylinder in diesen Schnitten, welche ohne eigentliche Einbettung verfertigt wurden, nur selten erhalten. Die Markscheide hat die oben erwähnte saffrangelbe Farbe angenommen und besteht aus einer Reihe zwiebelschalenartig angeordneter Ringe oder Bruchtheile solcher. Zwischen diesen trifft man meistens einzelne, wellig verlaufende, braun imprägnirte, kurze Fasern an, die zuweilen in ganzer Länge innerhalb der Scheide zu liegen pflegen, in der Mehrzahl Fälle aber entweder nach aussen oder innen von derselben heraustreten.

In dem Schnitt, der als Unterlage für Fig. 33 diente, war nur eine solche Faser vorhanden, die wie aus der Abbildung hervorgeht, ein Stück sowohl nach innen wie aussen von der Markscheide zu verfolgen war. Diese Faser zeigt einen stark geschlängelten Verlauf. Der Axencylinder der Mauthner'schen Faser war in diesem Schnitt herausgefallen, so dass diese die Markscheide durchdringende Faser äusserst scharf und rein hervortrat.

In Fig. 34 war das Axengebilde erhalten. Hier treten quer durch die Markscheide 4 Stück Fasern, von welchen eine im Hohlraum zwischen Axencylinder und Markscheide frei endigt. Die drei anderen treten an den Axencylinder heran und lassen sich dann nicht weiter unterscheiden. Scheinbar endigen dieselben in einem der hellen glänzenden Punkte, aus welchem das Axengebilde gerade in diesem Präparat sehr deutlich zusammengesetzt erschien.

Taugliche Längssnitte gelang es mir nicht von diesen Präparaten anzufertigen. Das wenige was mir meine Schnitte zeigten war das Auftreten der gleichen braunen Fasern, welche das Mark durchsetzen.

Die meisten meiner in Müller'scher Flüssigkeit gehärteten Rückenmarke habe ich nach *Schmaus* mit Black blue gefärbt, einzelne auch mit anderen Farbstoffen wie Säurefuchsin u. s. w.

An ersteren trat ebenfalls der geschichtete Bau der Markhüllen deutlich hervor. Dieselben besassen hier eine gelbe Farbe, zwischen den Hüllen liessen sich blau gefärbte Spalträume wahrnehmen. Fasern, welche quer durch die Markscheide ihren Lauf genommen hätten, liessen sich nicht zur Darstellung bringen.

Dagegen fanden sich oft runde blaue Körper zwischen den Lamellen der Markscheiden, welche sich in keiner Weise von den sonst in den Schnitten vorhandenen Querschnitten von Axencylindern unterscheiden liessen.

In den Fällen, wo dieselben nur einen geringen Durchmesser zeigten, lagen sie direct zwischen die Lamellen eingebettet. Höchstens liess sich hier noch eine geringe Spur hellblaugefärbter Substanz finden, wie solche stets die Ganglienzellen bei nach dieser Methode verfertigten Präparaten umgiebt, und welche sich wohl als geronnene Lymphe auffassen lässt.

Sobald dieselben aber einen grösseren Durchmesser besassen, — derselbe konnte sogar die gleichen Dimensionen wie an den anliegenden Nervenfasern erlangen, — so waren sie von einer gelben concentrischen Schicht umgeben. An den dickeren Querschnitten zeigte diese ganz die gleiche Schichtung wie an den frei liegenden Axencylindern des Schnittes.

Sehr hübsch und distinct waren die Querschnitte der Axengebilde, welche von den eben beschriebenen Markscheiden umgeben waren. Dieselben bestanden aus einer hellblau gefärbten Grundsubstanz, welche aber niemals den ganzen Raum ausfüllte. Helle, leere Theile wurden stets aufgefunden und zeigten sich oft von feinen Fasern oder, lieber, einem stets etwas zerrissenem Netz der Grundsubstanz ausgefüllt.

In dieser Grundsubstanz traten nun scharf und dunkel gefärbte runde Gebilde hervor, die nirgends eine andere Deutung zuliessen als die von Querschnitten von Fasern. Meistens waren dieselben zum grössten Theil seitlich an die Wand des Hohlraums verschoben. Es wurden aber auch Präparate gefunden, in welchen die Mitte frei war und diese Grundsubstanz mit den in dieselbe eingebetteten blauen Querschnitten eine wandständige Lage hatten.

An Längsschnitten zeigten diese Präparate einen Bau, der sich zwangslos mit dem an Querschnitten gefundenen vereinigen liess. Diese Fasern besassen

in denselben eine schmale blaue Contour. Innerhalb derselben war gelb die am meisten hervortretende Farbe, wohl aus dem Grunde, weil relativ dicke Schnitte stets zur Untersuchung kamen und es nur schwer gelingen wollte, die Schnitte so gut zu orientiren, dass kein Theil der Markscheide in den Schnitt gefallen wäre, die seitliche Begrenzung natürlich ausgenommen.

In diesem gelben Sehfeld verliefen der Länge nach ziemlich weit von einander liegende blaue Fasern, die in den zahlreichsten Schnitten von gleicher Dicke waren.

Manchmal nur war in dieser Beziehung ein etwas mehr hervortretender Unterschied zu konstatiren.

Quer abgehende oder eintretende Fasern habe ich nicht mit Sicherheit nachweisen können.

Das umgebogene Endstück einer Mauthner'schen Faser, in der beschriebenen Weise dargestellt, ist in Fig. 36 abgebildet.

An Hämatoxylinfärbungen von Rückenmarken ausgewachsener Exemplare von *Salmo trutta* und *Thymallus vulgaris* lassen sich in der Markscheide kleine scharf gefärbte Kerne auffinden. Dieselben nehmen die äusserste Lage der Scheide ein. Die Axencylinder zeigen an den Formolpräparaten dieser Rückenmarke nur ganz geringe Schrumpfung und nehmen eine violettblaue Farbe an. Sie zeigen keine weitere Structur als eine feine Granulirung.

Ganz dasselbe ist an Weigert'schen Markscheidepräparaten gewöhnlich sichtbar. In vielen Fällen aber ist der Axencylinder hier stark geschrumpft, besonders an meinen *Esox*präparaten.

An den in Sublimat und Alkohol gehärteten Präparaten ist nichts besonders zu sehen. Diese beiden Fixirungsmittel scheinen auch sehr unzweckmässig für das Studium der Axencylinder und Markscheiden zu sein.

Zu einem anderen Zweck habe ich vielen *Esox-* und *Leuciscus*exemplaren das Rückenmark sowohl unter- wie oberhalb der Rückenflosse durchtrennt, und die Thiere dann nach 3 bis 8 Tagen getödtet. Die so gewonnenen Präparate wurden dann nach Marchi behandelt. Obgleich in diesen Fällen schon degenerative Zustände eingetreten sind, zeigen die Schnitte doch deutlich einige Eigenthümlichkeiten, besonders im Bau ihrer Markscheide, so dass ich dieselben in diesem Zusammenhang beschreibe.

Eine Abbildung der Mauthner'schen Stränge, 6 Tage nach Durchschneidung des Rückenmarkes, ist in Fig. 35 gegeben. In diesem Fall, *Leuciscus*, war das Rückenmark unterhalb der Dorsalflosse durchschnitten worden. Die Abbildung stammt aus der Gegend kurz vor der Kreuzung, am Boden des

vierten Ventrikels. Die Axencylinder sind mit wässeriger Säurefuchsinlösung gefärbt und kalihydrathaltigem Alkohol differenzirt.

Scharf und deutlich tritt an solchen Präparaten der geschichtete Bau der Markscheiden hervor. Ebenso sind die schon oben erwähnten, innerhalb derselben liegenden Nervenfasern mit eigenen Markscheiden, welche als concentrische Ringe innerhalb des Hohlraumes auftreten, vorhanden.

Ueber die Bedeutung der MÜLLER'schen und MAUTHNER'schen Fasern wie ihrer Ursprungs- und Endigungsweise herrscht bisher keineswegs Klarheit. Um dieser Frage näher zu treten, habe ich das Rückenmark verschiedener Thiere durchsnitten und die danach folgende secundäre Degeneration der MAUTHNER'schen Fasern verfolgt. Ehe ich aber auf die Resultate dieser Experimente eingehe, kann es von Interesse sein eine kurze Uebersicht über das von ihnen bisher bekannte oder angenommene zu geben.

AHLBORN [1]) hat die MÜLLER'schen Fasern bei *Petromyzon* genau verfolgt und giebt Seite 239 eine chematische Darstellung ihres Verlaufes. Ueber ihr Verhalten im Rückenmark schreibt er: „Die MÜLLER'schen Fasern haben ihre Lage vorzugsweise im Funiculus ventralis. Hier liegen nahe der Medianebene und in die Konkavität der grauen Masse vorgedrängt jederseits etwa acht der kolossalen Fasern, umgeben von einer grösseren Anzahl feinerer Fasern verschiedenen Kalibers, die ebenfalls die Längsrichtung verfolgen. Ausser dieser 'inneren Gruppe' der MÜLLER'schen Fasern finden sich noch im Funiculus lateralis zwei bis drei starke Fasern, die man als MÜLLER'sche bezeichnen kann; sie bilden zusammen die 'äussere Gruppe' der MÜLLER'schen Fasern".

Unter diesen MÜLLER'schen Fasern unterscheidet AHLBORN in der Oblongata folgende drei Gruppen: „1) die *lateralen ungekreuzten Fasern*, 2) die *medialen gekreuzten* und 3) die *medialen ungekreuzten Fasern*".

„Die *lateralen* Fasern kommen aus den Basaltheilen des Funiculus lateralis des Rückenmarkes; sie sind begleitet von einer grösseren Anzahl feinerer und feinster Fasern". Ohne sich zu kreuzen, wenden diese Fasern sich in einem Bogen lateralwärts um „sich nun mit dunkel gefärbten, schmal spindelförmigen und meist in sich gekrümmten Zellen zu vereinigen, die je nach der Stärke der Fasern eine verschiedene Grösse besitzen". — „Aus den vorderen Ende dieser Zellen geht ein einziger Fortsatz hervor, der wenig feiner ist als die Faser der Zelle, und der mit der unteren Acusticuswurzel das Gehirn verlässt". — „Man kann daher wohl alle die Elemente, die mit der lateralen

[1]) AHLBORN. Untersuchungen über das Gehirn der Petromyzonten. Zeitschrift für wiss. Zool. Bd 39. 1883.

Gruppe der Müller'schen Fasern in den Acusticuskern eintreten, als direkte Komponenten der unteren Acusticuswurzel betrachten".

Die *medialen* Müller'schen Fasern stammen aus dem Funiculus ventralis des Rückenmarkes. Ein Theil derselben begiebt sich hinüber auf die entgegengesetzte Seite unter Bildung des Chiasma der Müller'schen Fasern, während ein anderer Theil ungekreutzt weiter zieht.

Die *medialen gekreuzten* Fasern „treten nun in den Acusticuskernen mit Zellen in Verbindung, die sich in jeder Beziehung den Zellen der lateralen Müller'schen Fasern gleich verhalten. Jede dieser Zellen sendet nach vorn einen einzigen Fortsatz, der als acustische Faser das Hirn verlässt und zwar, wie es hier scheint, gewöhnlich durch die obere Wurzel des Nerven".

In keinem Zusammenhang mit dem Acusticus stehen nach Ahlborn die *medialen ungekreuzten* Fasern. Dieselben enden wahrscheinlich in kolossalen multipolaren Ganglienzellen, die vor dem Chiasma der Müller'schen Fasern liegen.

Sehen wir in der oben nach Ahlborn gegebenen Beschreibung von der Verbindung mit dem Acusticus ab und betrachten die Fasern und Zellen für sich allein, *so wären die* Müller'*schen Fasern der Petromyzonten als Axencylinder von Zellen aufzufassen die in der Medulla oblongata ihren Platz haben. Ein Theil dieser Zellen soll ausserdem noch einen zweiten ebenfalls gleichwerthigen peripheren Ausläufer besitzen.*

Mayer [1]) giebt folgende Darstellung der Müller'schen Fasern: „Die bei *Ammocoetes* in grosser Zahl vorkommenden sog. Müller'schen Fasern sind die Neuriten von Ganglienzellen, welche im Nachhirn paarweise zu beiden Seiten in der Nachbarschaft der Gehirnnervenursprünge liegen. Aber auch schon im Mittelhirn finden sich 3 Paare dieser Kolossalzellen. Die beiden ersten Paare liegen im Bereich der Commissura posterior, das dritte in der Nähe des Oculomotoriuskernes. Diese Zellen, welche sämmtlich ein gleichartiges Verhalten zeigen, umspinnen mit ihren mächtigen, zahlreich verzweigten Dendriten die Ursprungskerne der Hirnnerven, ohne direct Antheil an der Bildung der letzteren zu nehmen. Ihr Neurit zieht direct als Müller'sche Faser, einen Bestandtheil des hinteren Längsbündels bildend, nach hinten, auf dem Wege spärliche, aber sehr deutliche Collateralen abgebend".

Oben ist schon die von Goronowitsch gegebene Beschreibung über das Verhalten der Mauthner'schen Fasern im Rückenmark von *Accipenser ruthenus* erwähnt worden. Ihr weiteres Verhalten ist hier folgendes [2]): „In der Aus-

---

[1]) Mayer. Das Centralnervensystem von Ammocoetes. Anat. Anz. Ad XIII. 1897.
[2]) Goronowitsch l. c.

trittsgegend des Vagus und Glossopharyngeus steigen die Mauthner'schen Fasern dorsal. — In der Querschnittsebene des Austrittes des Acusticus findet eine Kreuzung der Mauthner'schen Fasern statt. Nach der Kreuzung verlaufen sie bogenförmig zum Unterhorne, wo sie in sehr grossen Nervenzellen enden. Beim Sterlett fehlt das merkwürdige, von Mayser beschriebene Gebilde, welches die terminalen Zellen der Mauthner'schen Fasern bei Cyprinoiden umgibt. Die Fortsätze der terminalen Zellen sind in die ventralen und lateralen Theile der weissen Substanz gerichtet. Ein sehr dicker Fortsatz steigt konstant in dorsaler Richtung empor. Ich konnte den Fortsatz bis zu den austretenden Bündeln des Acusticus verfolgen und neige mich zur Ansicht, dass der betreffende Fortsatz eine Faser des Acusticus liefert".

Diese von Goronowitsch gegebene Beschreibung zeigt eine grosse Uebereinstimmung mit dem von Ahlborn über die Petromyzonten berichtetem. *Auch bei Accipenser ruthenus entspringen demnach die* Mauthner'*schen Fasern von Zellen, die in der Medulla oblongata liegen, und welche Zellen ausserdem noch einen zweiten Fortsatz, der die Natur vom Axencylinder besässe, entsendeten.*

Fulliquet's [1]) Beobachtungen über den Endverlauf der Mauthner'schen Fasern bei *Protopterus* kenne ich nur aus Citaten. Dieselben sollen nach ihrer Kreuzung, *ohne eine Verbindung mit einer Nervenzelle einzugehen*, in Fibrillenbündel zerfallen, welche eine austretende Wurzel des Acusticus bilden.

Burckhardt [2]) soll über *Protopterus* sagen „dass im Gebiete des Eintrittes des stärksten Astes des Acusticus jene bekannte grosse Zelle liege, *deren Achsencylinder die* Mauthner'*sche Faser sei*". Derselbe nimmt also auch *eine in der Medulla oblongata liegende Ursprungszelle an.*

Stieda [3]) beschreibt den Endverlauf der Mauthner'schen Fasern bei *Lota vulgaris* in folgender Weise, mit dem Zusatz, dass die bei dieser Species vorhandenen Angaben auch für andere Knochenfische Geltung hätten. „Die beiden Mauthner'schen Fasern, welche ursprünglich in den unterhalb des Centralkanals befindlichen Längsfaserbündeln eingeschlossen sind, und sowohl von einander, als von dem senkrechten unteren Schenkel der grauen Substanz in ziemlich weiten Abständen entfernt sind, rücken einerseits einander näher, andererseits aber auch höher hinauf, d. h. dem Centralkanal und später dem Boden des vierten Ventrikels näher, so dass sie schliesslich dicht neben einander am Boden des vierten Ventrikels sich befinden. Nun kreuzen sich die

---

[1]) Fulliquet l. c.

[2]) Burckhardt l. c.

[3]) Stieda. Studien über das centrale Nervensystem der Knochenfische. Zeitschr. für wiss. Zool., Bd 18. 1868.

Fasern, indem die eine Faser über die andere sich hinüberlegt und biegen fast unter rechtem Winkel nach aussen um, um sich an das ebenfalls nach aussen abgehende Bündel der Trigeminuswurzel anzuschliessen".

Nach Stieda ist also in der Medulla oblongata der Knochenfische keine End- oder Ursprungszelle zu finden. Diese Ansicht hat er aber später geändert [1]) und erklärt, *dass die* Mauthner'*schen Fasern in gewissen sehr grossen Zellen der Oblongata endeten.* Die Fasern selber will er als *immanente Fasern*, ebenso wie die Müller'schen Fasern, aufgefasst haben, d. h. *als lang ausgedehnte Commissuren zwischen zwei sehr grossen Nervenzellen.* Wie er hiermit die frühere Angabe eines Anschlusses an die nach aussen gehenden Bündel der Trigeminuswurzel vereinigen will, ist in dem citirten Referate nicht erwähnt.

Bei Edinger [2]) heisst es in Bezug auf diese Fasern: „In den Vordersträngen liegen aber, schon von den Fischen an, auch ganz lange Bahnen. So findet man namentlich dicht an der grauen Substanz bei diesen und bei den Larven der Amphibien jederseits eine, manchmal auch mehrere sehr dicke Fasern, die Mauthner'schen Fasern. Im Schädel, nahe dem Ursprung des statischen Nerven VIII aus riesigen Ganglienzellen entspringend, können ihre dicken, von enormer Markscheide umhüllten Axencylinder bis hinein in die Schwanzwirbelsäule verfolgt werden, wo sie mit den letzten Sacralnerven austreten (Fritsch)".

Derselbe bildet diese angenommenen Ursprungszellen auch aus der Oblongata einer 4 Cm langen Larve von *Salamandra maculata* ab.

Die genaueste und detailreichste Beschreibung der Mauthner'schen Fasern und speciell ihres Endorganes in der Medulla oblongata finden wir bei Mayser [3]).

Derselbe hat an Schnitten durch die Oblongata von *Cyprinus carpis* den Axencylinder im Querschnitt fein getüpfelt, ein anderes Mal auf Horizontalschnitten gestrichelt, wie aus feinen Reisern zusammengesetzt gefunden. Der Regel nach hat derselbe jedoch das weiche homogene Aussehen eines gewöhnlichen Axencylinders gezeigt. Dabei hat er mehrmals in der Höhe des Vaguskernes „zwei Axencylinder in derselben Scheide einer Mauthner'schen Faser" beobachtet und ausserdem „kurze Ästchen, die sich vom Axencylinder ähnlich

---

[1]) Stieda. Studien über den Amphioxus, cit. nach Mayser, Vergl. anat. Studien über das Gehirn d. Knochenfische mit bes. Berücks. d. Cyprinoiden. Zeitschr. f. wiss. Zool. Bd 36. 1882.

[2]) Edinger. Vorlesungen über den Bau der nervösen Centralorgane. Fünfte Auflage. Leipzig 1896.

[3]) Mayser. Vergleichend anatomische Studien über das Gehirn der Knochenfische mit besonderer Berücksichtigung der Cyprinoiden. Zeitschr. f. wiss. Zool. Bd. 36. 1882.

wie die Deiters'schen Fortsätze von den Nervenzellen erheben". Diese Beobachtung spricht nach Mayser zu Gunsten der von Fritsch ausgesprochenen Vermuthung „*dass die dem Schwanz zu sich verjüngende Faser Abzweigungen bilde*".

Ueber den letzten Verlauf und das Ende der Mauthner'schen Fasern schreibt Mayser weiter: „Die Mauthner'schen Fasern kreuzen sich nämlich unter dem Epithel des IV Ventrikels in der von den Autoren angegebenen Frontalebene und treten jederseits zu einem lateral vom hinteren Längsbündel liegenden Gebilde, dass man allerdings für eine eigenthümliche, sehr grosse Zelle halten muss. Dieselbe hat eine starre weite Bindegewebskapsel, welche einen relativ kleinen Protoplasmaleib und zwei sehr grosse Fortsätze einschliesst, einen lateralen und einen ventralen. An der Abgangsstelle des lateralen liegt in dessen Verlaufsrichtung ein langgestreckter, dichter, durch Karmin sehr stark gefärbter Kern mit einem ähnlichen Kernkörperchen. Vor ihrem Eintritt in das Endorgan schwillt die Mauthner'sche Faser, nachdem sie sich zuvor im Allgemeinen verschmälert hatte, noch einmal leicht spindelförmig an und hat hier nur auch der Zellenleib und die grossen Fortsätze gerade an meinen deutlichsten Präparaten ein ausgesprochen fibrilläres Aussehen".

Von den beiden Fortsätzen „zieht der laterale zwischen den Fasern der gekreuzten absteigenden Acusticuswurzel nach aussen und hinten und lässt sich bis nah an den Seitenrand, der andere nach unten und vorn bis nah an die Basis der Oblongata verfolgen".

Ueber das die Endzelle umgebende Gewebe äussert Mayser: „Nach innen und oben liegt dem Leib unserer Zelle ein rundlicher, mit Karmin sich nur wenig färbender und an manchen Präparaten (Barbe) sogar entschieden gelblich (wie Pigment) aussehender Klumpen an, der mir viele Schwierigkeiten gemacht hat. Abgesehen von den zahlreichen Fortsätzen, wodurch die Zellenkapsel mit ihrer Umgebung und namentlich dem Ependym des vierten Ventrikels in Verbindung steht, sieht man nämlich noch von diesem Klumpen Ausläufer ausgehen. Dieselben sind weich, wechselnden Kalibers, dem Centrum zu sich stark verjüngend, gegen die Peripherie unregelmässig anschwellend, von einer zarten Scheide umgeben. Ich konnte sie nie durch den Klumpen hindurch bis in den Zellenleib hinein verfolgen, auf der anderen Seite aber haben sie wieder die grösste Ähnlichkeit mit Axencylindern. An feinen mit Ueberosmiumsäure behandelten Frontalschnitten sieht man, dass der Klumpen selbst sich aus Fasern und körnigen Molekeln zusammensetzt".

Gegen Stieda's Ansicht, dass die Mauthner'schen Fasern als sog. immanente Fasern aufzufassen wären, erhebt Mayser verschiedene Einwände und

sagt zuletzt: „Freilich hat es wohl die meiste Wahrscheinlichkeit für sich, dass die Mauthner'schen Fasern im Rückenmark mit Zellen in Verbindung treten, sei es nun direkte oder durch Vermittelung von Abzweigungen".

Nach Béla Haller [1]) dienen die Mauthner'schen Fasern „bekanntlich zum Ursprunge gewisser Fasern in den drei letzten unteren Spinalnerven", sind also centrifugal leitende Nerven.

Ueber dieselben bei Teleostiern hat dieser Forscher selbst folgendes ermittelt. „Sie zeigen bei allen von mir untersuchten Knochenfischen gleich von ihrer Kreuzungsstelle an bis zu ihrem Ende in ihrem Verhalten eine grosse Gleichförmigkeit. Der im Verhältniss zur Markhülle schmale Axencylinder erscheint durchaus einheitlich, und von einem Zerfall in zahlreiche Längsfibrillen ist durchaus nichts zu erkennen. Immerhin habe ich stellenweise, besonders im hinteren Drittel des Rückenmarkes, eine eigenartige Differenzirung innerhalb des Axencylinders beobachten können, von der ich jedoch nicht zu entscheiden vermag, ob sie nicht der Ausdruck eines durch die Reagentien hervorgerufenen Zustandes sei. In Karminpräparaten habe ich nämlich gesehen, dass sich im Axencylinder eine Rindenschicht von einer Markzone stellenweise deutlich abhebt. Letztere ist recht ansehnlich, und da sie sich mit Karmin intensiver färbt als die Rindenschicht, so erscheint der Querschnitt der Mauthner'schen Faser an diesen Stellen einer grosskernigen Zelle ähnlich. Die Markzone ist fein granulirt, die Rindenschicht jedoch ganz homogen. An Längs- oder Horizontalschnitten erkennt man die Markzone in Form einer spindelförmigen Bildung in dem Axencylinder eingelagert. Sie hat somit mit einem Fibrillenbündel nichts zu thun. Auf dem Querschnitte erscheint der Rand des ovalen Axencylinders, der entweder in der Mitte der Markscheide oder excentrisch in derselben liegt, bei schwächerer Vergrösserung abgefranst. Bei stärkerer Vergrösserung erkennt man jedoch, dass auf den über der ganzen Oberfläche des Axencylinders vertheilten Erhöhungen Fäserchen sich ansetzen, die sich entweder noch innerhalb der Markscheide verzweigen oder unverzweigt die Markscheide durchsetzen und auf diese Weise nach aussen gelangen. Auf einem Querschnitte kann man manchmal 7—9 solche mit Karmin sich nicht färbende feinste Äste wahrnehmen". Diese Äste hat Béla Haller auch mit der Chromsilber-Methode darstellen können.

Auch v. Gehuchten [2]) hat Äste an den Mauthner'schen Fasern beobachtet.

---

[1]) Béla Haller. Untersuchungen über das Rückenmark der Teleostier. Morphologisches Jahrbuch, Bd 23, 1895.

[2]) v. Gehuchten. Le faisceau longitudinal posterieur. Bulletin de l'Academie Royale de Médecine de Belgique. IV Serie. Bd IX. 1895.

„En descendant dans la moelle allongée et la moelle épinière, ces grosses fibres nerveuses émettent, sur toute leur longeur, de courtes branches collatérales raides et non ramifiées, d'un aspect tout différent des collatérales naissant des fibres voisins".

Ueber das Verhalten der Mauthner'schen Fasern in der Medulla oblongata des Axolotl berichtet Stieda [1]): „Im Rückenmark war ihr Erscheinen nicht constant, hier in der Medulla oblongata fehlen sie niemals. Ihr weiteres Verhalten ist wie bei den Fischen; sie sind bis zu einer bestimmten Stelle, nämlich bis zum Abgange des Nervus acusticus und der Facialiswurzel zu verfolgen. Nachdem die Fasern allmälig einander immer näher gerückt sind, kreuzen sie sich und sind dann verschwunden. Ich habe bei einer anderen Gelegenheit darauf hingewiesen, dass die grossen Nervenfasern hier in der Medulla oblongata ihren Endpunkt oder, wenn man so will, ihren Anfangspunkt in grossen Nervenzellen finden. Hier beim Axolotl ist es mir nicht gelungen, den Zusammenhang zu beobachten".

Weiter mag hier noch erwähnt werden das Köppen [2]) bei der Eidechse im Schwanzmarke „eine Riesenfaser gleich der Mauthner'schen" beobachtet hat ohne indessen weitere Angaben über dieselbe zu machen als dass dieselbe innerhalb des aus grossen Fasern bestehenden hinteren Längsbündels liege.

Ueber das Verhalten dieser Fasern bei höheren Thieren sagt Köppen: „Es besteht, wie es scheint, das Gesetz, dass je höher das Thier, desto weniger auffallend dicke Fasern auftreten. An der Stelle der grossen Fasern niederer Thiere finden wir bei höheren Gruppen von Fasern".

In einer früheren Arbeit schreibt Köppen [3]): „Bei höheren Wirbelthieren würden wir das Analogon der Müller'schen Fasern in der Substantia reticularis zu suchen haben".

Wir können also folgende 4 verschiedene Ansichten über das Verhalten der Müller'schen und Mauthner'schen Fasern in der Medulla oblongata unterscheiden.

1) Die Müller'schen (Ahlborn) und Mauthner'schen Fasern (Gorono-witsch, Burckhardt, Edinger) haben ihren Ursprung in grossen Zellen in der Medulla oblongata.

---

[1]) Stieda. Ueber den Bau des centralen Nervensystems des Axolotl. Zeitschr. f. wiss. Zool. Bd 25. 1875.

[2]) Köppen. Ueber das hintere Längsbündel. Neurologisches Centralblatt. Bd 8. 1889.

[3]) Köppen. Zur Anatomie des Froschgehirns. Neurologisches Centralblatt. Bd 7. 1888.

2) Diese Fasern sind als ausgedehnte Commissuren, s. g. immanente Fasern, zwischen zwei Zellen aufzufassen, von welchen die eine in der Medulla oblongata liegt (Stieda).

3) Die Mauthner'schen Fasern lösen sich nach ihrer Kreuzung in Bündel von feinen Fibrillen auf (Fulliquet).

4) Die Mauthner'schen Fasern treten nach ihrer Kreuzung in der Medulla oblongata zu einer grossen Nervenzelle (ob sie eine Verbindung mit derselben eingehen ist nicht ganz deutlich aus der Beschreibung herauszulesen) die mit dem umliegenden Gewebe einen besonderen End- oder Sammelapparat bildet (Mayser).

Die am meisten gangbare und in den neuesten Arbeiten aufgenommene Ansicht ist, *dass der Ursprung dieser Fasern in der Medulla läge und dieselben also centrifugal leitende Fasern wären.*

Um diese noch nicht gegen jede Einwendung gesicherte Ansicht zu prüfen ist der Weg eigentlich vornherein gegeben. Es ist hierzu keineswegs nöthig, sich auf einen vielleicht vergeblichen Kampf mit der Launenhaftigkeit der Imprägnationsmethoden einzulassen, und zu warten bis einmal ein günstiger Zufall ein positives Ergebniss liefert.

Die experimentelle Pathologie hat für diese Art von Untersuchungen schon seit langer Zeit, das Studium vom Fortschreiten absichtlich gesetzter Läsionen herangezogen und ist zu dem als allgemein gültiges Gesetz zu betrachtendem Satz gekommen, dass *ein durchschnittener Nerv stets in erster Hand in zellulifugaler Richtung degenerirt. Die zellulipetale Degeneration tritt immer erst bedeutend später auf.*

Zum Nachweis dieser s. g. *secundären Degeneration* besitzen wir ausserdem noch zwei wesentlich verschiedene Methoden, welche als *positive* und *negative* unterschieden werden können.

Die *positive* stammt von Marchi. Durch dieselbe werden degenerirende Fasern mittelst Osmiumsäure stark geschwärtzt, während die nicht degenerirenden ungefärbt bleiben. Diese Methode lässt sich nur bei relativ frischen, wenige Tage allen Läsionen mit Vortheil verwenden.

Die zweite, *negative*, gelingt erst bei einem gewissen Alter der Läsionen. Dieselbe ist die bekannte Weigert'sche Markscheidenfärbung, bei welcher nur die intacten Markscheiden gefärbt werden, während die zerfallenden Markscheiden farblos bleiben.

Von diesen beiden Methoden habe ich die erstere benutzt, da es mir nicht gelingen wollte, meine Versuchsthiere allzulange am Leben zu halten, beson-

ders wenn die Durchschneidung oberhalb der Rückenflosse oder noch weiter hinauf vorgenommen war.

Als Versuchsthiere dienten 40—50 cm lange *Hechte* und verschiedene Grössen von *Leuciscus*.

Bei meinen ersten Versuchen liess ich die Thiere 8—10 Tage am Leben. An den dabei erhaltenen Präparaten war folgendes zu finden.

Das Rückenmark war unterhalb der Rückenflosse durchtrennt worden. Sowohl ober- wie unterhalb der gesetzten Läsion war eine sich ziemlich weit ausdehnende Strecke vollkommen im ganzen Querschnitt degenerirt. Diese traumatische Degeneration schien mir ein grösseres Gebiet zu umfassen, als es mir bei Durchschneidungen peripherer Nerven bei Kaninchen früher vorgekommen war [1]).

Am caudalen Theil des Rückenmarkes liessen sich nun stets die MAUTHNER-schen Fasern sofort dadurch erkennen, dass wenigstens einige Theile ihrer Markscheiden bei dieser Behandlung eine deutlich hervortretende schwarze Farbe angenommen hatten. Dieses Verhalten war constant, so weit die MAUTHNER-schen Fasern sich überhaupt caudalwärts verfolgen liessen.

Nach Ueberspringen des Gebietes der traumatischen Degeneration fand sich an dem cerebralen Theil des Rückenmarkes folgendes.

Hier waren die Markscheiden der MAUTHNER'schen Fasern ebenfalls degenerirt und schwarz gefärbt, aber ein grosser Unterschied im Verhältniss zu der Schwärzung der caudalen Enden liess sich doch nachweisen. Während hier die Markscheiden nur in einzelnen Schichten eine schwarze Farbe zeigten, war die ganze Markscheide an dem cerebralen Ende tief schwarz gefärbt. Und diese gesättigte Schwärze liess sich bis zur Kreuzung und noch ein ziemliches Stück in den lateralwärts umgebogenen Endstücken beobachten. Eine schärfere und bessere Tinction, um den cerebralen Verlauf der Fasern zu verfolgen, liess sich nicht finden, wie es auch aus den beigefügten Mikrophotographien hervorgeht.

Es mag daher eine kurze Darstellung ihres Endverlaufes hier eingeschoben werden.

An Schnitten welche durch die Mitte des Cerebellums gelegt worden sind lässt sich die erste Andeutung der späteren Kreuzung finden. Die eine der Fasern behält hierbei noch ihre ursprüngliche Lage bei, während die zweite sich ein wenig nach oben und medialwärts verschiebt. Dieser Anfang einer

---

[1]) KOLSTER. Zur Kenntniss der Regeneration durchschnittener Nerven. Arch. f. mikr. Anat. Bd 41.

Lageveränderung scheint nicht an eine bestimmte Seite gebunden zu sein. Unter meinen Serienschnitten dieser Gegend habe ich sowohl rechte wie auch, wenngleich weniger oft, linke Fasern diese Lageveränderung anfangen sehen.

Wenige Schnitte weiter cerebralwärts beginnt auch die Faser der anderen Seite sich medialwärts zu verschieben. Die Faser, welche zuerst ihre Lage verändert hat, setzt während dessen ihre Bewegung in der einmal eingeschlagenen Richtung fort, so dass beide Querschnitte, wenn sie die Raphe erreicht haben, senkrecht über einander zu liegen kommen. Hierbei lässt sich eigentlich ohne Ausnahme stets beobachten, dass die untere Faser einen etwas kleineren Durchmesser als die sich über dieselbe hinüberlegende besitzt.

Die obere Faser biegt gleich, nachdem die Kreuzung vorüber ist, und beide Querschnitte in beinahe gleicher Ebene liegen lateralwärts um, während die untere Faser sich unterdessen dem Boden des vierten Ventrikels ein wenig genähert hat. Die zweite folgt dieser Bewegung erst ein wenig später, so dass in ein und demselben Querschnitt ein Längsschnitt durch die Obere und ein erster Schrägschnitt durch die untere Faser zu liegen kommen.

Zu der lateralen Bewegung kommt darauf noch eine ventral gerichtete, so dass die beiden Endstücken einen ventralwärts offenen Bogen bilden. Die beiden Fasern endigen ebenfalls nicht ganz symmetrisch. Die obere zuerst umbiegende Faser endet einige Schnitte weiter caudalwärts als die untere.

Um nun wieder auf die physiologisch von Bedeutung erscheinenden Ergebnisse der experimentell hervorgerufenen sekundären Degeneration zu kommen, so war die in den beiden entgegengesetzten Richtungen aufgetretene Degeneration im ersten Augenblick auffallend und schwer zu deuten.

Ein Hinweis, wie dieses Ergebniss vielleicht zu erklären wäre, lag jedoch in der verschieden ausgebildeten Schwärzung der Markscheiden in dem caudalen und cerebralen Ende. Es war ja möglich, dass bei diesen eigenartigen Fasern die retrograde Degeneration besonders früh ihren Anfang näme.

Um auf diesen Wege, durch Studien jüngerer Stadien nach der Durchtrennung, dieses Ergebniss näher untersuchen zu können, legte ich am selben Tage Schnitte durch das Rückenmark mehrerer Thiere und tödtete dieselben nach je 3, 4, 5, 6 und 7 Tagen. Um nun noch eine weitere Stütze für meine Untersuchungen zu erhalten, wurde auch die von Homén [1]), bei seinen Studien über die secundäre Degeneration benutzte Methode in Anwendung gezogen. Dieselbe ist ebenfalls als *positive* Methode zu bezeichnen, unterscheidet sich

[1]) Homén. Contribution expérimentale à la Pathologie et à l'Anatomie pathologique de la Moelle épinière. Helsingfors 1885.

jedoch von der von Marchi dadurch, dass dieselbe die Axencylinder und nicht die Markscheiden färbt. Die degenerirenden Axencylinder nehmen durch dieselbe eine dunkelbläulich röthliche Farbe an, während die nicht degenerirenden eine schwache röthliche Farbe zeigen. Der Unterschied ist scharf und distinct.

Mit Hülfe dieser Homén'schen Methode liess sich schon an den 4 Tage alten, durchtrennten Rückenmarken ein Unterschied zwischen den Axencylindern der ober und unterhalb der Durchtrennungslinie liegenden Theile der Mauthner'schen Fasern nachweisen. Schon in diesem frühen Stadium zeigten die im cerebralen Theil liegenden Mauthner'schen Fasern die characteristische Blaufärbung ihrer Axencylinder.

Im distalen Theil liess sich zu dieser Zeit noch keine andere Färbung als die röthliche auf diesem Wege an den Axencylindern erzielen.

Diese Resultate wurden später auch durch die Marchi-Färbung bestätigt.

Am 5 Tage alten, durchtrennten Rückenmark liess sich auch noch keine Schwärzung der Markscheiden erzielen. Ganz ohne Unterschiede waren aber die proximalen und distalen Theile hier nicht mehr. Während an diesen Schnitten im distalen Theil auch nicht der kleinste Unterschied in der Färbung zwischen den Markscheiden der Mauthner'schen Fasern und denen der übrigen Nerven sich nachweisen liess, hatten im proximalen Theil die Mauthner'schen Fasern in ganzer Länge eine braune Färbung angenommen.

In diesen Stadium trat auch der Unterschied in der Farbe der Axencylinder bei der Homén'schen Färbung frappant und unwiederleglich hervor.

An Präparaten vom 6-ten Tage war es schon möglich, die Marchi-Reaction zu erzielen. Dieselbe war im proximalen Theil deutlich, wenngleich noch nicht alle Schichten der Markscheide umfassend. Im distalen Theil liess sich hin und wieder eine geschwärzte Scholle innerhalb der sonst bräunlichen Markscheide nachweisen.

Die Axencylinder zeigten in beiden Theilen eine übereinstimmende Färbung.

Am 7-ten Tage war das Verhalten der Markscheiden in beiden Theilen dasselbe, wie in dem zuerst erwähnten Versuche vom 8-tem Tage. Eine Schwärzung sowohl der distalen wie der proximalen Theile der Mauthner'schen Fasern war eingetreten. Sie unterschied sich aber in diesen Theilen durch ihre Intensität. Im caudalen Abschnitt war dieselbe bedeutend weniger ausgeprägt als im cerebralen Theil [1]).

Durch diese systematischen Versuche kann es als festgestellt angesehen werden, dass die in den ersten 8-tägigen Versuchen auffallende Schwärzung

[1]) In einer späteren Serie gelang die Schwärzung des degenerirenden Fasertheiles schon nach 90 Stunden ungefär. Nach dieser Serie sind die Mikrophotographien hergestellt.

beider Abschnitte der Mauthner'schen Fasern auf eine ungewöhnlich frühzeitig auftretende, retrograde Degeneration des distalen Theiles der durchtrennten Mauthner'schen Faser zurückzuführen ist.

Die Ergebnisse dieser Degenerationsversuche lassen sich in folgender Weise zusammenfassen.

Nach Durchtrennung der Mauthner'*schen Fasern tritt die sekundäre Degeneration derselben sehr früh ein. Besonders ist der frühe Eintritt der retrogaden Degeneration auffallend.*

Als schärfste und erste Degeneration ist die centripetale zu bezeichnen. Durch einem, wenn auch nur kurzen Intervall ist die centrifugale von der centripetalen zeitlich geschieden.

Oder anders ausgedrückt:

Die Mauthner'*schen Fasern können nicht ihren Ursprung in der Medulla oblongata besitzen, da dieselben in erster Hand in der Richtung gegen dieselbe degeneriren. Ihre Ursprungszellen sind im Rückenmark oder ausserhalb desselben zu suchen.*

Diese Resultate stehen im schroffsten Gegensatz zu der nach dem bisher bekannten, gangbaren Lesart. Eventuel liessen dieselben sich mit den Angaben von Fulliquet und Mayser vereinen.

Nach diesem Resultat ist es selbstverständlich, dass sich die Frage aufdrängt, wo der Ursprung dieser Fasern zu suchen sei.

Oben ist schon hervorgehoben, dass diese Fasern sich bis an das caudale Ende des Rückenmarkes mit Hilfe ihrer grossen Markscheide und ihres grossen Kalibers verfolgen lassen, im letzten Theil sich aber so verfeinern, dass sie nicht mehr von den umgebenden zu trennen sind.

Nach Edingers Wiedergabe der Angabe von Fritsch sollen dieselben ausserdem, das Rückenmark mit den letzten Sacralnerven verlassen. Wenn auch diese Angaben, welche alle in dem Glauben gemacht sind, dass die Mauthner-schen Fasern ihren Ursprung aus grossen Zellen der Oblongata nähmen, nach dem oben gelieferten Beweis über das irrthümliche dieser Ansicht, als wenig Vertrauen erweckend bezeichnet werden müssen, so haben mir doch meine eigenen Untersuchungen die Ansicht beigebracht, dass Untersuchungen dieser Region wohl zur Zeit wenig Ergebnisse versprechen. Wie unten noch hervorgehoben werden wird, halte ich dieselben aber auch aus anderen Gründen für zwecklos.

Mehr Aufklärung war dagegen aus einer Untersuchung der Medulla oblongata zu erwarten, wo nach der bisherigen Auffassung ihr Ursprung liegen sollte.

Für eine solche Untersuchung verfügte ich über verschiedene Gehirne in mehreren Exemplaren. Dieselben entstammten, *Esox lucius*, *Perca fluviatilis*,

Leuciscus rutilus und *Acerina cernua*. Diese Gehirne waren theils in Sublimat und abs. Alkohol, theils in 5 % Kalibichromicum Lösung gehärtet. Einige waren auch schon der Marchi-Behandlung unterworfen und stammten von Vorversuchen über den Einfluss dieser Methode auf das normale, centrale Nervensystem der Teleostier. Wie ich durch Versuche erfahren hatte, liessen dieselbe sich ausgezeichnet durch Anilinfarben, besonders Säurefuchsin in verdünnter wässeriger Lösung, tingiren.

Im Ganzen zeigten diese verschiedenen Thiere ganz analoge Verhältnisse. Da dieselben aber am deutlichsen bei *Leuciscus* zu sehen waren, werde ich die Beschreibung nach den hier erhobenen Befunden geben.

Wir finden hier, dass die Mauthner'schen Fasern ungefär an derselben Stelle, wo die Schwärzung derselben nach den Marchi-Präparaten aufhört, in ein complicirtes Endorgan eintreten.

Als Mittelpunkt dieses Organes ist eine ziemlich grosse Zelle zu betrachten, welche innerhalb einer weiten Kapsel liegt. Diese Zelle ist bedeutend grösser als die übrigen hier herum liegenden Zellen, welche in Verbindung mit den austretenden Acusticusfasern stehen.

Die Zelle besitzt eine etwas gebogene Birnenform und wendet das schmälere Ende medial- und ventralwärts.

An dem gehärteten Material füllt die Zelle die umgebende Kapsel nur zu einem kleinen Theil aus. Um die Zelle herum liegt eine feinkörnige Masse, welche durch etwas hellere Tinction deutlich von der Circumferenz der Zelle absticht. Von dieser Masse ziehen feine, oft bogenförmig verlaufende Fäden zur Kapsel, so dass der Anschein erweckt wird, als ob die Zelle innerhalb der Kapsel an feinen Fäden aufgehängt wäre.

Von der Mitte der dorsal und medial gewendeten Zellenseite entspringt mit ziemlich breiter Basis aus der umgebenden, hellen, körnigen Masse ein kegelförmiges Gebilde, welches sich direkte gegen das Lumen des weiter unten zu beschreibenden Endes des Mauthner'schen Faser wendet. Dasselbe endet spitz auslaufend und besteht, wie ich mich durch genaues Vergleichen, verschieden tingirter Schnitte, habe überzeugen können, aus derselben körnigen oder netzförmig gezeichneten Substanz, welche die Zelle selber innerhalb der Kapsel umgiebt.

Von der ventralen Seite des Zellenleibes entspringen mehrere Ausläufer. Die lateralen zeigen ungefär die Dicke der umliegenden Axencylinder und verlaufen anfangs innerhalb deutlich markirter Spalträume. Dieselben sind ebenfalls durch feine, körnige und heller tingirte Fäserchen mit den Wänden der Spalträume verbunden.

Weit lassen sich diese Dendriten nicht verfolgen. Nach kurzem Verlauf lösen dieselben sich in zahlreiche Äste auf, die sich bald einer weiteren Beobachtung entziehen.

Vom medialen Ende des Kapselraumes setzt sich eine auffallend breite, bogenförmig ventral und lateralwärts verlaufende Spalte fort. Innerhalb derselben liegt ein dicker Fortsatz der Zelle, welcher von dessen medialen Ende seinen Anfang nimmt. Wie die Zelle selber in der Kapsel ist dieser in der umgebenden Spalte durch feine zur Wand verlaufende Fasern scheinbar aufgehängt.

Dieser Hauptausläufer biegt nahe dem ventralen Rande der Medulla angelangt in die Längsrichtung über und ist alsdann schwer weiter zu verfolgen. Ich habe denselben nirgends aus der Medulla unter den austretenden Fasern wiedererkennen können.

Hierzu trägt noch bei, dass derselbe kurz bevor er in die Längsrichtung übergeht, einen ziemlich grossen Ast abgiebt, der sich darauf wieder in mehrere spaltet, eine Beobachtung die mir auch für den die Längsrichtung eingeschlagenen, gültig zu sein scheint.

Dieser Hauptausläufer scheint mir entschieden als der zur Zelle gehörende *Axencylinder* aufzufassen zu sein.

Alle die übrigen von der Zelle entspringenden Dendriten sind erstens viel unbedeutender und zerfallen zweitens äusserst schnell in kleinere ebenfalls verzweigte Äste. Wir hätten es hier also mit einer ungewöhnlich grossen Ganglienzelle zu thun, welche dem Golgi-Typus anzugehören scheint und ihre Verzweigung innerhalb des Acusticusursprungsgebietes der Hauptsache nach hätte.

In der Mitte des grossen Zellenkörpers ist ein grosser ovaler Kern sichtbar mit einem sehr grossen Kernkörperchen.

Die Mauthner'sche Faser verschmälert sich am letzten Ende und tritt dann in Verbindung mit einem Endapparat von eigenthümlicher Beschaffenheit. Zwischen dem letzten Ende der Faser und der Kapsel liegt ein dickes ringförmiges Gebilde mit einem Hohlraum versehen, welcher scheinbar die directe Fortsetzung des Hohlraumes der Markscheide der Mauthner'schen Faser bildet. Die Fibrillen, welche, blau gefärbt innerhalb der Markscheide noch kurz vorher beobachtet werden, sind in diesem Hohlraum nicht mehr anzutreffen, in demselben ist nur eine unbedeutende Menge der körnigen Substanz anzutreffen, welche innerhalb der Kapsel der grossen Nervenzelle aufliegt. Dagegen hat es den Anschein als ob die blauen Axenfibrillen der Mauthner'schen Faser sich in den letzten Theilen der Faser mehr gegen die Markscheide richteten um dann in dem Kranzförmigen Endgebilde zu verschwinden.

Dieser Kranz besteht nach zahlreichen Schnitten durch denselben zu urtheilen aus einer homogenen oder höchstens feinkörnigen Grundsubstanz innerhalb welcher sich zahlreiche Fasern sehr feinen Kalibers verfilzen.

An Querschnitten durch das Organ lassen sich nämlich ausser ganz kurzen Fasern kaum andere Bestandtheile als runde Querschnitte auffinden, wenn der Schnitt durch der Hohlraum des Kranzes geführt ist. Bei Schnitten, welche nur eine äussere Schicht des Kranzes abgeschält haben, ist diese Schicht aus einem feinen Netzwerk oder Filz kurzer Fasern zusammen gesetzt.

Wird die Schnittrichtung so geändert, dass die Schnitte parallel zur ventralen Basis der Medulla oblongata fallen, so ist dieses Endgebilde scheinbar nur aus einer unregelmässigen Anhäufung von runden Querschnitten oder Körnern zusammengesetzt. Fig. 37.

Ausser dem eben angeführten eigenartigen Schlusskranz der Mauthner-schen Faser, gehören aber noch andere Elemente zu dem die Ganglienzelle umgebenden Gebilde.

An Querschnitten durch die Oblongata finden sich medial und dorsal von der Kapsel eine Reihe von länglichen Fächern, die mit ihrem etwas sich verschmälernden Ende gegen die Kapsel gerichtet sind, so dass in einzelnen Schnitten ein beinahe fächerförmiges Bild entsteht.

In diesen fächerförmig angeordneten Räumen lassen sich längliche Körper auffinden, welche gegen die Kapsel zu in feine Fäden auslaufen.

Ein ganz anderes Bild bieten die oben schon erwähnten, mit der Basis der Oblongata parallel gelegten Schnitte. An diesen sieht man, dass nur das lateral gerichtete Ende der Kapsel direkt an Nervenbündel gränzt, während der ganze übrige Theil der Kapsel von einer dichten Anhäufung birnenförmiger Zellen umgeben ist. Diese liegen so dicht angehäuft, dass dieselben sich stellenweise geradezu verdecken. Ihr dickeres Ende ist peripherwärts gerichtet während das entgegengesetzte in einen feinen Fortsatz ausläuft, der zum kranzförmigen Endgebilde der Mauthner'schen Faser zieht. Einen weiteren Bestandtheil bilden zahlreiche Querschnitte von Fasern, die zwischen den schmalen Enden der Zellen zerstreut sind, und welche als Querschnitte der Zellenfortsätze aufgefasst werden müssen.

Um nun aus all diesen verschiedenen Befunden an den Mauthner'schen Fasern sich ein Bild über dieselben und vielleicht auch ihrer Functionen zu bilden, mögen die bisher getrennt beschriebenen einzelnen Beobachtungen kurz zusammengestellt werden.

In erster Hand sei dabei hervorgehoben, dass mir meine Untersuchungen s. Figg. 34 und 36, es als höchst wahrscheinlich, wenn nicht bewiesen, hin-

stellen, *dass diese* Mauthner'*schen Fasern aus einem Bündel einzelner Fibrillen bestehen.*

Diese Fibrillen besitzen eine gemeinsame Markscheide, innerhalb welcher sich stellenweise einzelne Nerven längsverlaufend antreffen lassen. Fig. 35.

Eine bedeutsame Beobachtung ist weiterhin die, dass die Fasern vom caudalen Ende nach oben zu im Allgemeinen *an Dicke zunehmen*. Diese Zunahme ist nicht ganz gleichmässig, es wechseln dickere Stellen mit dünneren ab. Im letzten Theil ihres Verlaufes verschmälern sich die Fasern wieder. Während ihres Verlaufes treten *feine, sich imprägnirende Äste durch die Markscheiden hindurch*. Innerhalb der Markscheiden biegen dieselben in die Längsrichtung um. Figg. 33 und 34.

Diese Fasern degeneriren in erster Hand nach Durchschneidung centripetal und bedeutend früher als die anliegenden Nerven, Tafel IX und X.

In der Medulla oblongata, im Ursprungsgebiet des Nervus Acusticus, *lösen sich die Fasern in einzelne Fibrillen auf, die mit einem complicirten Endapparat in Verbindung treten.*

Dieser Endapparat besteht aus *einer grossen Ganglienzelle*, von welcher ein sicher als *Axencylinder* zu deutender Fortsatz entspringt. Um diese Nervenzelle liegen zahlreiche kleinere, auch als Nervenzellen aufzufassende Zellen, deren Fortsätze, Axencylinder, sich mit den Fibrillen der Mauthner'schen Faser zur Bildung eines kranzförmigen Körpers in nächster Nähe der grossen Ganglienzelle verfilzen.

Im caudalen Ende liess sich keine Zelle auffinden die, so lange die Mauthner'schen Fasern noch als solche erkennbar waren, in Verbindung mit denselben standen, und als Ursprungszellen hätten gedeutet werden können.

Diese von mir gemachten Beobachtungen zeigen die meiste Uebereinstimmung mit der von Mayser gegebenen Beschreibung des Endorganes der Mauthner'schen Faser. Ebenso wie Mayser habe ich einen complicirten Apparat an der Endigungstelle dieser Fasern constatirt, dessen Haupttheil eine grosse Ganglienzelle ist. Von derselben setzt sich lateral und ventralwärts ein grober Axencylinder fort, der nach Mayser aus dem Rückenmark austreten soll, nach meinen Beobachtungen sich aber innerhalb des Rückenmarkes verzweigt.

Eine gewisse Uebereinstimmung herrscht auf den ersten Blick auch mit Fulliquet's Angabe über *Protopterus*, dass die Mauthner'schen Fasern sich in Fibrillen auflösen. Ein Beachten des weiteren Verhaltens dieser Fibrillen nach seinen und den oben gegebenen Darstellungen lässt aber sofort sehen, dass die Uebereinstimmung nur scheinbar ist.

Sonst stimmen die oben gegebenen Darlegungen nur noch darin mit den früheren Forschungen überein, dass hier wie von Goronowitsch bei *Accipenser*, Burckhardt bei *Protopterus*, Mayser bei *Cyprinoiden*, Béla Haller und v. Gehuchten bei Forellenembryonen Abzweigungen der Mauthner'schen Fasern gefunden worden sind.

Für die von mir nachgewiesene im Allgemeinen centripetalwärts vor sich gehende Dickenzunahme können nur zwei Erklärungen möglich sein.

Entweder gesellen sich, in centripetaler Richtung zunehmend, neue Elemente zu den primären, aus der Cauda stammenden, oder geben die Fasern je weiter centrifugalwärts sie gelangen Abzweigungen ab, deren Ursprung cerebralwärts zu suchen ist.

Die von mir studirte, secundäre Degeneration dieser Fasern lässt unter diesen beiden Alternativen wählen. Durch die in erster Hand cerebralwärts fortschreitende, secundäre Degeneration ist ein cerebraler Ursprung der Elemente der Mauthner'schen Fasern ausgeschlossen. Wir haben also den Ursprung dieser, die Mauthner'schen Faser bildenden Fibrillen caudalwärts zu suchen, und müssen wohl daher annehmen, dass die durch die Markscheide der Mauthner'schen Fasern neu hinzutretenden Elemente den Zuwachs repräsentiren.

Der Ursprung dieser durch die Markscheide allmälich eintretenden Fasern ist selbstverständlich in Ganglienzellen des Rückenmarkes oder der Spinalganglien zu suchen. *Wo* diese Zellen aber liegen ist bei der jetzigen Kenntniss der physiologischen Bedeutung der Ganglienzellen des Rückenmarkes nicht ohne weiteres zu eruiren. Durch besonders günstige Imprägnationen könnte diese Frage gelöst werden, aber der die sichersten und besten Resultate versprechende Weg liegt meiner Ansicht nach darin, die Bedeutung der verschiedenen Ganglienzellen auf dem Wege, der experimentell hervorgerufenen Degeneration nach verschiedenartigen, künstlichen Läsionen mit Hülfe der hier auch gelingenden Nissl'schen Reaction zu studiren.

Nach der, soweit ich sehen kann, von Fritsch zuerst ausgesprochenen und jetzt gangbaren Ansicht sollen die Mauthner'schen Fasern durch ihre allmäligen Abzweigungen Impulse des statischen Nerven VIII auf die Ganglienzellen übertragen, welche die Schwanzmuskulatur versorgen, und damit im engsten Zusammenhang mit dem Vermögen der damit versehenen Thiere, das Gleichgewicht im Wasser zu halten, stehen.

Diese Ansicht ist nun nach dem oben dargelegten nicht aufrecht zu halten. Kölliker [1]) hat ebenfalls seine Zweifel dagegen ausgesprochen, dass diese Auf-

[1]) Kölliker. Handbuch der Gewebelehre. Bd 2. Leipzig 1896.

fassung auf alle Kolossalfasern übertragen würde und hebt hervor dass für einige Fische, *Petromyzon*, *Accipenser*, *Protopterus* und *Barbus* diese Fasern als *centripetal* leitende aufgefasst werden müssen.

Nach meinen oben dargestellten Untersuchungen bin ich geneigt, folgende Hypothese über die Bedeutung dieser Fasern aufzustellen:

Dass die Mauthner'*schen Fasern bei Thieren, die eines besonderen Apparates zum Aufrecht erhalten des Gleichgewichtes bedürfen, allein vorkommen, und dass dieselben in eine innige Beziehung zum Acusticus stehen, spricht für ihre statische Bedeutung. Diese liegt aber nicht darin, dass dieselben motorische Impulse vom statischen Centrum entsenden, sondern darin, dass dieselben ein Hülfsorgan des Gleichgewichtscentrums bilden, diesem centripetale Sensationen mittheilen, welche alsdann durch andere motorische Bahnen den, die Muskelaction beherrschenden Zellen mitgetheilt werden.*

VI.

Strangsysteme des Rückenmarkes.

Durch genaue Verfolgung des zeitlich verschiedenen Auftretens von Markscheiden in verschiedenen Theilen des Rückenmarkes gelingt es einzelne Strangsysteme zu isoliren. Dieser zuerst von Flechsig eingeschlagene Weg zur genaueren Erforschung des Centralnervensystems ist jetzt bedeutend erleichtert, da mittelst der Weigert'schen Markscheidenfärbung auch die dünnste Markanlage durch eine blaue Farbe sichtbar zu machen ist.

Ein anderer Weg, um die Strangsysteme zu isoliren, besteht in dem experimentellen Hervorrufen von secundären Degenerationen. Diese letztere Methode bietet ausserdem noch den Vortheil, dass dieselbe gleichzeitig angiebt, in welcher Richtung das betreffende degenerirende System Impulse vermittelt.

Die secundär degenerirenden Theile des Nervensystems machen sich bei Anwendung der Marchi-Methode durch die scharfe Schwärzung ihrer Markscheiden kenntlich, bei Benutzung der Homén'schen durch die eigenthümliche und auffallende Färbung ihrer Axencylinder, wie es schon im vorigen Kapitel hervorgehoben ist.

Während die Flechsig'sche Methode sich auf die Untersuchung von Embryonen verschiedener Entwickelungsstufen stützt, werden zum Studium der secundären Degeneration ausgewachsene Thiere genommen.

Obgleich meine diesbezüglichen Untersuchungen bei weitem noch nicht abgeschlossen sind, und besonders die Endigungen oder Ursprünge der verschiedenen gefundenen Bahnen keineswegs bisher auch nur mit einiger Sicherheit bestimmt worden sind, halte ich es doch für angebracht, in diesem ersten Theil meiner Untersuchungen das über das Rückenmark selber gefundene zur Darstellung kommen zu lassen.

Die embryologischen Untersuchungen sind hauptsächlich an *Esox*embryonen angestellt worden, da bei den in Müller'sche Flüssigkeit gebrachten Em-

bryonen von *Salmo salvelinus* die Markentwickelung schon zu weit vorgeschritten war, so dass das allererste Auftreten nicht mehr zur Beobachtung kam.

Die Figg. 38 a—n zeigen in verschiedenen Höhen die erlangte Markscheidendarstellung bei anderthalb Wochen alten *Esox*embryonen. In diesem Stadium waren die ventralen Wurzeln noch nicht in ganzer Länge des Rückenmarkes Markhaltig. Die erste Markscheidenfärbung an denselben erhielt ich erst im oberen Dorsaltheil. Eine Markscheidendarstellung an den dorsalen Wurzeln gelang überhaupt gar nicht.

Ich will hier auf die Möglichkeit hinweisen, dass eine erste Anlage an diesen Theilen doch schon vorhanden gewesen wäre, obgleich die Farbe noch nicht so gut haftete, dass sie nicht bei der Entfärbung die allerdings mit so stark verdünnter Entfärbungsflüssigkeit vorgenommen wurde, dass 3—4 Tage hierzu nöthig waren, doch abgeblasst wäre.

Ein etwas schmutzig-dunkler Ton an den caudalen ventralen und den meisten dorsalen Wurzeln lässt sich vielleicht so deuten. Jedenfalls war aber die Markscheidenbildung hier nicht so weit vorgeschritten wie an den oberen ventralen.

In dem allerletzten Ende der Cauda Fig. 38 a findet man zu dieser Zeit nur einzelne wenige, markumgebene Fasern. Diese liegen alle der ventralen Seite des Rückenmarkes an und sind in der Mittellinie durch einen markfreien Raum von einander getrennt. Mehr dorsalwärts liegen die beiden Mauthner-schen Fasern, markumgeben und schon durch ihre Grösse auffallend.

Zwischen den Mauthner'schen Fasern und den ventralen, markumgebenen Strängen befindet sich die Anlage der accessorischen Commisur.

Weiter cerebralwärts nimmt die ventrale Anhäufung von Markscheidenquerschnitten ziemlich schnell zu. Neben den Mauthner'schen Fasern treten auch einzelne, wenn auch noch sehr feine blaugefärbte Ringe auf. Fig. 38 b.

Fig. 38 c stellt einen Querschnitt eben oberhalb der Anlage der Rückenflosse dar, und zeigt die von hier bis zum Uebergange in die Oblongata vorhandenen, markhaltigen Stränge.

An der ventralen Seite des Rückenmarkes nehmen die Markscheidenquerschnitte hier eine schmale aber ziemlich breite Region ein. Schnitte, welche ventrale austretende Wurzeln getroffen haben, lassen erkennen, dass die seitliche Begrenzung von den austretenden Wurzeln gebildet wird. Zu beiden Seiten der Mittellinie lagern sich einige wenige Querschnitte in dorsaler Richtung dem ventralen Bande an, so dass ein Bild entsteht, welches sich mit zwei Haken vergleichen lässt, deren kurze Querschenkel an einander gelegt sind.

Oberhalb der kurzen Querstücke ist ein markfreier Raum, die accessoriche Commisur.

Zu beiden Seiten der Mittellinie von dieser accessorischen Commisur bis zu den Mauthner'schen Fasern und um dieselben herum findet sich ein schmaler dorsoventral liegender Streifen von blaugefärbten Markscheiden.

Fig. 38 d entstammt der Region, welche den Uebergang zur Medulla oblongata bildet. An derselben ist zufälligerweise gerade die accessorische Commisur nicht deutlich sichtbar. Die ventralen Stränge sind etwas vom ventralen Rand in dorsaler Richtung verschoben, besonders in dem medialen Theil.

Die beiden, dorsoventral liegende Streifen blauer Markscheiden behalten dieselbe Lage wie vorher bei. Auch die Mächtigkeit derselben ist in diesem wie im folgenden Schnitt die gleiche wie in Fig. 38 c.

Fig. 38 e aus der unteren Oblongata zeigt die ventralen Bündel seitwärts verlagert. Dieselben sind in der Figur sehr klein gezeichnet. Dieses hing mit der in allen Schnitten aus dieser Region vorkommenden leichten Entfärbbarkeit zusammen. Vielleicht auch damit, dass ein Theil schräg oder in der Längsrichtung getroffen war, wie es in noch grösserer Ausdehnung in Fig. 38 f der Fall ist.

Hier liessen sich im ventralen Theil nirgends blaue Ringe auffinden, dagegen wohl in den Schnittheilen dorsal gerichtete blaue Fasern und einzelne Querschnitte.

Die beiden dorsoventralen Stränge sind hier bedeutend mächtiger als in Fig. 38 e.

Fig. 38 g zeigt gar keine Andeutung der früheren, ventralen Stränge. Aus einem Vergleich mit zwischenliegenden Schnitten scheint es mir als ob die im Cerebellum an den Seiten sichtbaren, blauen Fasern möglicherweise die Fortsetzung wären. Ganz entschieden will ich dieses nicht behaupten, hoffe aber während der weiteren Fortsetzung dieser Untersuchungen darüber bestimmteres zu finden.

Die sich dorsal verschiebenden blauen Bahnen sind jetzt in die Region gelangt, wo dieselben dem an höheren Thiere so vielfach studirten hinteren oder centralen Längsbündel, Fasciculus longitudinalis dorsalis gleichzustellen sind.

Ohne näher auf die detaillirten Angaben über das Verhältniss dieses Bündels zu den in dessen Verlauf liegenden Hirnnervenkernen eingehen zu wollen, will ich nur in grossen Zügen dieses Mal den weiteren Verlauf desselben schildern.

In Fig. 38 k, einige Schnitte weiter cerebralwärts, bilden die Markscheiden des Fasciculus longitudinalis dorsalis ein Bild, welches an zwei Klammern erinnert. Dieselben sind hier schon von geringerer Mächtigkeit als im vorher-

gehendem Schnitt. Dieses beruht darauf, dass ein kleiner Theil der ventral von den hinteren Längsbündel liegenden Querschnitte sich seitwärts verliert.

Im folgenden dargestellten Schnitt liegen die beiden Längsbündel weiter von einander entfernt und bilden rundliche Stränge. Die Schnitte Figg. 38 k und l haben den austretenden und mit Markscheiden versehenen Oculomotorius getroffen. Aus Fig. k ist zu sehen, dass das hintere Längsbündel beinahe durch das Ursprungsgebiet dieses Nerven zieht.

Fig. 38 m zeigt die Kreuzung dieser Längsbündelfasern und Fig. 38 n die letzten auffindbaren Spuren derselben.

Die Fig. 39 a—h zeigen die Bilder welche bei der Weigert'schen Methode an entsprechenden Schnitten vom Rückenmark 3-wöchentlicher *Esox*embryonen erhalten werden. Die hauptsächlichsten Unterschiede liegen in dem Auftreten von dorsolateralen Strängen. Ausserdem haben die ventralen Stränge bedeutend an Mächtigkeit gewonnen.

In der Oblongata treten schon neue Bahnen auf, von welchen ich an dieser Stelle absehe, besonders auf dem Grund dass mein weiteres Material bisher noch nicht lückenlos ist.

Die beiden Fig. 40 und 41 geben je eine horizontale und saggitale Projection einer Reihe von entsprechenden Schnitten in eine Ebene wieder.

Aus Fig. 40 ist zu sehen, dass diese markhaltigen Bahnen, welche nach Schnitten von Embryonen wiedergegeben sind, die ein Alter von 2 Wochen nach dem Ausschlüpfen erreicht hatten, sich vor dem Infundibulum theilweise kreuzen, theilweise aber auch ungekreuzt noch vorwärts ziehen. Dieselben liessen sich ungefär ebensoweit nach vorn von dem Oculomotorius verfolgen. Die Hauptkreuzung liegt etwas vor dem Anfang des Oculomotorius.

Fig. 41, eine Projection von Sagittalschnitten eines ebenso alten Embryos zeigt uns diese Bahn im Längsschnitt. An derselben lässt sich in diesem Alter noch keine ventralwärts verlaufende Abzweigung erkennen wie sie von Edinger nach Schnitten eines 4 cm langen Cyprinoiden gegeben wird.

Eine ähnliche Bahn habe ich an *Salmo salvelinus* gefunden, allerdings erst in viel älteren Stadien und nehme daher an, dass dieselbe bei *Esox*embryonen dieser Grösse noch nicht zur Ausbildung gelangt ist.

Die hier gegebene fragmentarische Darstellung über das hintere Längsbündel und die Vorderstranggrundbündel hätte ich wohl auf spätere Zeit verschoben, wo ich in meinen Untersuchungen mehr Aufmerksamkeit einer Reihe

[1]) Edinger. Vorlesungen über den Bau der nervösen Centralorgane. Fünfte Auflage. Leipzig 1896.

von zu erforschenden Details hätte widmen können, wenn nicht aus denselben ein Umstand hervorgegangen wäre, der auf unsere jetzige Auffassung derselben von Einfluss sein könnte.

Im ersten Theil seines Handbuches beschreibt KÖLLIKER das hintere Längsbündel in folgender Weise: „Der Fasciculus longitudinalis dorsalis geht aus den Vorderstranggrundbündeln des Markes hervor, stellt eine gekreuzte sensible Leitung II. Ordnung dar, die bei Reflexen betheiligt ist und endet in den Kernen des XII., VI, IV und III Nerven".

Kurze Zeit darauf erschien eine Specialuntersuchung über das hintere Längsbündel der Forelle von v. GEHUCHTEN [1]). Diese Untersuchung hat ergeben, dass „Le faisceau longitudinal posterieur est donc un faisceau formé exclusivement de fibres descendantes. Il commence dans le cerveau moyen et peut être poursuivi jusque dans le cordon antérieur de la moelle épinière. Ces fibres, les plus proximales ont leur cellules d'origine dans le lobe contral, dans le noyau supérieur du faisceau longitudinal postérieur".

Auf Grund dieser Arbeit v. GEHUCHTEN's spricht sich KÖLLIKER im zweiten Theil seines Handbuches dahin aus, dass diese Frage von weiteren Untersuchungen abhängig zu machen sei [2]).

Aus meiner kurzen, oben gegebenen Darstellung geht nun hervor, dass die Vorderstranggrundbündel mit dem hinteren Längsbündel bei *Esox* ein zusammenhängendes System bilden. Dieselben erhalten zu gleicher Zeit im frühesten Stadium der Markscheidenentwickelung ihre Markscheiden und lassen sich ohne Continuitetstrennung oder irgendwie ohne eines sonst zu bemerkenden Zwischengliedes von der Cauda bis zur Gegend vor dem Oculomotorius-Ursprung an Serienschnitten verfolgen, ganz in derselben Weise wie es KÖPPEN [3]) für die Eidechse auch geschildert hat und EDINGER es von jungen Cyprinoiden abbildet.

Es scheint mir nun dass mit diesem gemeinsamen systemartigen Auftreten der Vorderstanggrundbündel und des hinteren Längsbündels auch wahrscheinlich eine übereinstimmende Function verbunden sein müsste, oder dass die Leitung der durch sie fortgepflanzten Impulse in gleicher Richtung gehen müsste.

So viel ich KÖLLIKER verstehe, ist für ihn dieser Ausgangspunkt auch maassgebend gewesen, ohne dass er aber das gleichzeitige Auftreten der Markumhüllung in den beiden Theilen des Systems hervorhebt.

---

[1]) v. GEHUCHTEN. Le faisceau longitudinal posterieur. Bulletin de L'Academie Royal de Médecine de Belgique. Bd 9. Ser. IV. 1895.

[2]) Da die Litteratur sowohl bei v. GEHUCHTEN wie KÖLLIKER weitläufig zusammengestellt ist kann ich bei der hier stattfindenden kurzen Behandlung dieses Gegenstandes von einer Wiederholung derselben absehen.

[3]) KÖPPEN. Ueber das hintere Längsbündel. Neurologisches Centralblatt. Bd 8, 1839.

Dass nun die Vorderstranggrundbündel centripetal Impulse fortleiten, muss als feststehend bezeichnet werden. Um hierin auch eine sichere Basis zu erhalten, habe ich *Leuciscus*exemplare 20 Tage mit durchschnittenem Rückenmark leben lassen und die Oblongata nach Marchi behandelt. Hierbei tritt in den Vorderstranggrundbündeln eine aufsteigende Degeneration auf.

Ich will hier noch weiter hinzufügen, dass auch innerhalb des Gehirns in den hinteren Längsbündeln eine deutliche aufsteigende Degeneration sichtbar ist. Dieselbe umfasst hier aber bei weitem nicht das ganze Bündel, wie es noch im mittleren Theil der Oblongata der Fall ist.

Von hier bis zur Kreuzungsstelle der Mauthner'schen Fasern nimmt die Degeneration der Markscheiden im hinteren Längsbündel auf einmal bedeutend ab, wahrscheinlich weil die degenerirten Fasern aus demselben austreten und zu den hier liegenden Nervenkernen treten. Durch Eintritt neuer Fasern wird der Verminderung des Querschnittes desselben vorgebeugt.

Die wenigen noch restirenden Fasern mit geschwärzter Markscheide lassen sich noch ein Stück weiter nach vorn vom Kreuzpunkte der Mauthner'schen Fasern verfolgen, um sich dann zu verlieren.

Färbt man Schnitte aus dieser Gegend mit wässeriger Säurefuchsinlösung einfach nach, so lässt sich leicht constatieren, dass die Axencylinder innerhalb der schwarzen Scheiden bedeutend dicker sind als die in den ungeschwärzten Scheiden. Diese Anschwellung kann nun nicht gern anders als ebenfalls als Zeichen der secundären Degeneration gedeutet werden die nach Durchtrennung des Rückenmarkes aufgetreten ist.

An dem einzigen in der Litteratur niedergelegten Fall, der Degenerationen des hinteren Längsbündels am Menschen zeigte infolge multipler kleiner Heerde hat Jakowenko [1]) ebenfalls in den hinteren Längsbündeln eine aufsteigende Degeneration gefunden.

Andere Untersuchungen über dieses Längsbündel, die sich auf Degenerationsversuche stützten habe ich nicht ausgeführt gefunden.

Dieser Methode ist aber, wenn es gilt die Bedeutung eines bestimmten Bündels Nervenfasern festzustellen, ob centripetal ob centrifugal leitend, jeder anderen überlagen, sowohl was Exactheit der Resultate, wie leichte Deutung der Beobachtungen anbelangt.

Es ist nun nach dem oben dargelegten aber nöthig nach einer Erklärung für die v. Gehuchten'schen Befunde zu suchen. In erster Hand scheint es mir

---

[1]) Jakowenko. Zur Frage über den Bau des hinteren Längsbündels. Neurologisches Centralblatt Bd 7, 1888.

nun gar nicht unmöglich, dass sich an eine aufsteigende Bahn auch Fasern anlagern können, die eine andere Leitungsrichtung repräsentiren, und die bei Imprägnationen dieselbe *allein* zu repräsentiren scheinen. Denn, dass die von v. GEHUCHTEN gefundenen, aus im Mittelhirn liegenden Zellen entstammenden Fasern in der Region verlaufen, die nach meinen Untersuchungen über die Markscheidenentwickelung dem hinteren Längsbündel angehört, kann ich nach eigenen Imprägnationspräparaten bestätigen.

Diese Erklärung scheint mir um so annehmbarer, als meine Imprägnationen oftmals Fasern zeigen, welche in dieser Region verlaufen, einzelne Collateralen abgeben, aber weder am distalen noch proximalen Ende mit Zellen zusammenhängen. So lange man sich nur auf GOLGI-Präparate stützen kann, ohne Degenerationsversuche zur Unterstützung herbeizuziehem, ist es nicht möglich sicher anzugeben, wo diese Fasern ihren Ursprung haben.

Allerdings habe ich solche abgeschnittene Fasern viel häufiger erhalten als es nach den v. GEHUCHTEN'schen Abbildungen zu erwarten wäre. Vergleicht man aber z. B. die Figg. 1, 3, 4 und 5 mit den Figg. 7 und 8 in der Arbeit v. GEHUCHTEN's mit einander so geht aus dem, räumlich verschiedene Ebene passirenden, Verlaufes seiner hinteren Längsbündel hervor, dass diese Abbildungen kaum nach einen einzelnen, beinahe eine mathematische Ebene repräsentirenden Schnitte, gezeichnet sein können, selbst wenn man die mögliche grössere Dicke von GOLGI-Schnitten in Rechnung führt. Dieselben müssen als Combinationsbilder oder mehr chematische Darstellungen seiner Ansicht aufgefasst werden. Dass es aber leichter ist, breite Bahnen, wie meine Markscheidenfärbungen durch Projection in eine Ebene zu vereinigen, als einzelne Fasern in derselben Weise mit einander zu verbinden, wird kaum bestritten werden können.

Meine durch Projection verschiedener Schnitte in dieselbe Ebene gewonnenen Abbildungen zeigen die gleichen von einer geraden Linie abweichenden Krümmungen wie die v. GEHUCHTEN'schen Abbildungen, und stützen daher die Auffassung dieser als Combinationsbilder.

Die oben nach Markscheidenfärbungen früher Stadien, in welchen das hintere Längsbündel und die Vorderstranggrundbündel als isolirtes zusammenhängendes System auftraten, wie die später dargelegte Auffassung der v. GEHUCHTEN'sche Abbildungen und Beobachtungen, welche sich auf eigene Präparate derselben Art stützen, und besonders das Auftreten secundär degenerirter Fasern innerhalb der hinteren Längsbündel nach Durchschneidung des Rückenmarkes unterhalb der Dorsalflosse bei *Leuciscus rutilus* sprechen dafür, dass v. GEHUCHTEN's Untersuchung keineswegs das letzte Wort in der Frage über die Function des hinteren Längsbündels gesprochen hat.

Das letzte Wort in dieser Frage ist meiner entschiedenen Ansicht nach auch nicht mit der Golgi-Methode zu erbringen, dasselbe muss sich in erster Hand auf secundäre Degenerationen stützen, und erst, wenn diese unanfechtbar nachgewiesen haben, *wo* das Ende oder der Ursprung dieser Bündel gesucht werden soll, tritt die Golgi-Methode in ihr Recht, die feineren Verhältnisse aufzuklären.

Aus meinen bisherigen Degenerationsversuchen, die sich nur auf vollständige Durchtrennungen des Rückenmarkes stützen, scheint es hervorzugehen, dass die anderen, erst später mit Markscheiden sich versehenden Systeme, nicht ganz geschlossene Bahnen bilden.

Werden nämlich Präparate von verschiedenen ähnlichen Experimenten verglichen, so zeigen sich stets geringe Unterschiede, auffallend abweichend von den stets eindeutigen an den Vorderstranggrundbündeln.

Dieselben wechseln nicht der Region nach, aber wohl im Umfange bei verschiedenen Regionen.

Aus meinen Versuchen will ich aber noch keinen weiteren Schluss ziehen als, dass die aufsteigend degenerirenden Fasern der grössten Anzahl nach gegen den Centralkanal zu verschoben zu sein scheinen, während die peripheren Regionen weit weniger centripetal degenerirende Fasern aufweisen. Die centrifugale secundäre Degeneration scheint diese Beobachtung zu stützen.

Erklärung der Abbildungen.

Tafel I.

Figg. 1—4. Rückenmarksschnitte von Embryonen von *Salmo salvelinus*, 15—20 mm lang, aus dem mittleren Rückenmark mit Ependym- und Gliazellen. Osmiumchromsilberimprägnation. *Zeiss* Apochromat. 16,0 mm. Compensationsocular 12.

Fig. 5. Rückenmarksschnitt aus der Höhe der Dorsalflosse von einem 2 Wochen alten *Esox lucius*. Cox-Methode. *Zeiss* Apochromat. 16,0 mm. Compensationsocular 12.

Fig. 6. Rückenmarksschnitt von einem 30 mm langen *Esox*embryo. Cox-Methode. *Zeiss* Apochromat. 16,0 mm. Compensationsocular 12.

Tafel II.

Fig. 9. Osmiumchromsilberimprägnation des Rückenmarkes von *Salmo trutta*, ausgewachsenes Exemplar. *Zeiss* Apochromat. 16,0 mm. Compensationsocular 4.

Fig. 11. Theil aus Fig. 9. *Zeiss* Apochromat. 16,0 mm. Compensationsocular 12.

Fig. 13. Aus dem Rückenmark eines jungen Exemplares von *Perca fluviatilis*. Osmiumchromsilberimprägnation. *Zeiss* Apochromat. 16,0 mm. Compensationsocular 12.

Fig. 16. Theil eines Rückenmarksschnittes von *Leuciscus rutilus*. Osmiumchromsilberimprägnation. *Zeiss* Apochromat. 16,0 mm. Compensationsocular 12.

Fig. 17. Wie Fig. 16 a.

Fig. 20. Theil eines Rückenmarksschnittes von *Perca fluviatilis*. Ausgewachsenes Exemplar. Osmiumchromsilberimprägnation. *Zeiss* Apochromat. 16,0 mm. Compensationsocular 12.

Tafel III.

Fig. 12. Rückenmarksschnitt von *Perca fluviatilis*. Ausgewachsenes Exemplar. Osmiumchromsilberimprägnation. *Zeiss* Apochromat 16,0 mm. Compensationsocular 12.

Fig. 14. Combination dreier aufeinander folgender Längsschnitte des Rückenmarkes von *Salmo trutta*. Ausgewachsenes Exemplar. Osmiumchromsilberimprägnation. *Zeiss* Apochromat. 16.0 mm. Compensationsocular 4.

Fig. 15. Aus dem Rüchenmark von *Leuciscus rutilus*. Ausgewachsenes Exemplar. Osmiumchromsilberimprägnation. *Zeiss* Apochromat. 16,0 mm. Compensationsocular 12.

Fig. 18. Theil eines Rückenmarksschnittes von *Perca fluviatilis*. Grosses Exemplar. Osmiumchromsilberimprägnation. *Zeiss* Apochromat. 16,0 mm. Compensationsocular 12.

Fig. 19. Wie Fig. 18.

Tafel IV.

Die Figg. 7, 21, 22 und 23 sind nach Rückenmarksschnitten etwas oberhalb der Dorsalflosse von c:a 40 mm langen *Esox*embryonen gezeichnet. Cox-Methode. *Zeiss* Apochromat. 16,0 mm. Compensationsocular 12.

Die Figg. 24 u. 25 entstammen 30 mm langen Embryonen von *Salmo salvelinus*. Cox-Methode. *Zeiss* Apochromat. 16,0 mm. Compensationsocular 12.

Tafel V.

Fig. 8. Rückenmarksquerschnitt von *Anguilla vulgaris*. v. Gieson'sche Färbung. *Zeiss* Apochromat. 16,0 mm. Compensationsocular 6.

Fig. 28. Schnitt aus dem mittleren Dorsalmark von *Perca fluviatilis*. Nissl'sche Färbung. a *Zeiss* Apochromat. 8,0 mm. Compensationsocular 6. b und c *Zeiss* Apochromat. 8,0 mm. Compensationsocular 18.

Fig. 30. Dorsales Septum aus dem mittleren Dorsalmark von *Acerina cernua*. Nissl-Präparat. *Zeiss* Apochromat. 8,0 mm. Compensationsocular 18.

Fig. 31. Dorsalzelle von *Perca fluviatilis*. Nissl'sche Färbung. *Zeiss* Apochromat. 2,0 mm. Compensationsocular 8.

Figg. 33 und 34. Querschnitte von Mauthner'schen Fasern. Formolchromsilberimprägnation. *Zeiss* Apochromat 8,0 mm. Compensationsocular 8.

Fig. 35. Mauthner'sche Fasern kurz vor der Kreuzung von *Esox lucius*. Marchi-Präparat nach Durchtrennung des Rückenmarkes und Nachfärbung mit Säurefuchsin. *Zeiss* Apochromat. 8,0 mm. Compensationsocular 18.

Fig. 36. Querschnitt durch das Endorgan der Mauthner'schen Faser. Anilinblau-Pikrinsäure. *Zeiss* Apochromat. 16,0 mm. Compensationsocular 18.

Fig. 37. Flachschnitt durch das Endorgan der Mauthner'schen Faser. Anilinblau-Pikrinsäure. *Zeiss* Apochromat. 8,0 mm. Compensationsocular 12.

Tafel VI.

Fig. 10. Nach einem Weigert-Präparat des Rückenmarkes von *Salmo trutta*. Ausgewachsenes Exemplar. *Zeiss* Apochromat. 16,0 mm. Compensationsocular 12.

Fig. 26 a wie Fig. 10. b & c *Zeiss* Apochromat. 16,0 mm. Compensationsocular 18.

Fig. 27. Ventraler Abschnitt eines Querschnittes des Rückenmarkes von *Perca fluviatilis*. Ausgewachsenes Exemplar. Nissl-Präparat mit Säurefuchsin nachgefärbt. *Zeiss* Apochromat. 8,0 mm. Compensationsocular 4.

Fig. 29. Dorsales Septum des Rückenmarkes von *Perca fluviatilis*. Ausgewachsenes Exemplar. *Zeiss* Apochromat. 8,0 mm. Compensationsocular 6.

Fig. 32. Dorsaltheil des Rückenmarkes von *Acerina cernua*. Hämatoxylinfärbung. *Zeiss* Apochromat. 16,0 mm. Compensationsocular 8.

Tafel VII.

Fig. 38 a—n. Halbschematische Wiedergabe von Schnitten einer nach Weigert gefärbten Serie, einem anderthalb Wochen alten *Esox*embryo entstammend. *Zeiss* Apochromat. 16,0 mm. Compensationsocular 4.

Tafel VIII.

Fig. 39 a—h. Halbschematische Serie von WEIGERT-Präparaten von einem c:a 3 Wochen alten *Esox*embryo. *Zeiss* Apochromat. 16,0 mm. Compensationsocular 4.

Fig. 40. In eine Fläche projicierte Frontalschnitte des Gehirnes von einem 3 Wochen alten *Esox*embryo. WEIGERT'sche Färbung. *Zeiss* Apochromat. 16,0 mm. Compensationsocular 4.

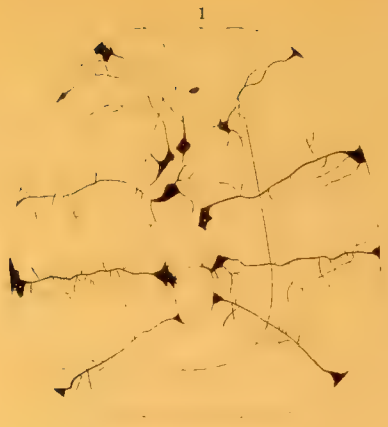
Fig. 41. In eine Ebene projicierte Sagittalschnitte des Gehirnes von einem 2 Wochen alten *Esox*embryo. WEIGERT'sche Färbung. *Zeiss* Apochromat. 16 mm. Compensationsocular 4.

Tafel IX.

Fig. 42 a—f. Eine Serie Mikrophotographien nach Präparaten von einem *Esox-Rückenmark*. Das Thier hatte 90 Stunden nach der Durchtrennung des Rückenmarkes, welche zwischen e und f lag, gelebt. MARCHI-Behandlung.

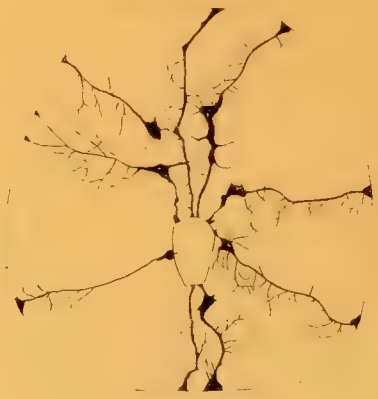
Tafel X.

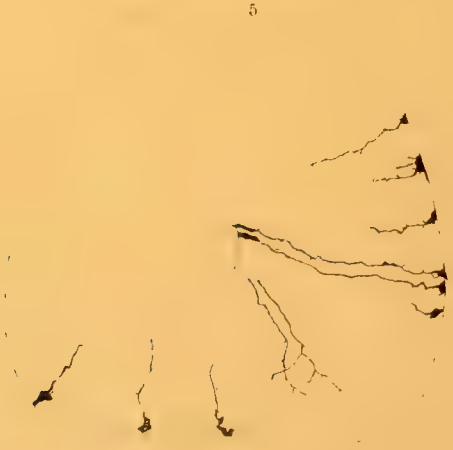
Fig. 43 a—e. Wie Tafel IX aber von *Leuciscus rutilus*. Durchtrennung zwischen d u. e.

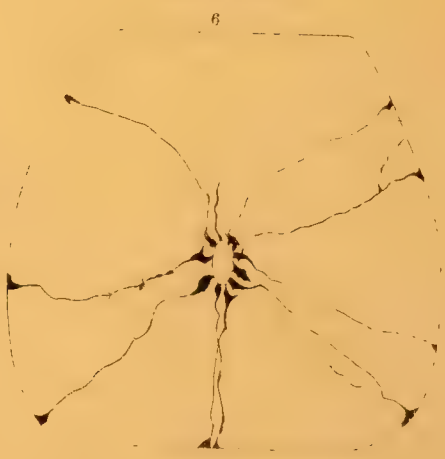

1

2

3

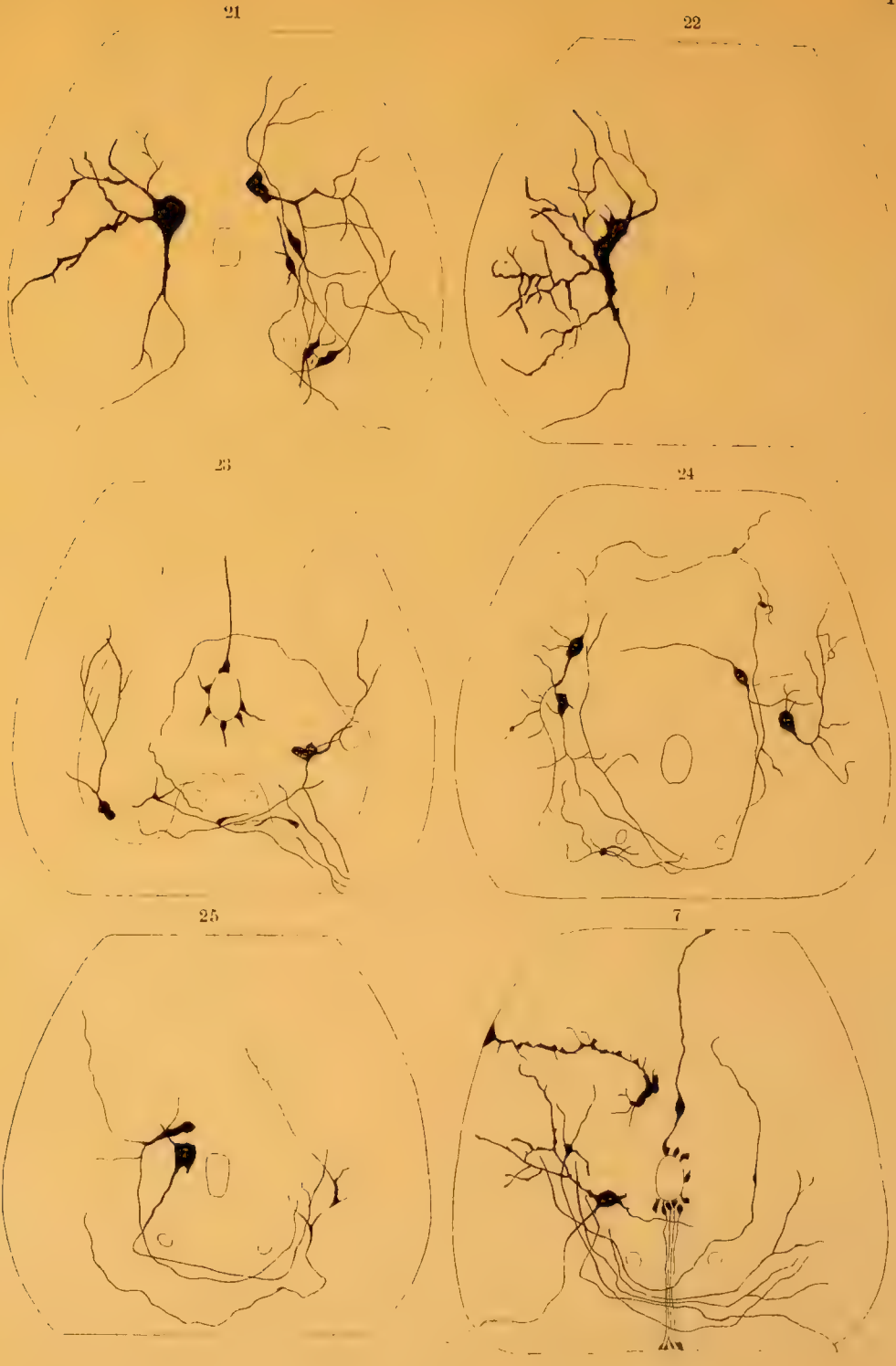

4


5

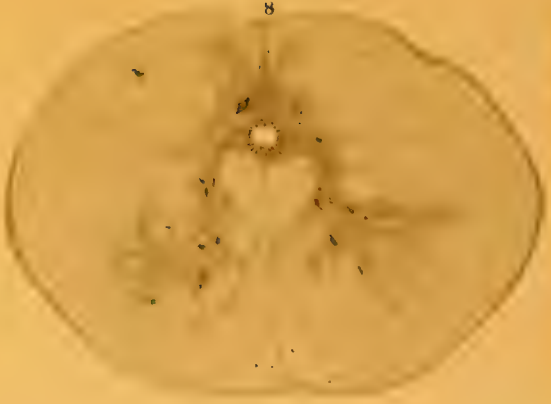

6

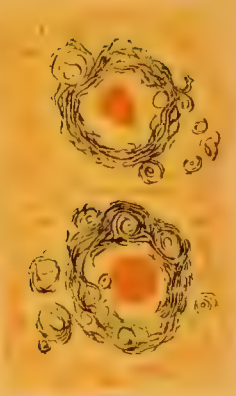
16
13
20
17
9
11

18
19
15
12
14

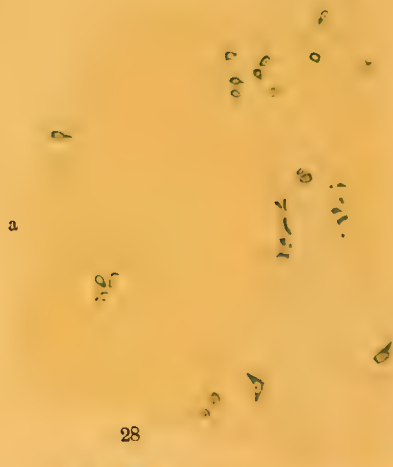

21
22
23
24
25
7

8





35



a

28

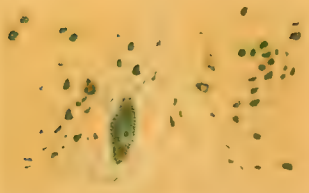
33

34

37

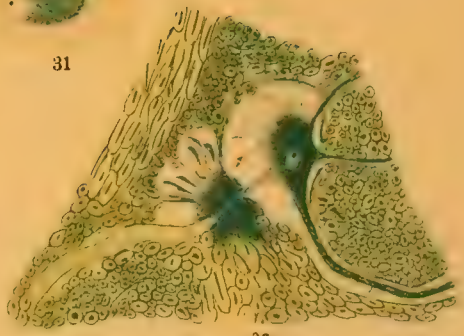
b

c



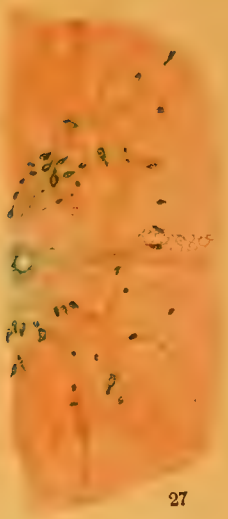
30

31

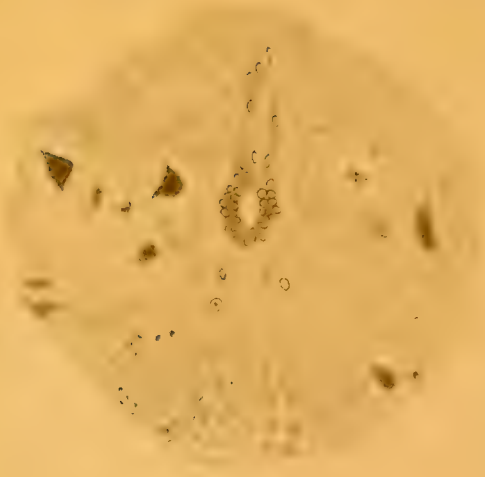


36

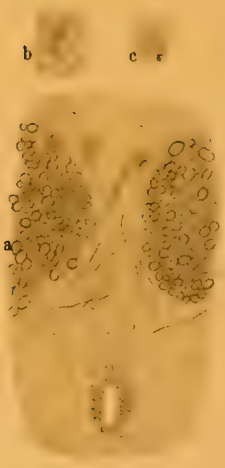
32



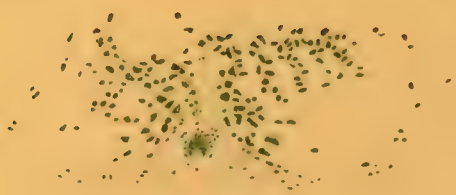
27



10



26



29

a
b
c
d
f
e
g
i
h
k
m
l
n

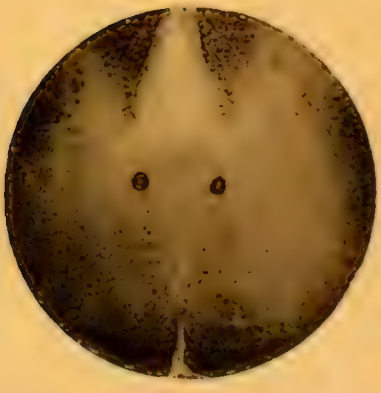
a
b
c
d
39
e
f
g
h
40
41

a

b

c

d



e

f

a

b

c

d

e

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ.
TOM. XXIV. № 5.

BEITRÄGE
ZUR KENNTNIS
DER
MORPHOLOGIE UND SYSTEMATIK
DER HYDRACHNIDEN.

VON

ERIK NORDENSKIÖLD.

(MIT ZWEI TAFELN.)

(VORGETRAGEN AM 14. MARZ 1898.)

Die Untersuchungen über die Anatomie, Morphologie und Systematik der Hydrachniden und verwandten Acariden, deren Ergebnisse in der vorliegenden Abhandlung erscheinen, habe ich am hiesigen zoologischen Institut angefangen, später auf einer viermonatlichen Studienreise an den zoologischen Instituten der Universitäten Padua und Leipzig fortgesetzt und schliesslich hierselbst beendigt. Es ist mir eine angenehme Pflicht hier den Herren Professoren G. Canestrini in Padua und J. A. Palmén in Helsingfors meinen ehrerbietigsten und herzlichsten Dank auszusprechen für das besondere Wohlwollen, mit welchem sie meine Studien geleitet haben. Ich bedaure, dass der Tod des Herrn Geheimrats Professor R. Leuckart mich hindert, ihm meinen Dank zu zollen für die ausgezeichnete und wohlwollende Anleitung, die ich während meiner Studien in seinem Institute von ihm genossen habe. Ferner bin ich den Herren Schuldirektor Dr. G. R. Piersig in Annaberg (Sachsen), Assistent Dr. O. zur Strassen in Leipzig, sowie den Dozenten Dr. E. Reuter und Dr. K. M. Levander in Helsingfors, die mich zu verschiedenen Zeiten während meiner Arbeit mit Rat und That unterstützt haben, zu vielem Danke verpflichtet.

Helsingfors im April 1898.

Erik Nordenskiöld.

I.

Zur Morphologie und Anatomie der Hydrachniden.

Die Familie der Hydrachniden ist gewiss eine der in systematischer Hinsicht von früher her am besten untersuchten unter den Familien der Acariden. Schon mehrere der Vorgänger Linnés beschrieben rote Wassermilben: z. B. Frisch, Roesel u. a. Linné selbst beschränkte sich gleich den genannten Forschern darauf, einen *Acarus aquaticus* mit den Charakteren „*ruber*, *depressus*" zu beschreiben. Charaktere, welche bei manchen Hydrachnidenformen stimmen. — Der Erste, der eine selbständige Bearbeitung der Familie unternahm, war Otto Friedrich Müller *(16)*. Er bildete ein selbständiges Genus, *Hydrachna*, und unterschied 49 Arten, von welchen jedoch eine grosse Anzahl nunmehr schwer zu identificieren sind. Hiermit waren die Hydrachniden in einer Weise, wie damals kein anderer Teil der Acariden, bearbeitet, und die Arbeit Müllers trieb manche Forscher zum Fortsetzen und Erweitern seines Gebietes an. Es ist nicht meine Absicht alle diejenigen, welche zur Erweiterung der Hydrachnidensystematik beigetragen haben, hier aufzuzählen; eine solche geschichtliche Uebersicht ist übrigens mehrmals gegeben worden, am vollständigsten von Neuman *(17)* und Piersig *(21)*. Einige der wichtigsten Namen will ich jedoch erwähnen: von den unmittelbaren Nachfolgern Müllers: Latreille, Dugès, Koch, Bruzelius, von neueren Forschern: Kramer, Neuman, Haller, Könike, Piersig.

Die obengenannten Forscher haben jedoch die Familie der Hydrachniden ausschliesslich in systematischer Hinsicht behandelt. Erst viel später hat sich das Interesse der Forschung auch der Biologie, der Anatomie und der Entwickelungsgeschichte der Hydrachniden zugewendet. Spärliche Beobachtungen in dieser Hinsicht wurden freilich schon früh gemacht: so z. B. über das Eier-

legen der Weibchen, über Parasitismus und Metamorphose der Larven u. s. w., aber auch die einfachsten Elemente der Anatomie waren bis zur Mitte dieses Jahrhunderts völlig unbekannt, und von der Lebensweise der Tiere hatten manche der fleissigsten Systematiker recht unvollständige Vorstellungen.

Die erste eingehende Untersuchung der Anatomie der Acariden, welche auch Einiges auf die Hydrachniden bezügliche enthält, wurde von F. DUJARDIN *(6)* im Jahr 1845 veröffentlicht; seine Arbeit beweist jedoch, wie unvollständig die Begriffe von der wahren Natur der Acariden noch zu dieser Zeit waren; er behauptet z. B, dass die Acariden eines besonderen Verdauungskanales entbehren, dass der Hermaphroditismus unter denselben gewöhnlich ist u. s. w.

Eine ziemlich genaue Untersuchung über die Anatomie der Hydrachniden liefert dagegen CLAPARÈDE *(4)*. Obschon wahrscheinlich ohne Hülfe der Dissection ausgeführt, liefern seine Studien über *Atax bonzi* den ersten, einzelner Irrthümer ungeachtet, wertvollen Beitrag zur Kenntnis der Anatomie der Hydrachniden. Noch bedeutender sind seine Untersuchungen über die Entwickelungsgeschichte der genannten Hydrachnide. Er giebt hier ein gutes Bild der verwickelten Metamorphose des Tieres und beschreibt eingehend die verschiedenen Stadien derselben.

Der russische Forscher CRONEBERG hat die Anatomie sowohl der Hydrachniden als der mit diesen verwandten Trombidien studiert. Seine Abhandlung über *Eylais extendens (5)* lieferte neue, wichtige Beiträge zur Kenntnis der Anatomie der Hydrachniden: Mundteile, Digestionsorgane u. s. w. wurden sorgsam disseciert und genau abgebildet. Die Arbeit ist in russischer Sprache verfasst und also den meisten europäischen Forschern nicht zugänglich. Dasselbe gilt auch für KRENDOWSKYS *(13)* Abhandlungen über die Entwickelungsgeschichte der Hydrachniden, in welchen recht viele wertvolle Beiträge zur Kenntnis der Metamorphose dieser Tiere gegeben sind; speciell hat KRENDOWSKY sich um die Kenntnis des Parasitismus der Larven verdient gemacht.

Obwohl nicht eigentlich zum Gebiet der Hydrachnidenforschung gehörend, muss doch HENKINGS ausgezeichnete Untersuchung über Anatomie und Entwickelungsgeschichte von *Trombidium fuliginosum (8)* hier erwähnt werden, welche sowohl in anatomischer, als in entwickelungsgeschichtlicher Hinsicht sehr wertvolle Beiträge zur Kenntnis der mit den Hydrachniden nahe verwandten Trombidien geliefert hat.

Eine sehr eingehende Untersuchung über die Anatomie der Hydrachniden bietet R. v. SCHAUB in seiner Arbeit über die Anatomie von *Hydrodroma* dar *(21)*. Besonders genau werden hier beschrieben das Nervensystem und dessen Verästelungen, Sinnesorgane verschiedener Art, die Anatomie der Geschlechts-

teile, sowie andere Organe, die von seinen Vorgängern gar nicht, oder doch unvollständig behandelt waren. Auch der Histologie der verschiedenen Organe widmet v. Schaub grosse Aufmerksamkeit. Undeutlichkeiten und auch Irrtümer kommen jedoch auch in seiner Untersuchung vor. So z. B. muss seine Darstellung des Baues der Mundteile im Vergleich mit derselben Darstellung in Henkings Arbeit über *Trombidium*, als undeutlich und teilweise irre führend bezeichnet werden. Irrig ist ferner seine Angabe, dass der Lebermagen durch ein Rectum mit der Analöffnung verbunden ist: ein Irrtum, welchen Cronebeg sich nicht zu Schulden kommen lässt.

Sehr wertvolle Beiträge zur Kenntnis der Entwickelungsgeschichte der Hydrachniden hat P. Kramer (*11, 12*) geliefert. Seine Untersuchungen beschäftigen sich teils mit der Embryologie der Tiere, teils mit der Entwickelung und Lebensweise der Larven.

Eine sehr bedeutende Untersuchung über Hydrachnidenanatomie ist A. Michael's „Study of the internal anatomy of *Thyas petrophilus*" *(15)*. Dieser Forscher liefert eine deutliche Darstellung des äusseren und inneren Baues der Mundteile, die im grossen und ganzen mit Henkings von *Trombidium* übereinstimmt. Ebenso wird der Verdauungskanal und speciell die Munddrüsen mit unübertroffener Genauigkeit beschrieben; ferner wird eine sorgsame Darstellung den Genitalorganen, dem Integument und dem Drüsensysteme gewidmet.

Der amerikanische Forscher van Vleet hat neuerdings eine Arbeit über die Mundteile von *Limnochares holosericea* und die Atmung der Hydrachniden im allgemeinen veröffentlicht *(22)*. Neben einer genauen Beschreibung der Mundteile dieser eigentümlichen Hydrachnide, enthält sein Aufsatz neue und interessante Gesichtspunkte in betreff der Atmung der Hydrachniden.

Obgleich also die Anatomie ebenso wie die Systematik der Hydrachniden viele Bearbeiter gefunden hat, sind doch eine nicht unbedeutende Anzahl von Fragen offen geblieben, die sowohl den äusseren wie den inneren Bau dieser Tiere betreffen. Denn einerseits haben die Systematiker vorzugsweise Gewicht auf einzelne äussere Charaktere der Gattungen und Arten gelegt und also ein artificielles System geschaffen, andererseits haben die Forscher, welche bis jetzt sich mit dem inneren Bau der Hydrachniden beschäftigt haben, als Untersuchungsmaterial irgend eine einzelne Art, höchstens eine geringe Anzahl von solchen gewählt, die mehr oder weniger eingehend beschrieben worden sind.

Irgend welche vergleichende Untersuchung einer grösseren Anzahl von Gattungen und Arten ist bisher weder in anatomischer, noch in morphologischer Richtung ausgeführt worden, noch weniger sind die Variationen, welchen einzelne Organe oder Organsysteme unterworfen sind, studiert worden. Der Vorteil einer solchen Untersuchung der ganzen, oder wenigstens eines grösseren Teils der Familie ist jedoch offenbar. Durch eine vergleichend anatomische Untersuchung bekommt der Sytematiker wertvolles Material zur Charakteristik der Arten und Gattungen, und durch das Vergleichen sowohl der anatomischen wie der morphologischen Charaktere werden Beiträge zur Phylogenie innerhalb der Familie geliefert, die ja die unentbehrliche Grundlage der natürlichen Systematik ist. Eine solche vergleichend anatomische und morphologische Untersuchung liefert ferner das einzige Mittel zur Feststellung der Verwandtschaftsverhältnisse der ganzen Gruppe der Hydrachniden zu anderen nahestehenden Acariden.

Eine Aufgabe wie diese bietet jedoch auch Schwierigkeiten dar. Freilich besitzen einige Gattungen viele in anatomischer und entwickelungsgeschichtlicher Hinsicht charakteristische Eigenschaften, welche das Abspalten dieser Gattungen in eigene Unterfamilien berechtigt hat, aber im allgemeinen stimmen die meisten Hydrachnidengattungen gerade in betreff der anatomischen und morphologischen Eigenschaften, welche bei einer solchen vergleichend anatomischen Untersuchung von grösstem Interesse sind, in solchem Grade überein, dass man in mehreren Fällen beim Versuch die natürliche Verwandtschaft zwischen Gattungen und Arten festzustellen, vollkommen unschlüssig wird. Oft scheinen die unbedeutenden äusseren Merkmale, welche die künstliche Systematik erfunden hat, faktisch die einzigen existierenden Unterschiede zwischen ganzen Gruppen von Gattungen zu sein. Dazu kommt noch, dass diese Aehnlichkeit auch den Larvenstadien eigen ist, insofern diese überhaupt bekannt geworden sind. Es versteht sich also, dass ein Versuch, aus einer vergleichend anatomischen und morphologischen Untersuchung der Hydrachniden irgend welche weitergehenden Schlussfolgerungen zu ziehen, nicht unbedeutende Schwierigkeiten darbietet. Da die Absicht meiner Arbeit gewesen ist, einige Beiträge zur Kenntnis der allgemeinen Anatomie der Hydrachniden und einige Angaben über die Verwandtschaftsbeziehungen dieser Gruppe darzubieten, so mögen die obenerwähnten Schwierigkeiten als Erklärung der unvollständigen Lösung der Aufgabe gelten.

Allgemeine Charakteristik der Hydrachniden.

Der erste und wichtigste Charakter der Hydrachnidengruppe, der, welchen schon die ältesten Verfasser zuerst bemerkt haben, ist biologischer Natur: das freie Leben im Wasser. Dieser Charakter kommt faktisch unter allen Acariden nur den Hydrachniden zu, ausgenommen nur die kleine Gruppe der Halacariden, deren Mitglieder zum Leben auf Meeresalgen beschränkt sind, und deren noch streitige Verwandtschaftsbeziehungen zu den Hydrachniden unten näher besprochen werden sollen. Dass diese Eigentümlichkeit des Aufenthaltsortes und der Lebensweise umbildend auf den ganzen sowohl äusseren wie inneren Bau der Tiere gewirkt haben muss, ist selbstverständlich, und durch dieselbe haben die Hydrachniden eine Einheitlichkeit in morphologischer Hinsicht bekommen, die gewiss nicht von Einheit in der Abstammung bedingt ist. Ausnahmen vom allgemeinen Hydrachnidentypus sowohl in morphologischer wie in biologischer Hinsicht kommen freilich vor; diese sind aber im Vergleich mit der Mehrzahl der Gattungen und Arten von geringer Bedeutung.

Die Körperform der Hydrachniden ist an ihre Lebensweise angepasst: eine mehr oder weniger abgeflachte Linsenform, die zwischen beinahe kugelrund wie bei *Diplodontus* und beinahe scheibenförmig wie bei *Mideopsis* variiert. Diese Körperform ist natürlich zur Bewegung im Wasser ganz gut geeignet. Ausnahmen finden sich jedoch; abgesehen von der ganz weichen und darum unregelmässig geformten *Limnochares,* mögen die beiden Gattungen *Oxus* und *Frontipoda* erwähnt werden, welche seitlich zusammengedrückte Körper haben, ebenso die Männchen der Gattung *Arrhenurus,* die eine ganz eigentümliche, oft wie es scheint zur Bewegung im Wasser wenig geeignete Körperform besitzen. Auf Anpassung zum Wasserleben deutet auch die Beschaffenheit des Integumentes, welches entweder, und zwar gewöhnlich, glatt ist, oder mit sehr kleinen Papillen besetzt ist. Die Augen sind gut entwickelt, wie man es bei der beweglichen Lebensweise der Tiere erwarten kann, und im Gegensatz zu den Augen der Trombidien, niemals gestielt. Die sechsgliedrigen Gliedmassen sind gut entwickelt und mit Krallen verschiedenartiger Form, sowie mit langen Bündeln von Borsten versehen, welche letztere als Schwimmorgane dienen. Ausserdem sind die Gliedmassen mit Sinnesborsten von wechselnder Form besetzt. Einige wenige Hydrachnidengattungen haben ihr Schwimmvermögen durch ihre Gewohnheit in schnellfliessendem Wasser zu leben eingebüsst. Beispiele dieser Art sind die Gattungen *Sperchon*, *Aturus*, *Atractides*. Diese Formen besitzen dagegen kräftig entwickelte Krallen, mit welchen sie sich an Wasserpflanzen und Steinen anheften. Dass dagegen die auf dem Boden

ruhiger Gewässer lebenden Nichtschwimmer *Thyas* und *Limnochares* das Schwimmvermögen nicht secundär verloren haben, sondern wahrscheinlich dieselbe Lebensweise wie auf dem Lande beibehalten haben, soll unten bewiesen werden.

Haut und Hautdrüsen.

Das Integument der Hydrachniden ist zuerst von v. SCHAUB in anatomischer und histologischer Hinsicht genau beschrieben worden. Auch MICHAEL hat in dieser Hinsicht eine ausgezeichnete Untersuchung geliefert. Die Studien dieser Forscher sind jedoch auf Specialfälle beschränkt, und die Systematiker haben nur die äusseren Charaktere der Haut bemerkt, wodurch auch die bedeutenden Variationen, welchen das Integument bei den verschiedenen Genera zeigen, bisher ziemlich unbeachtet geblieben sind.

Von den erwähnten Variationen ist vor allem zu bemerken der Unterschied zwischen gepanzerten und ungepanzerten Gattungen, ein Unterschied, der schon den ältesten Systematikern aufgefallen ist. Die gepanzerten Formen, bei welchen der ganze Körper von einer festen Chitinhülle umgeben ist, sind weit weniger zahlreich als die weichhäutigen. Ausserdem werden wir Uebergangsformen zwischen den beiden Haupttypen begegnen, welche man halbgepanzert nennen könnte.

v. SCHAUB beschreibt das Integument der *Hydryphantes* (syn. Hydrodroma) als eine dünne Cuticulaschicht, mit einem darunter verbreiteten dünnen, fast netzförmigen Matrixgewebe. Ungefähr zu demselben Resultat gelangt HENKING in betreff des Integumentes von *Trombidium*. MICHAEL dagegen findet bei *Thyas petrophilus* ein dreischichtiges Integument, indem er ausser dem Matrixgewebe oder Endostracum, wie er es nennt, noch zwei äussere Schichten findet, nämlich eine innere, dem Endostracum zugewandte, aus dichtgedrängten, beinahe cubischen Zellen zusammengesetzte Schicht, das Ectostracum, und eine äussere, aus conischen Zellen bestehende Schicht, das Epiostracum, welches die warzige Oberfläche der Haut bildet. In der That sind bei vielleicht allen Hydrachniden diese drei Schichten deutlich vorhanden (Fig. 2, Cu), obschon die beiden äusseren Schichten bei dünneren Hautbildungen schwierig zu unterscheiden sind.

Die Matrix-schicht oder Hypodermis ist oft an Schnittpräparaten schwierig zu erkennen, denn durch ihre Zartheit wird dieselbe oft bei den Präparierungsmanipulationen zerrissen. Gewöhnlich erscheint dieselbe jedoch als eine dünne,

beinahe homogene Schicht, mit in derselben zerstreuten, stark gefärbten Kernen (Figg. 1—3, Mtr). Dieselbe sondert sowohl die äusseren Cuticulaschichten, als auch die bei verschiedenen Gattungen mehr oder weniger verbreiteten Chitinbildungen ab. Diese sind daher immer von Anfang an von der Cuticula überlagert, obschon diese bei härteren Chitinbildungen bald vertrocknet und abgestossen wird. Auch steht die Hypodermisschicht mit den im Chitin immer vorkommenden Poren in Verbindung.

Am meisten verbreitet ist unter sämmtlichen Hydrachniden die ganz glatte, weiche Cuticula, die also als typisch für die Familie gelten mag. Diese Cuticulaform (Fig. 1. Cu) ist gewöhnlich ziemlich dick und lässt zuweilen recht gut die Grenze zwischen den beiden oben erwähnten Schichten hervortreten. Bei einigen wenigen Hydrachnidengattungen findet man eine ganz dünne, mit Papillen oder Chitinhöckern dicht besetzte Cuticula vor. Wie Michael gezeigt hat, gehören die Papillen der oberen Cuticulaschicht an, die darunter liegende, flache Haut der unteren. Die Papillen sind gewöhnlich hohl und entweder stumpf, wie bei *Eylais,* oder spitz wie bei *Diplodontus*, und in diesem Falle deutlich nach hinten gerichtet.

Es ist bekannt, dass bei allen weichhäutigen Hydrachniden die Extremitäten und die sogenannten Hüftplatten oder Epimeren stark gepanzert sind. Die letzteren decken in grösserer oder geringerer Ausdehnung die Bauchseite der Tiere und sind bei einigen Gattungen zu einem einheitlichen Schild verschmolzen. Ausserdem tritt aber bei den meisten weichhäutigen Hydrachniden im Zusammenhang mit den unten zu erwähnenden Hautdrüsen eine Chitinisierung der Cuticula auf, indem die Mündung jeder Drüse in den meisten Fällen von einer mehr oder weniger verbreiteten Chitinplatte umgeben ist. Es ist noch zu erwähnen, dass bei den Gattungen *Hydrachna*, *Limnochares* ud *Hydryphantes* ein Gebilde vereinzelt auftritt, das für die mit der Hydrachnidenfamilie verwandten Trombidien charakteristisch ist: das chitinige Rückenschild oder wie es Berlese nennt, der Rückenkamm, (crista metopica). Bei *Limnochares* tritt dasselbe in der für die oben erwähnte Landacaridenform charakteristischen, schmalen Kammform auf; bei *Hydryphantes* ist dasselbe fünfeckig, wie bei einigen Trombidiumlarven, bei *Hydrachna* tritt dasselbe entweder in der fünfeckigen Form auf, oder ist es zu zwei seitlichen, die Augen umfassenden Chitinstreifen reduziert, oder endlich fehlt es ganz.

Die Struktur des Chitines, sowohl der Extremitäten und Epimeren als des Rückenschildes ist bei sämmtlichen Hydrachnidenformen ziemlich dieselbe, weshalb auch v. Schaubs Charakteristik desselben überhaupt gelten kann: ein aus

dicht an einander gedrängten, unregelmässig prismaförmigen Chitinstäben zusammengesetzter Panzer *(21,* p. 109).

Es giebt nun wie oben erwähnt, einige Hydrachnidengattungen, bei welchen die Cuticula sehr verdickt ist und Anlagen zu Panzerbildung zeigt. Bei diesen Gattungen — *Sperchon*, *Oxus* — ist die Cuticula in zwei dicke, deutlich gestreifte Schichten geteilt, die sich oft bei der Präparation von einander spalten (Fig. 2, Cu). Ausserdem findet man bei einigen *Sperchon*-arten eine noch weiter vorgeschrittene Verstärkung der Cuticula, indem sämmtliche Hautdrüsenöffnungen zu grossen Chitinschildern entwickelt sind (Fig. 2. Gl, Ch). Noch länger fortgeschritten ist die Panzerbildung bei der von MICHAEL beschriebenen *Thyas petrophilus*, bei welcher der Rücken von fünf unregelmässigen grösseren, und mehreren kleineren Chitinplatten bedeckt ist. Irgend welche speziell die Hautdrüsen begleitende Chitinschilder findet man bei dieser Form nicht, sondern die Drüsen münden hier und da unter den kleineren Chitinplatten aus. — Eine ganz andere Entwickelung der Panzerung findet man bei *Oxus*. Hier sind die Epimeren zu einem einzigen, grossen, bauchigen Schild verschmolzen, der ungefähr die Hälfte des Tieres schützt. Die Rückenseite ist von einer dicken, zweischichtigen Cuticula bedeckt, die keine besonderen Panzerbildungen zeigt.

Diese Beispiele: *Sperchon* und *Thyas* einerseits, *Oxus* andererseits, zeigen uns zwei Wege, auf welchen die Panzerbildung der gänzlich gepanzerten Hydrachniden entstanden sein kann. Die mit Oxus nahe verwandte, zuweilen mit demselben vereinigte Gattung *Frontipoda* zeigt eine Weiterentwickelung des Panzers von *Oxus*. Bei dieser Gattung umschliesst der Bauchpanzer vollkommen das Tier, so dass nur ein kleiner Streifen längs dem Rücken ungepanzert bleibt (Fig. 6 Vp, Chl). Bei den übrigen gepanzerten Hydrachnidengattungen scheint dagegen die Panzerung eine ganz verschiedene Entwickelung durchgemacht zu haben: eine Entwickelung, die durch das Auftreten vereinzelter Panzerplatten — vielleicht Erweiterungen der gewöhnlichen Drüsenplatten wie bei *Sperchon* — eingeleitet und durch ein späteres Verschmelzen dieser Platten abgeschlossen wurde. Dass die Panzerformen der Gattungen *Arrhenurus*, *Mideopsis*, *Brachypoda* in dieser Weise entstanden sind, dafür sprechen mehrere Umstände: z. B. dass die Epimeren deutlich gesondert sind, nicht nur bei den erwachsenen Individuen, sondern auch bei den weichhäutigen Nymphenformen, was natürlich eine Panzerbildung durch Verschmelzen der Epimeren ausschliesst.

Was den Bau des Hydrachnidenpanzers betrifft, kann man am zweckmässigsten dabei zwei Typen unterscheiden — abgesehen vom schon beschriebenen *Frontipoda*-typus — nämlich einerseits den *Arrhenurus*-typus, andererseits den von den Genera *Brachypoda*, *Mideopsis*, *Aturus* u. a. repräsentierten Typus.

Für beide gemeinsam ist das Vorhandensein zweier deutlich von einander trennbarer Schilder, des Rücken- und des Bauchschildes. Was nun den Panzer des *Arrhenurus*-typus anbetrifft, so wird derselbe charakterisiert, erstens dadurch, dass das Rückenschild viel kleiner als das Bauchschild ist. Jenes bildet eine deutlich begrenzte Fläche auf der Mitte des Rückens, dieses schliesst nicht nur den Bauch, sondern auch die Seiten des Tieres ein. Zweitens ist für den Panzer des *Arrhenurus* charakteristisch die äusserst geringe Beweglichkeit der beiden Schilder gegen einander. Ein Bild der Grenzflächen zwischen den beiden Schildern zeigt dieses sogleich (Fig. 3, G). Am Hinterteil des Tieres sind die beiden Schilder durch eine ganz schmale Grenzspalte von einander getrennt (Fig. 3, B), die durch eine schwach wulstförmige Verdickung der beiden Schildränder eingefasst ist. Viel breiter ist im Vorderteil des Körpers die Spalte (Fig. 3, A), und sie wird hier von zwei dicken Chitinwülsten eingefasst, die im Querschnitt ein zangenförmiges Bild zeigen. Beiderseits ist die Spalte zwischen den beiden Schildern von der Cuticula übergezogen (Fig. 3, Cu), was jede grössere Beweglichkeit der Schilder gegen einander ausschliesst. Ferner wird der Panzer des *Arrhenurus* durch seine ausserordentlich grosse Porosität charakterisiert, eine Eigenschaft, welche keinen anderen Chitinbildungen in der ganzen Hydrachnidengruppe in so hohem Grade zukommt. Von oben gesehen zeigt sich der Panzer eines erwachsenen *Arrhenurus* wie von dicht an einander gereihten, runden Löchern durchbrochen. An Schnitten zeigt es sich, dass diese Löcher faktisch sanduhrförmige Poren sind (Fig. 3, P), die den Panzer durchsetzen. Derselbe wird von der Cuticula des Körpers gleichmässig überzogen, und die Poren sind von einer Zellensubstanz gefüllt, welche von Ausläufern der Hypodermis gebildet ist. An jungen *Arrhenurus*-individuen ist der Panzer noch mehr durchbrochen, so dass nur ein Netz mehr oder weniger starker Chitinleisten übrig bleibt.

Bei den übrigen gepanzerten Hydrachnidengattungen, *Mideopsis, Brachypoda* u. A., sind Rücken- und Bauchschild ziemlich gleichgross, indem das Bauchschild seitlich etwas über das Rückenschild greift. Die beiden Schilder sind längs ihrem ganzen Rande mit einander beweglich vereinigt, indem zwischen beiden ein Streifen von dicker, weicher Cuticula eingeschoben ist (Figg. 4, 5). Die beiden Schilder bestehen hier aus sehr hartem Chitin, das nur von äusserst engen Poren durchbrochen ist (Fig. 5, P). Infolgedessen ist auch die Cuticulaschicht über dem Panzer abgestorben. Die Poren selbst sind — wie auch bei *Frontipoda* — viel einfacher gebaut als bei *Arrhenurus;* sie bilden nämlich ganz enge, dicht an einander gedrängte Kanäle, ohne irgend welche Erweiterungen oder Verästelungen.

Die oben erwähnten Hautdrüsen sind Bildungen, die für die Hydrachniden eigentümlich sind, denn bei ihren Verwandten unter den Landacariden sind dieselben noch nicht gefunden worden. Sie sind ebenfalls allen Forschern, die sich auch noch so oberflächlich mit der Anatomie der Hydrachniden beschäftigt haben, bekannt gewesen, und ihre Funktion hat zu vielen Speculationen Anlass gegeben. Bei den meisten weichhäutigen Hydrachnidenformen beobachtet man an der Rückenseite vier Reihen punktförmiger Einsenkungen in der Haut: es sind die Mündungen der Hautdrüsen. Die Drüsen selbst sind gewöhnlich birnförmig; sie sind aus mehreren conischen Zellen zusammengesetzt, von welchen jede mit ihrer Spitze in dem gemeinsamen engen Ausführgang der Drüse einmündet, und in ihrem Basalteil einen deutlichen Kern besitzt. Der ganze Zellhaufen wird von einer gemeinsamen, dünnen Haut umgeben, die bei den weichhäutigen Hydrachnidenformen meist durch ein korbförmiges Gerüst von Chitinleisten gestützt wird, was natürlich die zarten Drüsenzellen vor Quetschungen schützt (Fig. 2, Gl.). Die Mündung der Drüse wird von einem grösseren oder kleineren Chitinschild geschützt; bei den ungepanzerten Arten bildet dasselbe nur ein kleines Dreieck, bei den halbgepanzerten aber kann das Schild zuweilen, wie schon oben erwähnt wurde, recht gross sein (Fig. 2, Ch.). Die Mündung der Drüse ist ringförmig und von einer Haut geschlossen, die nur eine kleine Spalte offen lässt. Bei den gepanzerten Hydrachniden treten einige Veränderungen in dem Bau der Drüsen ein: das umgebende Chitingerüst, welches natürlich hier entbehrlich ist, fehlt, und eine einfache, kanalförmige Oeffnung im Panzer tritt an die Stelle des Schildes (Fig. 18, Gl). Die Drüsenöffnung ist bei allen Hydrachniden von einem einzelnen langen Tasthaar begleitet, das unmittelbar in der Nähe der Drüsenöffnung eingelenkt ist. Die Lage der Drüsen ist bei den verschiedenen Hydrachnidenformen etwas wechselnd. Immer gehören sie zur Rückenseite, wo sie gewöhnlich in vier, zuweilen aber auch in zwei Reihen geordnet sind. Auch die Grösse der Drüsen wechselt: bei einigen Formen sind sie verhältnissmässig klein, bei anderen erreichen sie eine nicht unbedeutende Grösse.

Die Bedeutung der erwähnten Drüsen ist Gegenstand vieler Speculationen gewesen, die jedoch keine vollständig befriedigende Resultate gegeben haben. Da die Hautdrüsen wie oben gesagt für die Hydrachniden eigentümlich sind und bei verwandten Landacariden fehlen, oder wenigstens sehr unbedeutend sind, liegt es nahe bei der Hand anzunehmen, dass die Entwickelung derselben mit der eigentümlichen Lebensweise und dem Aufenthaltsort der Hydrachniden in irgend welcher Hinsicht im Zusammenhang steht. Eine Theorie in dieser Richtung hat HALLER (7, p. 23) vorgebracht, indem er in den Hautdrüsen der

Hydrachniden ein Schutzmittel gegen Feinde sieht. Er behauptet, dass Hydrachniden weder von Vögeln und Fischen, noch von Wasserinsekten gefressen werden; das Secret der Hautdrüsen sollte nämlich sowohl auf die Geruchs- als die Geschmacksorgane der genannten Tiere unangenehm wirken. Faktisch werden aber die Hydrachniden sowohl von den einen als von den anderen Raubtieren gelegentlich verzehrt; das Schutzmittel ist also wenigstens nicht immer wirksam. Die Haller'sche Theorie ist jedoch bis jetzt der einzige Erklärungsversuch für die Bedeutung der Hautdrüsen geblieben. Ausgeschlossen ist es wohl nicht, dass das Drüsensecret irgend eine Bedeutung für die Haut selbst haben kann, aber faktische Beweise dafür giebt es nicht.

Muskulatur.

Dass Tiere, die so beweglich sind wie die Hydrachniden, mit kräftiger Muskulatur ausgestattet sein müssen, versteht sich von selbst. Die Hauptmasse der Muskulatur der Hydrachniden ist auf die Ventralseite des Körpers koncentriert, wo die breiten Hüftplatten Anheftungspunkte für die Extremitätenmuskeln darbieten. Diese Chitinplatten sind auch bei verschiedenen Formen der Gruppe von verschiedener Grösse: bei dem trägen *Limnochares* bilden sie ganz kleine Dreiecke; bei den gewöhnlichen, schnellbeweglichen Gattungen sind sind sie breit und kräftig, besonders die des letzten Beinpaares. Ueber deren Verschmelzen bei einigen Formen zu einer Platte ist schon früher die Rede gewesen. Die an den Epimeren sich anheftende Extremitätenmuskulatur besteht, wie schon frühere Forscher dargelegt haben, aus mehreren kräftigen, einander kreuzenden Bündeln, die einerseits an den Epimeren inserieren, andererseits an die Glieder der Extremitäten angeheftet sind. Ausserdem haben natürlich die Extremitäten selbst ihre Beug- und Streckmuskeln, die sich von einem Glied zum anderen strecken.

Ausser den Extremitäten haben natürlich auch mehrere andere Organe ihre spezielle Muskulatur, so z. B. die Mundteile, Genitalorgane, Sinnesorgane; diese Muskeln werden im Zusammenhang mit den respektiven Organen besprochen werden. Es soll aber hier die Muskulatur erwähnt werden, welche am Körper selbst zusammenziehend wirkt, die zwar schon von v. Schaub betreffs des *Hydryphantes* besprochen ist, die aber bei verschiedenen Hydrachnidenformen nicht unbeträchtliche Variationen zeigt. Diese Muskeln sind gewöhnlich auf vier Paar Bündel verteilt, die vom Rücken aus zur Bauchseite des

Tieres zu beiden Seiten der Mittellinie desselben verlaufen. Man findet gewöhnlich ein Paar in der Nähe der Mundteile, ein Paar vor und eines hinter der Genitalöffnung, an deren Chitinplatten dieselben oft inserieren, und schliesslich ein Paar nahe der Afteröffnung. Von diesen vier Bündeln können jedoch auch ein oder zwei Paare verschmelzen oder ganz und gar verschwinden. Bei weichhäutigen Hydrachnidenformen sind oft die Insertionspunkte der Muskeln am Rücken zu festem Chitin erhärtet, was jedoch auch bei Formen mit dicker Cuticula ausbleiben kann.

Bei den gepanzerten Hydrachniden zeigen die Körpermuskeln grosse Variationen. Bei *Mideopsis* findet man nur zwei Paar solcher Muskelbündel, die sich weit seitwärts, bis an die Nähe des Rükenschildrandes gezogen haben (Fig. 5, Mc). Das flache Rückenschild (Fig. 5, Dp) passt hier wie ein Deckel in das concave Bauchschild (Fig. 5, Vp), und der oben erwähnte, zwischen beiden ringsum laufende, weiche Cuticula-rand (Fig. 5, G) gestattet bei der Contraction der Körpermuskeln das Einziehen des Rückenschildes in die Vertiefung des Bauchschildes. Ganz ähnliche Verhältnisse scheinen bei der Gattung *Midea* vorzukommen. In etwas anderer Weise ist dagegen die Panzerung und Körpermuskulatur bei *Brachypoda* gestaltet (Fig. 4). Auch hier greift freilich das Bauchschild seitlich mit seinen concaven Rändern über die Ränder des Rückenschildes, aber jenes ist bedeutend flacher, mit nur schwach umgebogenen Rändern, dieses dagegen bedeutend grösser als bei *Mideopsis* und nicht flach, sondern gewölbt. Die zusammenziehenden Körpermuskeln inserieren hier, wie es bei den weichhäutigen Formen der Fall ist, in der Nähe der Mittellinie des Körpers (Fig. 4, Mc).

Ganz eigenartige Verhältnisse begegnen uns in Bezug auf die Körpermuskulatur bei der Gattung *Frontipoda* (Figg. 6, 7). Wie schon erwähnt wurde, umschliesst hier der Panzer (Fig. 6, Vp) das ganze Tier, so dass nur längs der Mittellinie des Rückens ein schmaler, ungepanzerter Streifen freigelassen wird. Zwischen den also gebildeten Rändern des Panzers sind nun die Muskeln in ganz eigentümlicher Weise ausgespannt (Fig. 6, Mc). Einerseits am Rande des Panzers befestigt, begegnen je zwei Muskelbündel einander in der Mittellinie des Rückens und inserieren daselbst in einem kleinen, die Cuticula in der Längslinie des Körpers durchziehenden Chitinstreifen (Fig. 6, Chl). Die in dieser Weise angeordneten Muskelbündel sind zwei an der Zahl, und jedes mit einem besonderen Chitinstreifen ausgestattet (Fig. 7, Chl). Durch die Contraction dieser Muskeln wird der ganze Körperpanzer wie eine Muschelschale zusammengezogen. Ausserdem giebt es noch am Vorder- und Hinterende des Körpers je ein Paar Muskeln, die, wie bei anderen Hydrachniden gewöhn-

lich, von oben nach unten verlaufen (Fig. 7 Mc_1). Auch bei dieser Gattung ist also die typische Vierzahl der Muskelbündel vorhanden. Bei der mit *Frontipoda* am nächsten verwandten Gattung *Oxus* sind die letzteren zwei Muskelbündel allein vorhanden, und besonders das am Vorderende des Körpers kräftig entwickelt. Die Anordnung jener oben erwähnten Quermuskeln ist dagegen für *Frontipoda* eigentümlich, nicht nur unter den Hydrachniden, sondern auch, soweit es mir bekannt ist, unter allen übrigen Acariden. Das Entstehen derselben kann wohl nicht anders erklärt werden, als so, dass beim Heranwachsen des ursprünglich concaven Bauchschildes, die anfangs verticalen Körpermuskeln mit emporgerückt sind, bis dieselben schliesslich die nun vorhandene eigentümliche, fast horizontale Lage angenommen haben.

Wie oben erwähnt wurde, besitzen die beiden Panzerschilder bei der Gattung *Arrhenurus* äusserst geringe Beweglichkeit. Im Einklang damit steht auch die Thatsache, dass die oben erwähnten Körpermuskeln bei diesem Genus zum grössten Teil fehlen. Am Vorderrande des Rückenschildes inserieren zwar einige Muskeln, die sich am Bauchschild dicht über den Mundteilen befestigen, und sicher können diese zu der geringen Zusammenziehung resp. Erweiterung des Körpers, welche die Gelenke der beiden Schilder gestatten, mitwirken.

Was nun die praktische Bedeutung dieses ganzen Muskelsystemes betrifft, so ist dieselbe noch nicht völlig erklärt. Dieses liegt wohl zum Teil daran, dass zwei der wichtigsten Körperfunktionen, an welchen diese Muskulatur sicher beteiligt ist, die Bluteirkulation und die Atmung, bei den Hydrachniden wenigstens teilweise noch unaufgeklärt geblieben sind. Im allgemeinen sind natürlich die erwähnten Muskeln an allen den mannigfaltigen Körperfunktionen beteiligt, welche eine Erweiterung oder Verengerung des Körpervolumens fordern: so z. B. nehmen sie mit grösster Wahrscheinlichkeit an der Verdauung, an der Entleerung der Genitalprodukte u. s. w. Teil. Ich habe spezielle Versuche gemacht, um diese Contractionen des Körpers zu konstatieren, und habe dazu Exemplare von *Frontipoda musculus* gewählt, an welcher die Contractionen an der allein verengerungs- und erweiterungsfähigen schmalen Rückenfurche deutlich sichtbar sein müssten. An lebendigen Exemplaren dieser Form ist es faktisch möglich, langsame, aber deutliche Contractionen und Erweiterungen des Körpers zu beobachten, aber irgend welche von den regelmässigen Körperbewegungen, wie Cirkulation und Atmung, herrührende Rhytmik ist es mir nicht möglich gewesen wahrzunehmen. Man muss jedoch auch die dunkle Färbung des Untersuchungsobjektes und die Schwierigkeit, das zusammengedrückte Tier in eine geeignete Lage zu bringen, in Betracht

nehmen, welche unvorteilhafte Umstände vielfach die Beobachtungen stören und die Resultate unsicher machen. Ich kann also nicht sicher behaupten, dass die Bewegungen unregelmässig sind, sondern muss die Frage noch offen lassen.

Cirkulations- und Respirationsvorrichtungen.

Von dem Blutkreislauf der Hydrachniden ist nur Weniges bekannt. Ein Herz, wie unter den übrigen Acariden die Gamasiden es besitzen, ist nicht bei den Hydrachniden gefunden. Es ist also noch unsicher, wie das Blut in Bewegung gebracht wird. Vorläufig muss man wohl mit v. SCHAUB annehmen, dass die Muskeln des Körpers dabei hauptsächlich thätig sind. An durchsichtigen Hydrachnidenformen, wie *Atax crassipes*, ist es übrigens leicht, die Bewegungen der amöboiden Blutkörperchen innerhalb des Integumentes wahrzunehmen. Selbständig und äusserst langsam schreiten diese unter ebenso langsamen Formenveränderungen vorwärts. Die Schnelligkeit der Blutflüssigkeit habe ich nicht wahrnehmen können; auch fehlen, soweit mir bekannt ist, alle diesbezüglichen Angaben.

Eine schwer zu lösende Frage auf dem Gebiete der Hydrachnidenbiologie ist die der Atmung. Neuerdings hat VAN VLEET *(22)* dieselbe einer Spezialuntersuchung unterworfen, ohne jedoch dabei zu entscheidenden Resultaten zu kommen. Schon ältere Autoren haben das gut entwickelte Trachéensystem der Hydrachniden bemerkt. Sie gehören der Gruppe der *Acarida prostigmata* an, bei welchen die Trachéen am Vorderende des Körpers, oberhalb der Mundteile ausmünden. Die Respirationsorgane und Mundteile stehen bei den Hydrachniden, wie auch bei mehreren anderen Prostigmaten mit einander in Verbindung, indem die sogenannten chitinigen Luftkammern bei der Bewegung der Mundteile eine grosse Rolle spielen, weshalb dieselben auch im Zusammenhang mit den Mundwerkzeugen näher besprochen werden sollen. Von den beiden Stigmen leitet je ein häutiger Luftgang zu den erwähnten Chitinkammern (Figg. 8—16, S). Aus dem hinteren Teil derselben nehmen dann die zwei Hauptstämme der Trachéen ihren Ursprung, um sich nach kurzem Verlauf nach hinten in zahlreiche Aeste zu teilen, indem sich dieselben entweder sogleich in eine Menge feiner Röhrchen spalten, oder sich erst dichotomisch verzweigen.

Die so gebildeten Trachéenäste durchsetzen wie ein Netz den ganzen Körper des Tieres, verteilen sich zwischen den Eingeweiden und unter der Haut desselben.

Was ist aber nun die Funktion dieses ganzen Systemes? Schon frühere Forscher, z. B. Forel, haben gezeigt, dass es Hydrachniden giebt, die nie zur Oberfläche des Wassers gelangen, indem sie zum Schwimmen unfähig sind und am Boden tiefer Gewässer leben. Und doch sind ihre Trachéen wohl ausgebildet und mit Gas gefüllt. van Vleet hat mehrere der gewöhnlichsten Hydrachnidenformen künstlich von der Oberfläche des Wassers abgesperrt, und in dieser Lage sind die Tiere monatelang lebendig geblieben. Schliesslich beweist er durch überzeugende Experimente, dass bei *Limnochares* keine offene Verbindung zwischen den Trachéenröhren und dem umgebenden Medium zu finden ist, indem die Wand der chitinigen Luftkammer gegen die Trachéen hin geschlossen ist, was deutlich zeigt, dass die Trachéen aus ihrer ursprünglichen Funktion der Luftatmung getreten sind.

Die beiden Fragen, welche Bedeutung die Trachéen nunmehr haben, und wie die Hydrachniden atmen, sind jedoch auch von der neuesten Forschung unbeantwortet geblieben. Frühere Hydrachnidenkenner haben vermutet, dass die Trachéen die abgesonderte Kohlensäure aufnehmen und davon gefüllt sein sollten. Wenn man aber dieselben als solche Absonderungsorgane betrachten wollte, müsste man zuerst beobachten, ob die Tiere Luftblasen ausscheiden, was bei den grösseren Formen leicht wahrzunehmen sein müsste, bis jetzt aber noch nicht gelungen ist, und sollte die von van Vleet bei *Limnochares* beobachtete Geschlossenheit des Trachéensystemes weiter verbreitet sein, so verfällt diese Theorie von selbst. Wahrscheinlicher wäre es da, dass das gasgefüllte Trachéennetz seine ursprüngliche Funktion als Atmungsorgan mit derjenigen einer Schwimmblase vertauscht haben sollte, die in derselben Weise wie die Schwimmblase der Fische, durch abwechselnde Verengerung und Erweiterung der eingeschlossenen Gasmasse, das Tier erschweren und erleichtern sollte. Unter solchen Verhältnissen wäre die von van Vleet dargelegte Geschlossenheit der Luftkammern nicht nur erklärlich, sondern natürlich.

Ebenso unerklärt wie die Frage von der Funktion der Trachéen, ist die der Atmung der Hydrachniden überhaupt. Schon frühere Forscher haben behauptet, oder wenigstens vermutet, dass bei diesen Tieren ausser der Trachéenatmung eine Hautatmung vorkomme. Haller (7, p. 23) meint, dass unter der Haut der Hydrachniden die Trachéenäste mit kolbigen Anschwellungen versehen seien, die den Luftaustausch zwischen dem Tier und der umgebenden Wassermasse vermitteln sollte. Das dasein dieser Kolben ist jedoch von der neue-

ren Forschung nicht bestätigt worden, und damit verfällt diese Behauptung. Ebenso wenig Wahrscheinlichkeit hat die noch ältere Theorie, dass die oben beschriebenen Hautdrüsen bei der Atmung beteiligt seien. Neuere Forscher haben sich auf die Behauptung beschränkt, dass die Haut das Organ der Atmung sei, ohne zu erklären, wie der Process durch dieselbe vorgehe. Es ist auch nicht leicht in dem Bau der Haut irgend etwas zu finden, was auf die Funktion derselben als Atmungsorgan deuten würde. Es bleibt also nichts Anderes übrig, als der Cuticula selbst ein Diffusionsvermögen zuzuschreiben, wozu jedoch beim ersten Anblick weder die dicke, glatte Cuticula bei *Curvipes* und *Sperchon*, noch der harte, fast compacte Panzer der *Mideopsis*, *Brachypoda* u. A. geeignet scheint. Eher schon könnte dazu die poröse Chitinhaut des *Arrhenurus* dienen. — Es muss also wie gesagt, die Atmung der Hydrachniden als bis jetzt noch nicht aufgeklärt gelten.

Mundteile.

Die Mundteile der Hydrachniden sind für eine vergleichende Darstellung der Anatomie der Gruppe von grösstem Gewicht, denn gerade bei den Mundwerkzeugen treten die ausserordentlich grossen Unterschiede, welche unter den verschiedenen Hydrachnidenformen vorkommen, deutlich hervor: Unterschiede, die oft nur durch die Annahme verschiedener Abstammung der respektiven Formen erklärt werden können. Es ist unter solchen Umständen von Interesse, die verschiedenen Formen der Mundwerkzeuge mit einander und mit entsprechenden Organen bei benachbarten Acaridenfamilien zu vergleichen.

Von den verschiedenen Formen der Mundteile bei den Hydrachniden sind schon Mehrere von früheren Forschern beschrieben worden. CRONEBERG in seiner russischen Arbeit beschreibt, freilich etwas schematisch, die Mundteile von *Eylais extendens* und berücksichtigt auch in derselben Hinsicht die Gattungen *Hydrachna* und *Curvipes* (Nesaea). V. SCHAUBS *(21)* Darstellung der Mundteile von *Hydryphantes* (Hydrodroma) ist der schwächste Teil seiner ganzen Abhandlung. MICHAEL *(15)* kritisiert teilweise V. SCHAUBS Darstellung und giebt selbst eine gute Beschreibung der Mundwerkzeuge von *Thyas*. VAN VLEET *(22)* beschreibt sehr genau die Mundteile von *Limnochares*. Als Vergleichungsmaterial aus den mit den Hydrachniden verwandten Familien mag HENKING's musterhafte Darstellung der Mundteile von *Trombidium (8)* erwähnt werden.

Die Hydrachniden besitzen, wie die Acariden überhaupt, saugende Mundwerkzeuge, die in Uebereinstimmung mit denselben Organen bei den Trombidien und mehreren anderen der höher stehenden Acariden kräftig entwickelt und zum Fressen von lebendigem Raub geeignet sind. Charakteristisch für diesen Typus der Mundwerkzeuge ist eine mehr oder weniger conische sogen. Unterlippe, die den Oesophagus umschliesst, ferner ein Paar fünfgliedrige Palpen, ein Paar Mandibeln von verschiedener Gestalt, die aber immer im Zusammenhang mit den oben erwähnten chitinigen Tracheenkammern stehen. Uebrigens variieren die Mundteile der Hydrachniden, wie gesagt, in sehr bedeutendem Grade.

Wenn wir jetzt eine vergleichende Darstellung der verschiedenen Typen der Mundteile der Hydrachniden geben wollen, wird es am zweckmässigsten sein, von den Hydryphantinen auszugehen, da die Mitglieder dieser Subfamilie, wie es unten näher dargelegt werden soll, die primitivsten Organisationsverhältnisse unter sämmtlichen Hydrachniden zeigen.

Bei den drei Gattungen der Hydryphantinen *(Hydryphantes, Diplodontus* und *Thyas)* bildet die Unterlippe einen kurzen, conischen Rüssel mit abgestutzter Spitze und abgerundeten, hochgewölbten Hinterecken. (cfr Fig. 9, die die Mundteile von *Hydryphantes ruber* darstellt). Man nimmt gewöhnlich an, dass die Unterlippe (Lb) von einem dritten Paar mit einander verwachsener Mundgliedmassen, den Maxillen, gebildet sei. An der Rückenseite trägt dieselbe eine Einsenkung, in deren Rinne die Mandibeln (Md) gelegen sind. Diese sind zweigliedrig, mit einem länglichen, nach vorne wie nach hinten schwach zugespitzten Grundglied (Md_1) und einer sichelförmigen Klaue mit aufwärts gerichteter Spitze (Md_2). Im Inneren des Grundgliedes bemerkt man ein kräftiges Muskelbündel, das an der Klaue inseriert, und dessen Bewegungen vermittelt. Der Bewegungsmechanismus der Mandibeln steht mit dem Vorhandensein der obenerwähnten chitinigen Luftkammern (S) in nahem Zusammenhang. Jedes von diesen schwach S-förmigen, stark chitinisierten Gebilden ruht nämlich mit seiner vorderen Spitze in einer entsprechenden Vertiefung an der Unterseite der Mandibeln; an seinen Hinterende inserieren mehrere kräftige Muskelbündel, die nach der Hinterspitze der Mandibel leiten, und da die Mitte der Luftkammer fest ist, wird natürlich durch Contraction dieser Muskeln die Klaue der Mandibel vor- und aufwärts geschoben. Eine entsprechende Rückwärtsbewegung der Mandibeln wird durch Muskeln, die von dem Rückenintegument des Körpers nach der Unterseite der Mandibeln leiten, hervorgebracht. Die Luftkammern sind an einem chitinigen Balken befestigt, der brückenartig die beiden Seiten der Unterlippe verbindet. An dieser Brücke ist eine Hautbildung befestigt, die zuweilen von zwei Chitinleisten gestützt, längs der Unterseite der Mandibeln

bis an das Vorderende des Rüssels ausgespannt ist, und also eine Gleitbahn für die Mandibeln und zugleich die Wand der Lippenrinne nach oben bildet. Das Vorderende des Rüssels ist von einem doppelten Chitinrand umgeben, der durch Faltung des Unterlippenrandes gebildet ist, und einige Borsten trägt. Dieser Ring ist durch eine Chitinhaut geschlossen, die in der Mitte eine Längsspalte trägt, durch welche die Spitzen der Mandibeln austreten. Im Hintergrund der dadurch gebildeten Mundhöhle, hinter der Basis der Mandibelklauen, mündet die Oeffnung des Oesophagus (Oe) aus. Letzterer bildet ein flachgedrücktes Röhrchen, das durch eine chitinige Rinne parallel dem Boden der Unterlippe rückwärts läuft. Die Ränder dieser Rinne sind durch zahlreiche, kräftige Muskelbündel vereinigt, deren Contractionen die Rinne und dadurch auch den Oesophagus verengern. Andererseits inserieren längs der oberen Wand des Oesophagus paarweise mächtige Muskelbündel, die sich an den oberen Rändern des Rüssels befestigen, und die durch ihre Contractionen die obere Wand des Oesophagus emporheben und somit das ganze Röhrchen erweitern. Durch wechselnde Contractionen dieser beiden Muskelsysteme wird der Oesophagus erweitert und verengert, und dadurch die Saugbewegung des Tieres ausgeführt. — Die Palpen, die an den Seiten des Rüssels etwas vor den Luftkammern eingelenkt sind, variieren freilich bei den verschiedenen Gattungen, jedoch nicht in bedeutenderem Grade. Bei allen Hydryphantinen sind sie scheerenförmig, indem das letzte Glied derselben gegen das vorletzte articuliert.

Es ist nötig gewesen vorstehende etwas ausführlichere Beschreibung der Mundwerkzeuge der Hydryphantinen zu geben, um die Abweichungen derselben bei den übrigen Hydrachnidenformen leichter verständlich zu machen. Eine einfache Vergleichung des oben geschilderten Hydrachnidentypus mit HENKINGS Beschreibung von *Trombidium* zeigt die grosse Uebereinstimmung der Mundwerkzeuge dieser beiden Formen. Die Mehrzahl der Hydrachniden, die zu der Subfamilie der *Hygrobatinae* gehören, besitzen dagegen Mundwerkzeuge, die zwar nach demselben Typus wie bei den Hydryphantinen gebaut sind, aber doch bedeutende Abweichungen zeigen. Diese Formen, für welche die Gattung *Curvipes* als Beispiel gelten kann (Fig. 10), besitzen eine Unterlippe (Lb) von höherer und kürzerer Form als die vorige Unterfamilie. Die Spitze des Rüssels ist nicht ausgezogen, sondern quer abgestutz, und die Seiten desselben sind nach oben hin zu spitzen Ecken ausgezogen; ferner ist der Bauchteil desselben in eine breite, flache, als Muskelbefestigung dienende Spitze umgewandelt, wodurch die Unterlippe von der Bauchseite her betrachtet sich wie ein Dreieck mit scharfen Ecken zeigt. Die Oesophagalrinne ist gemäss dem allgemeinen Bau der Mundwerkzeuge kürzer als bei den Hydryphantinen, und ruht nicht

am Boden der Lippe, sondern ist von demselben durch einen nicht unbedeutenden Raum getrennt, was augenscheinlich die Elasticität des ganzen Saugapparates nicht unbeträchtlich vermehrt (Fig. 10, Oer). Innerhalb der Unterfamilie variieren die Mundwerkzeuge nicht unbedeutend. So z. B. sind bei einigen Gattungen, wie *Arrhenurus*, die Palpen und Mandibeln von gedrungenem Bau, bei anderen dagegen schlank; einige Formen haben scheerenförmige Palpen, z. B. *Arrhenurus*, bei den meisten Gattungen endigen sie dagegen mit kleinen, stumpfen Krallen. Bei den ganz und halbgepanzerten Formen ist oft die Unterlippe mit dem allgemeinen Panzer des Körpers verschmolzen u. s. w.

Wenden wir uns nun zu der nur durch eine einzige Gattung vertretenen Subfamilie *Limnocharinae*, so finden wir hier die Mundwerkzeuge in ganz eigentümlicher Weise transformiert, in einer Weise, wozu nichts entsprechendes unter den übrigen Hydrachniden zu finden ist (Figg. 11, 12). Hauptsächlich sind es die Mandibeln, welche Veränderungen unterworfen gewesen sind, obgleich auch Palpen und Rüssel teilweise ein fremdartiges Aussehen angenommen haben. Aeusserlich bekommen die Mundteile ihren abweichenden Charakter durch die verkümmerten Palpen (Fig. 11, Pl), die nur wenig ausserhalb des Mundkegels (Lb) reichen. Dieser ist rüsselförmig und etwas mehr ausgezogen, als bei den Hydryphantinen, am Vorderende ganz quer abgestutzt und mit einer sehr deutlichen Borstenreihe umgeben. Die Grundglieder der Mandibeln (Md_1) sind der Länge nach zusammengewachsen und bilden dadurch einen gewölbten Deckel über der ganzen Länge des Rüssels. Ein Querschnitt des Vorderteiles dieses Deckels erinnert an einen Zirkelsector, dessen Spitze nach unten gerichtet ist und der in der Mitte durch einen radiären Balken, die Vereinigungslinie der beiden Mandibeln, halbiert ist. Die in dieser Weise gebildeten Räume sind von den Bewegungsmuskeln des Klauengliedes (Fig. 12, MMd_3) eingenommen: die Räume selbst sind hinten an der Einlenkungsstelle der Luftkammern geschlossen, und die verwachsenen Hinterenden der Mandibularkörper, die diesen Einlenkungspunkt überragen, bilden ein flaches Gewölbe. Zwischen diesem und den Luftkammern sind die von den vorigen Subfamilien bekannten Hebemuskeln der Mandibeln (Fig. 12, MMd_2) ausgespannt. Die chitinigen Luftkammern (Fig. 12, S) sind besonders kräftig entwickelt; von der Chitinbrücke, an welcher sie befestigt sind, leiten zwei, ebenfalls kräftige Stützleisten für die Mandibeln zur Mundöffnung hinunter. Die Mandibularklauen (Fig. 12, Md_3) sind nicht sichelförmig, wie bei den Hygrobatinen, sondern besitzen eine ausgezogene Basis, an welcher die Bewegungsmuskeln des Organes inserieren, und eine dagegen fast rechtwinkelig gebogen Spitze. Die Basis artikuliert gegen eine Vertiefung des Grundgliedes (Fig. 14 Mg). Die Muskulatur der Speiseröhre

bietet gegenüber den vorigen Gruppen nichts von besonderem Interesse dar. Die Hinterflügel des Mundkegels sind abgerundet, und an denselben inserieren wie gewöhnlich die Erweiterungsmuskeln des Oesophagus. Dagegen ist natürlich die Bewegungsmuskulatur der Mandibeln von den Veränderungen des Chitingerüstes beeinflusst worden. Die Hebemuskeln der Mandibeln, die an den Luftkammern inserieren, wurden schon besprochen. Jedenfalls kann die Beweglichkeit des gesammten Mandibulardeckels nicht allzu gross sein. Dagegen sind die Klauen sehr kräftig und beweglich, und ihre Muskeln sind entsprechend gut entwickelt. Endlich ist der ganze Mundkegel beweglich und kann in den weichen Körper des Tieres eingezogen werden, was bei den übrigen, mit fester Körperhaut versehenen Hydrachnidenformen ausgeschlossen ist.

Obschon also die Mundteile der *Limnochares* gegenüber den entsprechenden Organen der übrigen Hydrachniden fremdartig aussehen, so lassen sie sich doch auf unseren Ausgangstypus der Mundteile, den der Hydryphantinen, leicht zurückführen. Die hauptsächliche Veränderung, das Zusammenwachsen der Mandibeln, lässt sich leicht verstehen, und die übrigen Teile des Mundapparates: der Rüssel selbst, die Luftkammern mit ihrer Chitinbrücke und ihren Stützleisten, selbst die Mandibularmuskulatur, lassen sich sehr leicht mit den entsprechenden Teilen einer *Hydryphantes* vergleichen.

Dagegen ist es recht schwierig die Mundteile der Gattung *Eylais,* welche ebenfalls eine eigene Unterfamilie bildet, mit den vorher beschriebenen Typen zu vergleichen. CRONEBERG, der zuerst diese Hydrachnidenform anatomisch beschrieben hat, erklärt freilich, dass die Mundteile von *Eylais,* nur mit Ausnahme der etwas geringeren Beweglichkeit der Grundglieder der Mandibeln, sich so wie bei *Curvipes* (Nesaea) und *Limnesia* verhalten. Da CRONEBERG thatsächlich eine im grossen und ganzen richtige Auffassung von dem Bau der Mundteile von *Eylais* bekommen hat, so ist dieses Urteil recht eigentümlich, denn gerade die Grundglieder der Mandibeln sind bei *Eylais* in so hohem Grade transformiert, dass ein Vergleich mit dem gewöhnlichen Typus der Hydrachnidenmundwerkzeuge dadurch sehr erschwert wird. Es scheint mir weit zweckmässiger, beim Untersuchen der Mundteile der *Eylais* von dem Typus der *Limnochares* auszugehen, der in dieser Hinsicht einige Vergleichspunkte mit Eylais, nicht nur in betreff der Unbeweglichkeit der Mandibularglieder, sondern auch in der ganzen Anordnung des Bewegungsmechanismus der Mundteile darbietet.

Die Unterlippe der *Eylais* (Fig. 13, Lb) zeigt nichts von der bei den vorigen Typen vorkommenden conischen Form, sondern zeigt in seitlicher Ansicht einen lang ausgezogenen, fast kahnförmigen Unterteil sowie ein Paar von

den Vorderecken desselben schräg nach Aussen und Hinten emporsteigende, leistenförmige Seitenecken, die den spitz ausgezogenen Seitenrändern des Mundkegels des *Curvipes*-typus entsprechen, und die wie bei diesem den Erweiterungsmuskeln des Oesophagus als Insertionspunkte dienen. Das Hinterende des Lippenschildes bildet eine sehr breite Querleiste mit spitzen Ecken, welche der Unterlippe von unten betrachtet die Gestalt eines Fünfeckes verleiht, und wie gewöhnlich Befestigungspunkte für die Palpenmuskeln darbietet. Die Oesophagalrinne zeichnet sich durch ungewöhnliche Breite und durch eine der Unterlippe entsprechende Länge aus. Die Mandibeln und ihre Anhangsorgane: die S-förmigen Leisten und die Chitinbrücke sind, wie gesagt, ausserordentlich transformiert. Die Grundglieder der Mandibeln (Figg. 13, 14 Md_1) sind wie bei *Limnochares* wenig beweglich, obwohl nicht mit einander verwachsen, und umschliessen den Vorderteil der trichterförmigen Mundöffnung. Sie sind aber hier noch mehr umgewandelt, als bei *Limnochares,* und sind vielleicht am besten mit zwei gegen einander passenden, etwas unregelmässigen Halbkugeln zu vergleichen, die von den Vorderecken der Unterlippe eingefasst, die vordere Ausbuchtung derselben ausfüllen [1]). Nach hinten ruhen ihre abgeflachten Ränder an der sehr kräftigen Chitinbrücke, folgen den ebenfalls sehr kräftigen Stützleisten derselben nach unten, kehren danach nach vorne und oben um und bilden dadurch eine Gelenkhöhle, in welcher, wie bei *Limnochares*, die Klauenglieder der Mandibeln articulieren (Fig. 14, Mg). An der Chitinbrücke, die mit ihren Leisten ein Gewölbe über der Mündung des Oesophagus bildet, ruhen mit ihren Vorderenden die kräftigen, säbelförmigen Luftkammern (Figg. 13, 14, S), die sich von dort schräg nach oben strecken und ihrer Länge nach die Ansatzlinie je eines grossen Muskelbündels bilden, die andererseits an den oberen und hinteren Ecken der Grundglieder der Mandibeln inserieren und durch ihre Contraction eine, gewiss nicht grosse, Emporhebung der Mandibulargliedеr bewirken (Fig. 16. MMd_2). Die genannten Glieder haben wie gewöhnlich je eine Gelenkfläche, die den Vorderenden der Luftkammern anliegt. Von diesen leiten ein Paar Trachéenstämme von nicht unbedeutender Länge zu den vorne zwischen den Mandibulargliedern befindlichen Stigmen (Fig. 13, St). Die Klauenglieder der Mandibeln (Md_2) haben, wie bei *Limnochares*, einen geraden Basalteil und eine gekrümmte Spitze. Sie articulieren gegen die genannten Gelenkflächen der Grundglieder, und sind mit zwei Systemen von Muskeln ver-

[1]) Soweit man nach Cronebergs Figuren urteilen kann, lässt er irrtümlich die Mandibeln ohne Grenze in die Seitenecken der Unterlippe übergehen (5, Taf. I, fig. 4), während in der Wirklichkeit zwischen beiden eine deutliche Grenze vorhanden ist. Cronebergs russischer Text ist mir, ebenso wie den meisten anderen Forschern auf diesem Gebiete, unzugänglich gewesen.

sehen, von welchen das eine an dem gekrümmten Rücken der Klaue befestigt ist und dieselbe einzieht, wogegen das andere an dem Basalteil des Gliedes befestigt, durch seine Contraction die Mandibularspitze ausstreckt (MMd$_3$). Beide diese Muskelsysteme befestigen sich andererseits an den Wandungen der Grundglieder der Mandibeln. Die Mundöffnung ist trichterförmig, wie bei *Limnochares*, mit einer dichten Reihe von Borsten umgeben, und nach vorne von den Basalgliedern der Mandibeln, nach hinten von der Unterlippe eingeschlossen. Die Oeffnung selbst ist nach unten, nicht wie bei den übrigen Hydrachniden nach vorne gerichtet. Der Oesophagus und seine Muskulatur besitzt keine erwähnenswerthen Eigentümlichkeiten. Ebenso sind die kräftigen Palpen von ungefähr derselben Form wie bei den Hygrobatinen.

Die Uebereinstimmungspunkte zwischen den Mundteilen von *Eylais* und *Limnochares* sind schon oben teilweise erwähnt worden. Um dieselben noch einmal zu wiederholen, sprechen für die genannte Ansicht die transformierten wenig beweglichen Grundglieder der Mandibeln, die ausgezogenen, sehr beweglichen, eigentümlich eingelenkten Klauenglieder derselben, die Form der Mundöffnung, die Lage der Luftkammern: Uebereinstimmungen, die noch mehr hervortreten, wenn man sich den Mundpanzer von *Eylais* vertikal neben den horizontalen Mundkegel von *Limnochares* so hingestellt denkt, dass die Mundöffnungen in beiden Fällen dieselbe Lage haben. Die Verschiedenheiten sind freilich noch bedeutender und deuten eine weitgegangene, selbständige Entwickelung der Eylainen an. Der Bau der Mundteile von *Limnochares* bietet jedoch, wie gesagt, unter sämmtlichen Hydrachnidentypen die meisten Vergleichspunkte mit *Eylais* dar, die auch über den möglichen Gang der Entwickelung von *Eylais* einige Andeutungen geben, was ein Vergleich mit den gewöhnlichen Hydrachnidentypen in weit geringerem Grade darbietet.

Bei der letzten Subfamilie der Hydrachniden, der von einer einzigen Gattung gebildeten Gruppe der *Hydrachninae*, finden wir eine von den vorigen Typen ganz abweichende Bildung der Mundteile, die sich überhaupt weit näher mit dem Landacaridentypus, der durch die Gattung *Rhyncholophus* repräsentiert ist, als mit den Trombidien vergleichen lässt (cfr Fig. 15, die die Mundteile eines *Rhyncholophus* darstellt, mit Fig. 16, die die Mundteile von einer *Hydrachna* wiedergiebt). Charakteristisch für die in Rede stehenden beiden Formen ist der Bau der Mandibeln (Md). Diese sind nämlich hier nicht zweigliedrig, klauenförmig, wie bei den vorigen Typen, sondern eingliedrig, stiletförmig. Mit dieser Abweichung gehen natürlich Veränderungen der Bewegungsmuskulatur des ganzen Mundapparates Hand in Hand, und auch die Unterlippe ist nicht unbedeutend umgewandelt. Bei den Rhyncholophen weicht

jedoch der allgemeine Habitus der Mundteile noch nicht so bedeutend vom Trombidiumtypus ab: die Mandibeln sind verhältnissmässig kurz, der Mundkegel hat die gewöhnliche, conische Rüsselform, obwohl die Seitenecken desselben etwas in die Höhe gezogen sind. Dagegen ist bei *Hydrachna* die Unterlippe (Fig. 16, Lb) in einen langen, rinnenförmigen Schnabel ausgezogen, welcher die ausserordentlich langen Mandibeln in sich birgt. Diese besitzen ein flach kammförmiges Hinterende, welches Insertionsflächen für die Bewegungsmuskeln darbietet, sind aber übrigens degenförmig, am Mittelteil flach, an der Spitze scharfeckig im Durchschnitt. Die Luftkammern sind verhältnissmässig unbedeutend. Um so kräftiger sind die Ausführungsgänge derselben entwickelt (Fig. 16, Tr). Sie laufen von den Luftkammern aus erst aufwärts, dann in einem scharfen Bogen nach unten und münden zwischen den Mandibeln in weiten, trichterförmigen Stigmen aus. Ihre Wandungen sind stark chitinisiert, und an ihnen inserieren die Bewegungsmuskeln der Mandibeln. Wie der Vorderteil der Unterlippe ausgezogen ist, so ist auch der Hinterteil derselben stark in die Höhe gezogen, mit abgerundeten Flügeln. Die Palpen unterscheiden sich von denjenigen der vorigen Hydrachnidentypen durch ihre ausserordentlich grossen Grundglieder; ihre Spitzen sind scheerenförmig. Die Muskulatur des Oesophagus unterscheidet sich überhaupt nicht von dem entsprechenden Muskelsystem bei den übrigen Hydrachnidenformen.

Verdauungsorgane.

Wenn also die äusseren Mundwerkzeuge bei den Hydrachniden, wie oben beschrieben wurde, sehr bedeutend variieren, sind die Verdauungsorgane selbst die ganze Familie hindurch von ziemlich demselben Bau. Die Saugvorrichtung des Mundes und der Bau des Oesophagus stimmen im allgemeinen bei den verschiedenen Hydrachnidenformen ganz überein, weshalb auch die oben für die Hydryphantinen gegebene Beschreibung dieser Teile für die ganze Familie gelten kann. Der Oesophagus, der nach dem Austritt aus dem Mundkegel ein einfaches Röhrchen bildet, durchsetzt wie bei anderen Acariden das Centralganglion und mündet in den Lebermagen ein. Dieses Organ bildet bei den meisten Hydrachniden einen flachgedrückten, nach vorne wie nach hinten geschlossenen Schlauch, der sich vorwärts in drei, rückwärts in zwei kurze, lappenförmige Blindsäcke erweitert. Dieses ist die Form des Lebermagens bei den Hygrobatinen. Bei *Hydryphantes*, *Diplodontus*, *Hydrachna* und besonders

bei *Eylais* ist die Zahl der Blindsäcke des Lebermagens ausserordentlich vergrössert, so dass man bei der letzteren Gattung bis 30 solche Lappen gezählt hat; bei *Hydryphantes* und *Hydrachna* findet man wenigstens 10—12 Blindsäcke. Die erwähnten Genera stimmen in dieser Hinsicht mit den Trombidien überein, bei denen der Lebermagen 12 Lappen besitzt. Eine ganz verschiedene Form des Lebermagens tritt neben den oben beschriebenen vereinzelt auf, welche man die ringförmige nennen könnte. Eine solche beschreibt MICHAEL bei *Thyas petrophilus:* der Oesophagus mündet in einen Centralteil ein, welcher jederseits einen breiten Schlauch rückwärts aussendet; diese beiden Schläuche, die an ihrer Aussenseite je zwei taschenartige Ausstülpungen zeigen, vereinigen sich unweit des Hinterendes der Körperhöhle. Durch die so gebildete ringförmige Oeffnung des Organes passieren die Körpermuskeln und das Excretionsorgan. MICHAEL erklärt das Entstehen dieser eigentümlichen Form des Lebermagens durch die Annahme, dass zwei ursprünglich blind geschlossene, vom Centralteil des Lebermagens nach hinten sich ausbreitende Schläuche sich später vereinigt haben, was wohl auch die wahrscheinlichste Erklärung ist. Einen in derselben Weise gebauten Lebermagen besitzt *Limnochares:* auch hier findet man einen Centralteil mit einem ringförmigen hinteren Anhang, ausserdem aber sendet der Centralteil noch ein Paar Schläuche vorwärts aus, die in der Gegend der Augen blind endigen. — Der Lebermagen ist bei allen Hydrachniden tiefbraun bis schwarz gefärbt, was vom Inhalt desselben herrührt; die Wandungen des Organes bestehen nach v. SCHAUB aus kugeligen, vielkernigen Zellen.

Der Lebermagen ist von einem eigentümlichen Organ überlagert, das gewöhnlich Excretionsorgan genannt wird. Es kommt ziemlich gleichartig bei den meisten in anatomischer Hinsicht genauer untersuchten Acariden vor: ein mehr oder weniger verästelter Schlauch, der, in der Afteröffnung ausmündend, sich vorwärts bis hinter die Augen ausbreitet und sich durch seine weisse bis rötlichweisse, durch die Körperhaut schimmernde Farbe auszeichnet. Es besteht nach v. SCHAUB aus von kugeligen Secretionszellen gebildeten Wandungen und einem stark lichtbrechenden, feinkörnigen Inhalt, der dem Organ die eigentümliche Farbe verleiht. Die Form des Organes variiert ausserordentlich, nicht nur bei verschiedenen Subfamilien und Gattungen, sondern auch bei verschiedenen Individuen derselben Species. Gewöhnlich ist das Organ Y-förmig, mit vorwärts gerichteten Gabelästen; diese Form schwankt aber bei verschiedener Füllung des Organes von einem dünnen Streifen bis zu einem grossen, beinahe den ganzen Rücken des Tieres bedeckenden, flachen Schlauch. Eine stärker verästelte Form zeigt das Organ z. B. bei *Limnesia* und *Hygrobates*, und besonders bei *Eylais*.

Das Verhältnis zwischen Lebermagen und Excretionsorgan ist von den meisten Hydrachnidenforschern behandelt worden, ohne dass jedoch irgend ein bestimmtes Resultat dabei erreicht worden wäre. Ein Rectum, das den Lebermagen mit dem After verbinden würde, ist bei den Hydrachniden ebensowenig wie bei anderen verwandten Acaridenformen gefunden worden. v. Schaubs (*21*, p. 121) Behauptung, dass bei *Hydryphantes* ein Rectum vorhanden sei, das nebst dem Excretionsorgan im After ausmünden sollte, ist ohne Zweifel falsch; ich habe dieselbe Art wie v. Schaub untersucht, ohne ein solches Organ zu finden, und ebensowenig ist es bei den übrigen in dieser Hinsicht von mir studierten Hydrachnidenformen vorhanden. Croneberg und Michael stimmen auch darin überein, dass der Lebermagen der von ihnen untersuchten Hydrachnidenspecies gegen den After hin geschlossen ist. Dasselbe Verhältnis ist bei den verschiedensten Landacariden vorhanden; so zum Beispiel bei den Trombidien, bei welchen Croneberg und Henking kein Rectum entdecken konnten; Letzterer vermutet, dass das Excretionsorgan das wahre Rectum sei, obwohl er keine Verbindung zwischen diesem Organ und dem Lebermagen entdecken konnte, eine Thatsache, die selbst gegen seine Theorie spricht. Ebensowenig ist ein Rectum bei den Bdelliden, die von Michael [1]) studiert worden sind, bei den Rhyncholophiden und bei der Eupodidenspecies *Norneria gigas*, die ich zu diesem Zweck untersucht habe, vorhanden. Bei allen diesen Formen mündet dagegen das Y-förmige Organ ganz deutlich nach aussen, und zeigt sich dadurch unzweifelhaft als ein wahres Excretionsorgan. Es ist auch von einigen Forschern mit den Malpighischen Gefässen der Insekten verglichen worden. Dagegen erklärt der russische Forscher Wagner (*23*, p. 137), dass die sogenannten Malpighischen Gefässen bei den Araneen im allgemeinen mit den Malpighischen Gefässen der übrigen Tracheaten nicht homolog sind, und bringt für seine Ansicht sowohl entwickelungsgeschichtliche wie functionelle Beweise vor. Diese Frage ist jedoch vom Gegenstand unserer Abhandlung allzu weit entfernt, um hier näher besprochen zu werden.

Der Digestionsverlauf lässt sich bei der in Rede stehenden Anordnung des Lebermagens und des Excretionsorganes sehr gut erklären: der Erstere kann, da die Tiere nur flüssige Nahrung aufnehmen, die durch die Wandungen des Magens resorbiert wird, eines Rectums entbehren; durch das Excretionsorgan werden die Aussonderungsprodukte des Körpers entfernt. Schwieriger wird dagegen die Erklärung des Verhältnisses zwischen den beiden Organen in entwickelungsgeschichtlicher Hinsicht, da man ja annehmen muss, dass die Acariden mit der erwähnten Anordnung des Verdauungskanales von Formen mit

[1]) Michael, The Anatomy of *Bdella*. Trans. Linnæan Society, 2nd ser. vol. VI part 7.

offenem Verdauungskanale abstammen. Bei den zu diesem Zweck untersuchten Larvenformen der Hydrachniden und Trombidien findet man ebensowenig wie bei den erwachsenen Formen irgend welchen Zusammenhang zwischen Lebermagen und After. Dieses Verhältnis zeigt ebenso wie die grosse Verbreitung des geschlossenen Digestionskanales unter den Acariden, dass die genannte Eigenschaft eine von den erwähnten Formen der Gruppe sehr früh erworbene ist. Es ist jedoch zu bemerken, dass die Phytoptiden, welche ohne Zweifel zu den allerprimitivsten Acaridenformen zu rechnen sind, einen vollständig offenen Verdauungskanal besitzen [1]), was unzweifelhaft auf das Vorkommen eines Rectums bei den Voreltern der Gruppe der Acariden deutet. Ebenso steht bei den Ixodiden [2]) und bei den Gamasiden [3]) der Magen durch ein wahres Rectum mit dem After in Verbindung; diese Familien sind aber von den oben erwähnten Acaridenformen mit geschlossenem Verdauungskanal in verwandtschaftlicher Beziehung weit entfernt, und bilden einen eigenen Zweig des grossen Stammes der Acariden. — Die Möglichkeit des totalen Verschwindens der Verbindung zwischen Magen und Rectum hängt natürlich von einer besonderen, mehr und mehr zunehmenden Einseitigkeit in der Lebensweise der Tiere ab, hier wohl am meisten von der Gewohnheit nur fliessende Nahrung aufzunehmen. Analogieen in dieser Hinsicht finden sich ja auch anderswo unter den Arthropoden, so z. B. bei den Bienenlarven, bei welchen, wie bekannt, der Magen ebenfalls geschlossen ist, das Rectum dagegen nur die Malpighischen Gefässe in sich aufnimmt; ein Verhältnis, das sich wohl durch die Gewohnheit der Larven, nur sorgsam zubereitetes Futter zu fressen, entwickelt hat. Ein ähnliches Verhältnis findet man ferner bei den Larven von *Myrmeleon*, deren Lebensweise freilich mehr mit derjenigen der obenerwähnten Acariden übereinstimmt, da dieselben sich wie die Letzteren von Raub ernähren. So weit verbreitet wie bei den Acariden ist jedoch der obenerwähnte Bau des Verdauungskanales vielleicht bei keiner anderen Arthropodengruppe, was, wie oben gesagt, darauf deutet, dass irgend ein Verhältnis schon früh in der Entwickelungsreihe der Acariden eine solche Veränderung hervorgerufen und weiter entwickelt hat. Die wahre Ursache dieser Entwickelungsrichtung ist jedoch, wie die meisten in der Entwickelungsgeschichte wirkenden Kräfte, vollkommen unerklärt.

Zu den Verdauungsorganen sind noch die Munddrüsen zu zählen, die bei den Hydrachniden immer vorkommen und in die Mundhöhle ausmünden. Diese

---

[1]) NALEPA, Die Naturgeschichte der Gallmilben. Wien 1894.

[2]) PAGENSTECHER, Beiträge zur Anatomie der Milben. Leipzig 1860.

[3]) MICHAEL, On the variations in the anatomy of the *Gamasinae*. Trans. Linnæan Society, 2nd ser., vol. V part 9.

Drüsen, deren Bedeutung noch nicht vollkommen aufgeklärt ist, scheinen bei allen Hydrachniden nach demselben Grundplane gebaut zu sein, und stimmen auch mit denselben Organen bei den Trombidien überein. Schon frühere Autoren haben diese Drüsen beobachtet; am genauesten sind dieselben von Michael beschrieben worden. Es giebt bei den Hydrachniden im allgemeinen drei Paar solcher Drüsen. Das erste Paar ist nierenförmig und befindet sich im Vorderende des Körpers, etwas hinter den Augen. Das zweite Paar ist ebenfalls nierenförmig, obschon unregelmässiger als das erste, und liegt unter und etwas hinter demselben. Jede dieser Drüsen besteht aus einer Anzahl von kegelförmigen Zellen, die, von einer gemeinsamen Haut umgeben, mit den Spitzen gegen das Centrum der Drüse geordnet sind. Der Inhalt dieser Zellen ist feinkörnig; an dem breiteren Ende besitzt jede Zelle einen grossen Kern. Der enge Centralraum der Drüse sammelt das Secret derselben, von wo es durch einen sehr dünnen Ausführungsgang weiter geleitet wird. Die hinteren Drüsen haben nach Michael je zwei Ausführungsgänge, die sich nach vorne vereinigen, was möglicherweise auch bei anderen Hydrachnidenformen als *Thyas* vorkommt, obschon es nicht gelungen ist, dieselben zu isolieren. Das dritte Drüsenpaar ist ganz verschiedenartig gebaut; es besteht nämlich aus zwei schlauchförmigen Organen mit sehr engem Lumen, ringsum welches die secernierenden Zellen, von rundlicher Form und mit feinkörnigem Inhalt, geordnet sind. Diese Drüsen befinden sich unter dem zweiten Drüsenpaar und beschreiben mehrere Windungen, ehe sie sich zum Ausführungsgang verengern. Die Ausmündungsweise sämmtlicher Drüsen in die Mundhöhle ist zuerst von Michael aufgeklärt worden. Es münden nämlich alle drei Drüsen der einen Körperseite in einen gemeinsamen, etwas erweiterten Schlauch aus, welcher dann als gemeinsamer Ausführungsgang der Drüsen vorwärts leitet. Die beiden Gänge durchsetzen die Chitinbrücke des Rüssels und münden unweit derselben in eine schwach trichterförmige Mündung aus.

Die Funktion dieser Drüsen ist noch nicht ganz aufgeklärt, obschon dieselben sicher dem Verdauungskanal angehören. Henking nennt die ganz gleichartigen Drüsen der Trombidien Giftdrüsen, ob mit Recht, ist schwer zu sagen. Gewöhnlich werden dieselben jedoch als Verdauungsdrüsen betrachtet. van Vleet (*22*, p, 20) vermutet, dass dieselben an einer Verdauung ausserhalb des Körpers teilnehmen, wie sie auch bei einigen Insektenlarven vorkommt. Irgend welche experimentelle Bestätigung davon giebt er jedoch nicht.

Nervensystem und Sinnesorgane.

Das Nervensystem der Hydrachniden bietet nichts von besonderem Interesse gegenüber demselben anderer Acariden dar, noch weniger zeigt es bedeutendere Variationen innerhalb der Familie. v. SCHAUB hat sehr genau die Anatomie und Histologie des Nervencentrums erforscht, und hat ausserdem sehr genau die Nervenstämme bis in ihre feinsten Verästelungen verfolgt. Wie bekannt besteht das Nervencentrum der Acariden aus einem einzigen, aus den verschmolzenen Massen des Gehirn- und Bauchganglions gebildeten Ganglion, welches vom Oesophagus durchsetzt ist. Es bildet bei den Hydrachniden eine nierenförmige bis kugelige Masse, von welcher der oberhalb des Oesophagus befindliche Teil dem Gehirn entspricht, der untere dem Bauchganglion. Es besteht nach v. SCHAUB aus einer äusseren, bindegewebigen Hülle, einer peripherischen Lage apolarer Elemente und einem Kernteil aus Faserelementen und bipolaren Ganglienzellen, an welchen man eine Schlundkommissur unterscheiden kann, und aus welchem die Nervenstämme entspringen. Von den Letzteren sind die Folgenden am bedeutendsten: aus dem Gehirn ziehen zwei bedeutende Stämme zu den Augen und vier paarige und ein unpaarer Stamm zu den Mundteilen (MICHAEL); aus dem Bauchteil des Nervencentrums entspringen noch ein Paar zu den Mundteilen ziehende Stämme, vier Nervenpaare, die die vier Extremitätenpaare versorgen, sowie ein Paar, das die Geschlechtsteile innerviert.

Dass die Hydrachniden, die eine sehr bewegliche Lebensweise führen, mit Sinnesorganen von hoher Entwickelung ausgestattet sein müssen, ist selbstverständlich. Sie besitzen in der That mehrere Organe, die unzweifelhaft als Sinnesorgane zu deuten sind, obwohl eine nähere Bestimmung ihrer Funktion oft unmöglich ist. Die einzigen völlig verständlichen Sinneswerkzeuge der Hydrachniden sind die Augen, die wohl auch die wichtigsten sind. — Die Augen fehlen bei den Hydrachniden niemals, und sind immer hoch entwickelt, so dass unter sämmtlichen Acariden nur die Trombidien in dieser Hinsicht den Hydrachniden gleich kommen; übrigens variieren aber die Augen in betreff des Baues und der Lage bedeutend bei den verschiedenen Unterfamilien und Gattungen, und bieten nicht nur gute Merkmale für die Systematik, sondern auch interessante Gesichtspunkte zur Beurteilung der verschiedenen Entwickelungsstufen innerhalb der Gruppe dar. Schon den früheren Systematikern sind die Verschiedenheiten in der Lage der Augen bekannt gewesen; v. SCHAUB hat zuerst ihre Anatomie näher studiert.

Das Hydrachnidenauge besteht aus einer durchsichtigen Linse, die entweder kugelig, oder abgeplattet, oder auch keulenförmig ist, und einer stark pig-

mentierten, meist becherförmigen Retinaschicht, in welcher die Verästelungen des Sehnerven sich verteilen. Die Augen sind vier an der Zahl und am Vorderrande des Körpers gelegen, mehr oder weniger von der Medianlinie desselben entfernt. Am einfachsten sind unzweifelhaft die Augen der Gattung *Diplodontus* organisiert. Sie stimmen in ihrem Bau sowie in ihrer Lage mit denjenigen der meisten Rhyncholophen und einiger Trombidien überein. Die Augen sind beiderseits weit von einander entfernt, indem das eine Paar am Körperrande nach oben gerichtet ist, das andere niedriger steht und unter dem Körperrand versteckt nach unten blickt, was einer Art der Gattung den Namen *despiciens* verschafft hat. Jedes Auge liegt unter der Körperhaut eingebettet, die Linse desselben ist ganz einfach von einer Verdickung der Körpercuticula gebildet, die auf dem Retinabecher lagert. Diese Anordnung der Augen findet man bei keiner anderen Hydrachnidengattung wieder. Im allgemeinen sind die Augen der Hydrachniden an jeder Seite des Körpers paarweise mehr oder weniger intim vereinigt. Eine Augenstellung dieser Art, die mit derjenigen der Trombidien am meisten übereinstimmt, besitzen die Gattungen *Thyas*, *Hydryphantes*, *Hydrachna* und *Limnesia*. Die Augen jeder Körperseite sind bei diesen Formen deutlich von einander getrennt, jedoch von einer gemeinsamen Chitinkapsel umgeben, die nach innen offen ist, und nach aussen zwei Ausbuchtungen, in welchen die Retinakörper der Augen ruhen, besitzt; die Linsen werden einfach durch eine durchsichtige Verdickung des Chitines der Kapsel oberhalb des Retinabechers gebildet, eine Verdickung, die entweder einfach linsenförmig ist oder auch zapfenartig in den Retinabecher hineinragt, wodurch die Linse keulenförmig erscheint. Diese Augenform ist natürlich ganz unbeweglig, was auch mit der sessilen Augenform bei den Trombidien der Fall ist.

Die obengenannten Augenformen haben, wie gesagt, Aehnlichkeit mit den Augen verschiedener Landacariden. Ganz abweichend gestaltet sind dagegen die Augen der Gattungen *Limnochares* und *Eylais*. Gegenüber allen übrigen Hydrachniden besitzen diese beide Formen die Eigentümlichkeit, dass ihre Augen sämmtlich von einer gemeinsamen Chitineinfassung umgeben sind, was ältere Systematiker veranlasst hat, die beiden Genera zu einer Subfamilie *Medioculatae* zu vereinigen. Bei *Limnochares* sind die Augen paarweise an dem Rande eines länglichen Chitinstreifens geordnet, der grosse Aehnlichkeit mit der „Crista metopica" der Trombidien und Rhyncholophiden zeigt, und auch mit grösster Wahrscheinlichkeit mit dieser Bildung homolog ist (s. oben Pag. 7). Durch eine Umbeugung des Randes der Chitinleiste werden Kapseln gebildet, die die Augen einschliessen und deren Wände unmittelbar in die Linsen der Augen übergehen. Ganz anders verhält es sich mit den Augen von *Eylais*. Hier sind

die Augen der beiden Körperseiten in Chitinkapseln vereinigt, die denjenigen der Hydryphantinen nicht unähnlich sind, die aber durch einen brückenartigen, krummen Chitinstreifen vereinigt sind, wodurch das Ganze ein brillenartiges Aussehen bekommt. Ob diese Brücke mit der bei *Limnochares* erwähnten Chitinbildung identisch ist, lässt sich nicht mit voller Sicherheit entscheiden. Unwahrscheinlich ist es jedoch nicht, dass diese Chitinbildung eine Verkümmerung der bei den höheren Acariden vorkommenden „Crista metopica" ist, von welcher nur dieser, die Augen verbindende Teil zurückgeblieben ist.

Schliesslich muss nun die Augenform beschrieben werden, die bei den Hydrachniden am meisten verbreitet ist, indem beinahe sämmtliche Hygrobatinen nach diesem Typus gebaute Augen besitzen. Es ist eine Form, die man die Doppelaugenform nennen könnte, eine Form, die unter den Verwandten der Hydrachniden nur bei vereinzelten *Trombidium*-arten vorkommt. Bei dieser Augenform sind die beiden Augen der einen Seite des Körpers sehr innig vereinigt, indem die Retinakörper der beiden Augen verschmolzen sind, sodass nur die beiden Linsen noch die ursprüngliche Zahl der Augen andeuten, was auch frühere Systematiker veranlasst hat, das Augenpaar als ein einziges Auge zu deuten. Dieses Doppelauge ist nicht wie die vorerwähnten Augenformen von der Körperhaut eingefasst, sondern liegt frei beweglich unter derselben. Die Haut ist in der Gegend des Augenpaares verdünnt und ganz durchsichtig. Auch bei den gepanzerten Hydrachniden verdünnt sich der Panzer über den Augen und verliert seine Porosität. Das Doppelauge ist unter der Haut durch einen eigentümlichen Bewegungsmechanismus befestigt. Ein Ligament einerseits, ein kleiner Muskel andererseits, verbinden nämlich dasselbe mit der Cuticula, und durch die Bewegungen des Muskels wird das Auge in einer oft beinahe continuierlicher Bewegung gehalten. Besonders bemerkbar sind diese Augenbewegungen bei einigen *Atax*- und *Curvipes*-arten, bei anderen Hydrachnidenformen, z. B. bei *Arrhenurus*, sind dieselben dagegen weniger deutlich. Diese Beweglichkeit der Augen ist natürlich für das Sehen sehr vorteilhaft und verrichtet denselben Dienst, wie die Beweglichkeit der gestielten Augen einiger *Trombidium*-arten.

Das von v. SCHAUB an *Hydryphantes* entdeckte unpaare Auge, das auch später bei einigen *Thyas*-arten gefunden wurde, ist noch zu erwähnen. Diese Bildung ist eine der eigentümlichsten Erscheinungen in der ganzen Hydrachnidengruppe, da dieselbe weder unter den übrigen Gattungen derselben, noch unter den mit ihnen verwandten Acaridenformen irgend etwas Entsprechendes besitzt. Man findet in der Mitte des Rückenschildes ein wahres, sehr kleines Auge, das mit einem besonderen Nerv versehen ist. Wie diese Bildung entstan-

den ist und was ihre Funktion ist, muss als etwas noch ganz unaufgeklärtes gelten, denn einen grossen Zuschuss zu der Sehkraft des Tieres kann dieselbe jedenfalls nicht geben.

Unter den übrigen Sinneswerkzeugen der Hydrachniden nehmen die sogenannten Sinnesborsten den ersten Platz ein. Diese Bildungen, die schon den älteren Forschern bekannt waren, kommen besonders an den Palpen und Extremitäten, aber auch zerstreut am Körper selbst vor. In der Form variieren dieselben bei verschiedenen Hydrachniden bedeutend. An dem ersten Extremitätenpaar, das ebensoviel als Tastorgan, wie als Bewegungsorgan dient, findet man solche Borsten in mehreren Grössen und Formen. Gewöhnlich sind einfache stiletartige Borsten; ausserdem sind zu bemerken z. B. die schraubig gewundenen Formen, die bei *Atax*- und *Cochleophorus*-arten vorkommen. Oft sind diese Borsten an besonderen Höckerchen beweglich eingelenkt. Noch zu erwähnen sind die breiten und flachen Fiederborsten, die bei einigen Hydrachniden über sämmtliche Extremitäten zerstreut sind. Höchst wahrscheinlich stehen die Sinnesborsten mit besonderen Nervenverästelungen in Verbindung. Henking (*8*, p. 577) hat wenigstens solche Nervenäste bei den ganz homologen Sinnesborsten der Trombidien deutlich beobachtet. Als Sinnesborsten irgend welcher Art sind ferner zwei grössere, mit Hautdrüsen in Verbindung stehende Haare an dem Vorderende des Körpers, die s. g. antenniformen Haare, von einigen Forschern gedeutet worden. Möglich ist es wohl, dass diese Borsten irgend ein besonderes Tastvermögen besorgen.

Ein Sinnesorgan mit ganz rätselhafter Funktion, das aber unter den Hydrachniden und den mit ihnen verwandten Acariden sehr verbreitet ist, findet man am Vorderende des Körpers zwischen den Augen. Henking beschrieb zuerst das Organ bei den Trombidien; nachher hat v. Schaub dasselbe auch bei den Hydrachnidengattungen *Eylais*, *Hydryphantes* und *Atax* gefunden. Bei *Trombidium* fand Henking (*8*, p. 575), dass das Vorderende des Rückenkammes zu einer doppelten Chitinkapsel erweitert ist, in deren Räume sich zwei Bläschen befinden, welche einen körnigen Inhalt haben und von der Körperhaut ganz abgeschlossen sind. Sie stehen einerseits mit einem Nervenast in Verbindung, andererseits ist oberhalb jedes Bläschens ein Haar in der Chitinkapsel eingelenkt. Diese Bildungen sind unzweifelhaft Sinnesorgane, welche aber ihre Funktion sein mag, ist unsicher. Ein Organ von ganz demselben Bau findet man bei *Eylais* an der Chitinbrücke zwischen den Augen. Es wurde zuerst von v. Schaub entdeckt, der auch bei *Hydryphantes* Bildungen von ähnlicher Beschaffenheit entdeckt hat, die aber hier alle vier Ecken des Rückenschildes einnehmen. Es scheint das genannte Organ wie gesagt auch bei anderen

Hydrachniden vorzukommen; bei den meisten Formen tritt dasselbe als ein Paar einfacher Bläschen unter der Haut auf, wie v. SCHAUB es bei den durchsichtigen *Atax*-arten gefunden hat.

Geschlechtsorgane und Geschlechtsdimorphismus.

Die Hydrachniden sind, wie die übrigen Acariden, getrennten Geschlechts. Der innere Bau ihrer Generationsorgane ist von CRONEBERG *(5)*, v. SCHAUB (*21*, p. 140) und MICHAEL (*15*, p. 192) genau untersucht worden; eine spätere Forschung hat in betreff dieser Organe nur ihre Resultate zu bestätigen gehabt. Die Ovarien sind ursprünglich paarige Schläuche, die sich aber stets mit ihren Enden vereinigen und dadurch einen horizontalen Ring bilden, welcher an seiner Ober- und Aussenseite die Eier erzeugt. Bei den Formen, die einen vielappigen Lebermagen besitzen, schiebt sich das Ovarium zwischen den Blindsäckchen des Magens ein und ist schwer von den letztgenannten zu isolieren. Von den Seiten des Ovarialringes gehen zwei Eileiter aus, die sich bald vereinigen und als ein kurzes, gerades Rohr zur Genitalöffnung führen. Der Eileiter hat muskulöse Wandungen und erweitert sich zuweilen kurz vor seiner Mündung zu einem kugeligen Uterus.

Die männlichen Organe variieren viel bedeutender als die weiblichen. Die Testes sind paarig und bilden zuweilen zwei einfache Schläuche, wie MICHAEL sie bei seiner *Thyas*-art gefunden hat. Meist ist jedoch die Testis in mehrere Lappen verzweigt, die, wenn sie mit Sperma gefüllt sind, einen sehr bedeutenden Raum einnehmen. Zwei Vasa deferentia leiten das Sperma zu einem unpaaren Ausführungsgang von sehr kompliziertem Bau. Das Organ ist in der Ruhelage mehrmals gefaltet, und zwar entweder seitlich, oder auch so, dass der untere Teil fernrohrartig in den oberen geschoben ist; das Ganze ist von kräftigen Muskeln umgeben, die von Chitinleisten gestützt werden. Diese Leisten variieren bedeutend was ihre Form und Lage betrifft. Bei einigen Formen, z. B. bei *Hydryphantes* und *Diplodontus* sind sie kräftige, gekrümmte Chitinstäbe; die, auf den unten zu erwähnenden Genitalplatten ruhend, beiderseits den Ausführgang umschliessen. Bei anderen Formen ist dieses Chitingerüst nur durch kleine, rudimentäre Stäbchen vertreten, und bei einigen Gattungen, z. B. *Arrhenurus*, fehlen sie gänzlich. Die Muskeln, welche den Ausführgang umgeben, bewirken durch ihre Contractionen eine Ausstülpung des Ausführganges oder wenigstens eine Entleerung des Inhaltes.

Die äussere Umgebung der spaltförmigen Genitalöffnung ist bei den verschiedenen Hydrachnidenformen mit accessorischen Bildungen von ausserordentlich variierender Form ausgestattet: Bildungen, die schon den früheren Forschern aufgefallen sind und sehr wichtige Merkmale für die Systematik gegeben haben, weshalb sie auch genau beschrieben worden sind. Es sind Chitinscheiben, ringförmige Chitinbildungen in verschiedenartiger Anordnung u. s. w. Sie sind um so merkwürdiger, als bei den verwandten Landacariden keine, oder wenigstens sehr unbedeutende Bildungen dieser Art zu finden sind. Am einfachsten ausgestattet sind die Umgebungen der Genitalöffnung, oder das Genitalfeld, wie man es nennen kann, bei den Gattungen *Eylais* und *Limnochares*. Bei der Ersteren findet man nur die spaltförmige Geschlechtsöffnung ohne jegliche accessorische Chitinbildungen, bei den Letzteren ist die Geschlechtsöffnung von drei napfförmigen Gebilden begleitet, von welchen zwei dem Vorderende, eine dem Hinterende der Oeffnung nahe stehen. Ausgenommen bei diesen Gattungen ist bei sämmtlichen Hydrachnidenformen die Genitalöffnung von Chitinleisten oder Platten umgeben, die mit napfförmigen Bildungen besetzt sind.

Untersuchen wir zuerst die Familien *Hydryphantinae* und *Hydrachninae* in betreff dieser Bildungen, so finden wir, dass die Gattung *Thyas* Verhältnisse zeigt, die als primitiv gelten können, indem das Genitalfeld von zwei dünnen Chitinstreifen eingerahmt ist, von welchen jeder von drei Näpfen begleitet wird, von denen zwei zwischen den Streifen und der Genitalspalte und einer ausserhalb der Streifen sich befinden. Bei der Gattung *Hydryphantes* ist die Anordnung des Genitalfeldes wechselnd: die Genitalspalte ist von zwei dreiseitigen Chitinscheiben umgeben, die entweder mit je drei, oder, selten, mit mehreren Näpfen besetzt ist. Bei den Gattungen *Hydrachna* und *Diplodontus* ist die Genitalöffnung von zwei bauchigen, halbmondförmigen Chitinscheiben eingerahmt. die mit kleinen Näpfen dicht besetzt sind. Was nun schliesslich die *Hygrobatinae* betrifft, so findet man unter den zahlreichen Gattungen dieser grossen Subfamilie sehr wechselnde Gestaltungen des Genitalfeldes. Die einfachste und zugleich die häufigste Form desselben ist die, welche z. B. bei *Hygrobates*, *Piona* und *Limnesia* vorkommt: die Geschlechtsöffnung wird von zwei sichel- oder halbmondförmigen Chitinplatten umgeben, von welchen jede drei Näpfe trägt. Ebenso häufig kommt es vor, dass die Chitinscheiben selbst eben sind, und die drei Napfpaare an dem schmalen Rande zwischen Scheibe und Geschlechtsöffnung zu finden sind: Beispiel *Frontipoda* und *Lebertia*. Bei der grossen Gattung *Curvipes* herrschen eigentümliche Verhältnisse: die Zahl der Geschlechtsnäpfe ist sehr gross, variiert aber, ebenso wie die Lage derselben bei verschiedenen Species; bald sind sie an einer, bald an zwei Platten jederseits

der Geschlechtsöffnung gelegen, bald in die Cuticula selbst ohne jede Plattenbildung eingebettet, bald sind sie zusammengedrängt, bald zerstreut. Bei der Gattung *Cochleophorus* und den parasitischen *Atax*-arten sind die Chitinschilder des Genitalfeldes halbmondförmig, mit vielen kleinen Näpfen versehen, etwa wie bei *Diplodontus:* dagegen hat *Atax crassipes* sechs grosse Näpfe jederseits der Geschlechtsöffnung. Von den gepanzerten Arten haben *Frontipoda, Mideopsis* und *Midea* Geschlechtsscheiben von gewöhnlichem Aussehen und mit drei Näpfen, die Gattungen *Brachypoda*, *Aturus* und *Arrhenurus* sehr abweichend gestaltete Geschlechtsfelder, die unten im Zusammenhang mit dem Geschlechtsdimorphismus näher beschrieben werden sollen.

Die Bedeutung der oben beschriebenen Bildungen muss als noch unaufgeklärt gelten. Die Chitinscheiben spielen natürlich eine wichtige Rolle als Insertionspunkte für die Genitalmuskeln, ob aber diese Funktion genügt um ihre Entstehung zu erklären, ist um so unsicherer, als diese Bildungen bei einigen Formen fehlen. Eine gewiss secundär erworbene Bedeutung haben bei weichhäutigen Hydrachnidenformen die Genitalplatten als Insertionspunkte für die Contractionsmuskeln des Körpers. Die Genitalplatten besitzen sogar bei einigen Gattungen an den beiden Enden nach innen hervorragende Leisten, an welchen die oben beschriebenen Muskeln inserieren. Eine andere wichtige Rolle haben sie als Träger der Genitalnäpfe, aber diese Organe sind in betreff ihrer Funktion noch rätselhafter als die Chitinscheiben. Eine solche Bildung (Fig. 17, A, B) besteht, wenn sie nicht verkümmert ist, aus einem Schälchen von hartem Chitin, das ähnlich den Saugnäpfen eines Tintenfisches im Chitin der Genitalplatte oder auch in der Cuticula eingebettet ist. An der Innenseite des Napfes ist ein sackförmiges Gebilde mit der Mündung an der Chitinscheibe befestigt. Dieser Sack enthält einige conische Zellen mit grossen Kernen, etwas ähnlich den Secretionszellen der Rückendrüsen. Es giebt aber auch Hydrachnidenformen, bei welchen die Napfbildungen verkümmert sind. So ist z. B. bei der Gattung *Arrhenurus* die Genitalöffnung von zwei breiten, mit kleinen Näpfen dicht besetzten Scheiben umgeben; ein Schnitt durch die Scheiben zeigt aber, dass unter den Napföffnungen nur eine Chitinschicht mit engen Poren, aber keine Säckchen zu finden ist.

Frühere Hydrachnidenforscher, die nur die äussere Form der Genitalnäpfe beobachtet haben, betrachten allgemein dieselben als Saugorgane, mit welchen sich die Geschlechter während der Copulation gegenseitig festhalten sollten. v. SCHAUB, der doch die Organe anatomisch untersucht hat, teilt diese Ansicht. Ihre Unhaltbarkeit ist jedoch schon von HALLER (7, p. 25) bewiesen worden, der die oben erwähnten mit den Näpfen in Zusammenhang stehenden Säckchen

beobachtete. Der Bau der Genitalnäpfe zeigt auch nichts, was Veranlassung geben sollte, dieselben als Haftorgane aufzufassen. Sie entbehren nicht nur der dazu nötigen Muskulatur, sondern auch des Raumes, worin die Luft verdünnt werden sollte. Haller vermutet dagegen, dass die Säckchen der Genitalnäpfe Sinnesorgane irgend welcher Art sein sollten, und vergleicht dieselben mit den Gehörbläschen, die an den Vorderextremitäten der Dytisciden zu finden sind, eine Ansicht, deren Unhaltbarkeit kaum einen Beweis erfordert. Dass die Napfbildungen mit dem Geschlechtsleben der Tiere verbunden sind, wird nicht nur durch ihre Lage bewiesen, sondern auch durch die Thatsache, dass sie erst bei geschlechtsreifen Individuen in voller Entwickelung auftreten, dagegen während des Nymphenstadiums unreif sind. Die Säckchen, welche die Näpfe begleiten, haben, wie gesagt, eine gewisse Aehnlichkeit mit Secretionsdrüsen, aber gegen ihre Eigenschaft als solche spricht die Abwesenheit irgend einer eigentlichen Oeffnung im Chitinnapfe, durch welche das Secret entleert werden könnte. Beim Fehlen jeder anderen Erklärung will ich jedoch die Vermutung wagen, dass die Säckchen faktisch secernierende Organe sind, deren Producte durch die immer vorhandenen Poren des Chitins der Näpfe hinausdringen. Es liegt nahe bei der Hand anzunehmen, dass in solchem Falle das Secret der Drüsen dazu dienen würde, die Geschlechter während der Paarungszeit zu einander zu locken.

Es mag noch hervorgehoben werden, dass diese Näpfe für die Hydrachniden ganz eigentümlich sind, denn bei den verwandten Landacariden findet man entsprechende Bildungen sehr selten und jedenfalls nur solche von unbedeutender Grösse. Da die erwähnten Organe also nur bei dieser einzigen Gruppe vorkommen und zu einer so grossen und formenreichen Entwickelung gelangt sind, so erscheint die Annahme nicht unberechtigt, dass die besonderen biologischen Verhältnisse der Hydrachniden mitgewirkt haben, um ein so eigentümliches Organsystem zu schaffen, was wir auch für die ebenso vereinzelt auftretenden Hautdrüsen vermutet haben. Gerade in dieser Hinsicht würde die obengenannte Hypothese von einem Drüsensecret, das im Wasser verbreitet, die Geschlechter anlocken sollte, passen. — Doch, es sind das alles nur Vermutungen; am vorsichtigsten wird es wohl sein, dem Urteil Michaels über diese eigentümlichen Organe beizustimmen: dass sie in irgend welcher Beziehung zu den Geschlechtsorganen stehen.

Wir werden nun eine andere für die Hydrachniden sehr charakteristische Eigenschaft in Betracht nehmen: den Geschlechtsdimorphismus. Diese Eigenschaft tritt unter den verschiedenen Hydrachnidenformen zwar in sehr wechselnder Ausbildung auf, in ihrer höchsten Form aber ist dieselbe so entwickelt, wie in keiner anderen von den freilebenden Acaridengruppen. Zu bemerken ist, dass diese Eigenschaft nur unter den Hygrobatinen auftritt; die übrigen Unterfamilien der Hydrachnidengruppe verhalten sich in betreff dieses Charakters genau so, wie die mit ihnen verwandten Landacariden, das heisst, die Geschlechter sind äusserlich an höchst unbedeutenden oder gar keinen Charakteren zu unterscheiden.

Auch unter den Hygrobatinen giebt es Gattungen ohne, oder mit höchst unbedeutenden Geschlechtsunterschieden. Solche Formen sind z. B. *Limnesia* und *Hygrobates*, bei welchen der einzige Unterschied zwischen Männchen und Weibchen in dem Verhalten der Genitalscheiben besteht, die beim Männchen die Genitalöffnung vollkommen umschliessen, beim Weibchen aber die Spalte nur seitlich begrenzen. Aehnliche unbedeutende Geschlechtsunterschiede findet man bei den Gattungen *Oxus*, *Frontipoda*, *Midea*, *Sperchon*, *Lebertia*, *Piona*, und einigen anderen. Gattungen dagegen, welche bedeutende Geschlechtsdimorphismen zeigen, sind *Curvipes, Acercus, Aturus, Brachypoda* und vor allen Dingen *Hydrochoreuthes* und *Arrhenurus*. Von allen diesen Formen ist zu bemerken, dass die Weibchen immer die normale Hydrachnidenform beibehalten, wogegen die Männchen charakteristischen, mehr oder weniger grossen Veränderungen unterworfen sind. Diese Veränderungen treffen besonders die Umgebung der Geschlechtsöffnung, demnächst sind die beiden letzten Extremitätenpaare grösseren oder kleineren Umgestaltungen unterworfen. Bei der Gattung *Aturus* ist das Genitalfeld des Männchens von sehr breiten Platten eingefasst und am Rande von einem Haarbündel begleitet, das dem Weibchen fehlt; auch ist das hinterste Fusspaar des Männchens bedeutend umgewandelt, indem die vierten und fünften Glieder desselben keulenförmig verdickt sind, das fünfte dazu gekrümmt und mit Haarbündeln besetzt ist. Das Männchen der *Brachypoda* trägt am vierten Glied des Hinterfusses ein grosses, hakenförmiges Greiforgan, nebst zwei dicken Borsten; das fünfte Glied ist keulenförmig und mit zwei Reihen kurzer Borsten besetzt; ausserdem ist die Genitalöffnung mit ihren Platten beim Weibchen endständig, beim Männchen am Bauche bis in die Nähe der Epimeren vorgerückt. Noch mehr verändert ist das hinterste Fusspaar beim Männchen der Gattung *Acercus*, indem hier das letzte Glied schwach keulenförmig, mit kräftigen Greifdornen besetzt und gegen das vorletzte Glied umschlagbar ist, in welcher Lage es auch gewöhnlich ruht. Die Genitalplatten zeigen bei dieser Gattung nicht besonders

bedeutende Unterschiede, dagegen ist der Rücken des Männchens mit einer Panzerplatte bedeckt, welche dem Weibchen fehlt.

Bei der grossen Gattung *Curvipes* sind bedeutende Unterschiede am Genitalfelde des Weibchens und Männchens zu beobachten. — Beim Weibchen ist die Genitalspalte von mehreren Geschlechtsnäpfen umgeben, die, wie oben gesagt, bei den verschiedenen Species, was die Lage und die Verteilung auf verschiedene Platten betrifft, in hohem Grade variieren. Dagegen sind beim Männchen, mit einer Ausnahme, die Napfplatten zwei an der Zahl und umfassen nebst der Genitalspalte eine hinter derselben gelegene taschenförmige Grube, die Samentasche, in welcher das Sperma aufgenommen wird. Das vierte Glied des letzten Fusspaares ist beim Männchen keulenförmig verdickt und trägt an der Innenseite eine schiefgewundene Aushöhlung deren Ränder mit Reihen von kurzen Dornen und längeren Borsten besetzt sind. Auch das letzte Glied des dritten Beinpaares ist zuweilen verändert, indem dasselbe entweder ein spiralig gewundenes Greiforgan darstellt, oder wenigstens verkümmerte Klauen trägt. Die Gattung *Piona* zeigt verdickte Glieder des letzten männlichen Hinterfusses, die denjenigen von *Curvipes* homolog sind, besitzt sonst aber keine bedeutende Geschlechtsdimorphismen.

Bei der Gattung *Arrhenurus* ist der Geschlechtsdimorphismus nicht auf einzelne Organen beschränkt, sondern die ganze Körperform des Männchens ist umgebildet worden, und zwar in höchst wechselnden Formen. Der Hinterteil desselben ist stets in Anhänge von eigentümlicher Form umgewandelt. Ein solcher Anhang ist entweder keulenförmig ausgezogen — Beispiel *A. globator*, oder ist derselbe kurz, breit, mit spitzen, seitlich auslaufenden Hörnern — *A. maximus*, oder schliesslich ganz stumpf, entweder ohne oder auch mit zangenförmig zusammengebogenen Hörnern — *A. forpicatus*. Die eigentümliche und abweichende Form dieser Tiere wird noch durch die Gegenwart verschiedener Höcker- und Zapfenbildungen auf dem Rücken erhöht. Dazu kommt noch, dass die Männchen bedeutend, oft um die Hälfte kleiner als die Weibchen sind. Das vierte Glied des Hinterfusses trägt bei den Männchen einiger Arten einen eigentümlichen, fingerförmigen Anhang, der reichlich mit Borsten besetzt ist, und unzweifelhaft mit der Copulation im Zusammenhang steht.

Ein sehr eigentümliches Copulationsorgan ist noch zu erwähnen, das nur bei einzelnen *Arrhenurus*-formen vorkommt [1]) und zu verschiedenen Deutungen Anlass gegeben hat. Es ist der sogenannte *Petiolus*, ein eigentümlich geformter

[1]) Der von Piersig *(20)* bei einigen früher als petioluslos betrachteten *Arrhenurus*-arten gefundene kleine Petiolus muss, scheint es mir, als rudimentär und für die Copulation bedeutungslos betrachtet werden.

Chitinstab der über der Analöffnung zwischen den Hinterhörnern des Körperanhangs — denn er kommt nur bei Arten mit dieser Form des Hinterkörpers vor — hervorragt (Fig. 18, A, Pt). Er ist verschieden geformt, entweder zugespitzt oder, gewöhnlicher, spatel- oder meiselförmig. Die aufwärts umgebogenen Ränder des Organes geben dem Ganzen die Form einer Rinne. An Querschnitten (Fig. 18, B) bemerkt man, dass die Basis dieser Rinne von einer dünnen Cuticula bedeckt ist, und dass der dadurch gebildete Hohlraum von einem Gewebe, das mit der Matrix-schicht der Haut in Verbindung steht, gefüllt ist. Dass dieses eigentümliche Organ bei der Copulation irgend welche Dienste leistet, ist schon von früheren Forschern vermutet worden und hat in der letzten Zeit Anlass zu Controversen zwischen angesehenen Forschern auf diesem Gebiete gegeben. Faktisch ist der Petiolus bei der Copulation thätig: es ist mir mehrmals gelungen, eine Copulation zweier *Arrhenurus*-individuen zu beobachten, und dabei war immer der Petiolus in die Genitalöffnung des Weibchens eingeschoben. Welche Bedeutung der Petiolus in der That hat, ist jedoch unsicher. Entweder kann derselbe bloss ein Reizorgan sein, oder wird thatsächlich durch denselben das Sperma dem Weibchen zugeführt. Gegen die letztere Annahme ist der Einwand gemacht worden, dass das Sperma unmöglich dem Petiolus zugeführt werden könne, da derselbe ja nicht unbedeutend von der Genitalöffnung entfernt ist. Eine unmittelbare Ueberführung ist freilich dadurch ausgeschlossen, aber es ist wohl möglich, dass die Extremitäten dabei thätig sein könnten. Der Petiolus wird von einigen accessorischen Bildungen von unbedeutender Grösse und unbekannter Natur begleitet. So z. B. findet man bei einigen Arten zwei gekrümmte Borsten, zuweilen auch einen viereckigen Hautlappen über demselben.

Ganz rätselhafter Natur und bisher, soweit es mir bekannt ist, nicht beobachtet, sind zwei Drüsenbildungen, die bei dem *Arrhenurus*-männchen niemals fehlen und ein Stück oberhalb des Petiolus, oder wenn dieser fehlt, oberhalb der Analöffnung ausmünden (Fig. 18 A. GGl). Sie sind viel grösser als die gewöhnlichen Hautdrüsen und ganz anders zusammengesetzt; ihre Mündungen entbehren auch des für die Hautdrüsen charakteristischen Haares. Die in Rede stehenden Drüsen sind von einer Unzahl ganz dünner, nur an dem Hinterende etwas angeschwollener Elemente zusammengesetzt, deren histologische Struktur ich nicht beobachten konnte. Ein gemeinsamer Kanal leitet ihr Secret nach aussen, und mündet an der Spitze eines kleinen Höckers aus. Das Vorkommen dieser Drüsen ausschliesslich bei dem Männchen deutet auf irgend eine Beziehung zum Geschlechtsleben, was auch durch ihre Lage bestätigt wird. Ob man es

hier mit irgend welchen Organen zum Anlocken des Weibchens zu thun hat, oder was ihre Funktion überhaupt ist, mag offen gelassen sein.

Die Gattung *Hydrochoreuthes* zeigt ebenfalls grosse Unterschiede zwischen den Geschlechtern. Die männliche Genitalöffnung ist von einem Paar dreinäpfiger Platten eingefasst. Ein Petiolus mit derselben Lage, aber noch complicierterem Bau als bei *Arrhenurus*, kommt auch vor (Fig. 19). Er ist häutig, beinahe rinnenförmig, von zwei ausgehöhlten Chitinleisten wie in einem Rohr eingeschlossen: die Basalteile dieser Leisten sind rechtwinkelig gebogen und mit Muskeln versehen, durch deren Contraction die Leisten klaffen und den Petiolus frei lassen. Ferner besitzt das Männchen von *Hydrochoreuthes* ein umgebildetes Fussglied: das vierte Glied des letzen Beinpaares ist keulenförmig, mit einem langen, sichelförmig gekrümmten und einem kurzen, geraden Anhang.

Der wahre Vorgang der Befruchtung bei den Hydrachniden muss noch als unbekannt gelten. Der Bau des Spermaleiters beim Männchen: die denselben umgebenden, kräftigen Muskeln und das ausstülpbare Ende desselben könnten auf eine wahre Copulation deuten: auf eine direkte Ueberführung des Spermas zum Eileiter. Ein solcher Vorgang findet auch bei einigen Formen mit grösster Wahrscheinlichkeit statt: z. B. bei *Eylais*, von welcher man oft Individuen getrennten Geschlechts zu sehen bekommt, die, mit den Ventralseiten gegen einander gedrückt, eine Zeit lang herumschwimmen. Dagegen hat Könike *(2)* beobachtet, dass Arten der Gattung *Curvipes* nicht durch geschlechtliche Copulation befruchtet werden, sondern dass das Männchen mit seinen gekrümmten Endgliedern des vorletzten Fusspaares das Sperma zur Genitalöffnung des Weibchens überführt, also ein analoger Vorgang mit dem, welchen man unter den Araneen beobachtet hat. Die Copulation der *Curvipes* ist von mir nicht beobachtet worden. Dagegen habe ich, wie oben erwähnt, die Copulation von *Arrhenurus* gesehen, obschon ich nicht die Ueberführung des Sperma beobachtet habe, die soweit es mir bekannt ist, auch überhaupt nie beobachtet worden ist. Von der Copulation der meisten übrigen Hydrachnidengattungen ist noch gar nichts bekannt.

Entwickelungsgeschichte.

Die Hydrachniden gehören, wie die mit ihnen verwandten Trombidien und Rhyncholophiden zu denjenigen Acaridengruppen, deren Mitglieder eine ausgeprägte Metamorphose durchmachen. Man hat bei den erwähnten Acaridenformen zwei verschiedene Larvenstadien zu unterscheiden, die durch Ruhezustände und

Häutungen von einander getrennt sind. Die Entwickelung der Hydrachnide vom Ei zur Larve habe ich nicht Gelegenheit gehabt zu verfolgen. Diese Entwickelung wurde schon von CLAPARÈDE *(4)* mit solcher Genauigkeit studiert, dass spätere Forscher wenig Neues hinzuzufügen vermocht haben. Eine kurze Uebersicht der Resultate der Forschungen in dieser Hinsicht soll hier der Vollständigkeit halber zuerst gegeben werden.

Die Eier der Hydrachniden sind rotgefärbt und werden meist in grossen, von einer Kittsubstanz umhüllten Haufen abgelegt. Sie sind reich an Dotter, und ihre Furchung ist die unter den Arthropoden gewöhnliche. Wenn das Ei eine gewisse Entwickelungszeit durchgemacht hat, fängt eine dünne Haut an, sich unter der Eihaut abzusetzen; jene Haut hüllt schliesslich das Embryo vollständig ein. Es ist dieses die sogenannte Apoderma, eine Bildung, die bei den oben besprochenen Acaridenfamilien immer vorkommt. Bald wird die Eischale gesprengt, und nun entwickelt sich das Embryo eine Zeit lang innerhalb der Apoderma, ehe die Larve auch diese Haut durchbricht und frei wird. Diese erste Larvenform ist immer sechsfüssig, variiert aber im Uebrigen bedeutend bei den verschiedenen Hydrachnidenformen was den Körperbau und die Lebensweise betrifft. Nach einer längeren oder kürzeren Zeit tritt die Larve in das zweite Ruhestadium ein: eine dicke Haut setzt sich um die Larve ab, die Gliedmassen und Mundteile werden verwischt u. s. w. Unter dieser Puppenhaut entwickelt sich nochmals eine Apodermalhaut, unter welcher sich die zweite Larvenform nach dem Bersten der Puppenhaut eine Zeit lang entwickelt, ehe sie ausschlüpft. Die zweite Larvenform oder die Nymphe ist achtfüssig und stimmt im grossen und ganzen mit dem erwachsenen Tier überein, nur die Geschlechtsorgane und ihre Anhangsbildungen sind natürlich unreif. Auch in der Lebensweise stimmt die Nymphe mit dem erwachsenen Tier überein. Zwischen den beiden erwähnten Stadien folgt eine Verpuppung ähnlich der vorigen, und die Entwickelung der Puppe zeigt auch hier ein Apodermalstadium. Das erwachsene Tier oder Prosopon schlüpft dann aus und erreicht nach kurzer Zeit seine definitive Grösse.

Die Larven der Hydrachniden sind, wie erwähnt, von sehr wechselnder Körperform. Es ist gerade die Form der Larven, die einer der wichtigsten Gründe zur Trennung der oben mehrmals erwähnten Unterfamilien der Hydrachniden gewesen ist. Zu diesem Zweck sind die Larven zuerst von KRAMER *(11, 12)* genau studiert worden; später hat PIERSIG in seinem grossen, noch nicht vollständig erschienenen Werk *(20)* über Deutschlands Hydrachniden im Zusammenhang mit den einzelnen Arten auch ihre Larven mit grösster Genauigkeit abgebildet und beschrieben. Die erwähnten Forscher haben sich

jedoch ausschliesslich mit der äusseren Form der Larven beschäftigt; die innere Anatomie derselben ist immer noch ganz unbekannt geblieben.

Die Larven der Hydrachniden sind Schmarotzer. Nach ihrem Ausschlüpfen aus dem Ei suchen sie so schnell wie möglich ein Insekt oder eine Larve auf, woran sie sich befestigen, um sich mit ihrem Blut zu ernähren. Ein Moment in ihrer Lebensweise verdient, da es von entsprechenden Verschiedenheiten in ihrer Organisation begleitet ist, besonders unsere Aufmerksamkeit. Während nämlich die Larven der Hygrobatinen und Hydrachninen ausschliesslich an im Wasser lebenden Insekten und Larven schmarotzen, führen die Larven der Limnocharinen, Eylainen und Hydryphantinen genau dieselbe Lebensweise wie die Larven der Trombidien, das heisst sie schmarotzen an in der Luft lebenden Insekten. Sie stimmen thatsächlich in betreff ihrer Körperform mit den Larven der Trombidien und auch im grossen und ganzen mit einander überein. Das charakteristische für die Larven dieser drei Subfamilien ist die völlige Abwesenheit der Schwimmborsten an den Extremitäten, wodurch sie im Wasser ziemlich hülflos sind. Sie steigen auch nach dem Ausschlüpfen aus dem Ei so bald wie möglich zur Wasseroberfläche empor und laufen dort schnell umher, bis sie eines der ebenfalls auf dem Wasser umherlaufenden Insekten erreichen; sie saugen sich dann fest und durchleben in dieser Lage nicht nur ihr Larven- sondern auch ihr Puppenstadium, und kehren erst als Nymphen ins Wasser zurück. Uebrigens sind sie charakterisiert durch einen mehr oder weniger gedrungenen Körper, an welchem eine besondere Kopfabteilung, ein sogenannter Scheinkopf oder Pseudocapitulum abgesetzt ist, der in der Grösse bei den verschiedenen Subfamilien etwas wechselt, immer in beschränktem Grade beweglich ist und die Mundwerkzeuge trägt: ein Paar zweigliedrige Mandibeln von demselben Bau wie bei den Trombidien sowie ein Paar fünfgliedrige Palpen, von deren Gliedern das letzte krallenförmig ist und das vierte einen Dorn oder Zapfen trägt, der mit dem Endglied eine Doppelkralle oder ein scheerenartiges Organ bildet, das beim Festhalten am Wirthe zweckmässig ist. Die drei Beinpaare sind wie bei dem Prosopon sechsgliedrig, an Epimeren eingelenkt und mit kräftigen Krallen, die bei den verschiedenen Gattungen verschiedenartig gestaltet sind, ausgestattet.

Der Larventypus der Subfamilie der *Hydrachninae* ist von ganz verschiedenartigem Bau und unterscheidet sich nicht nur durchgehend von den vorigen Larvenformen, sondern besitzt überhaupt ein sehr sonderbares und fremdartiges Aussehen. Die Larve ist vor allem durch ihr ausserordentlich grosses Pseudocapitulum ausgezeichnet, das beinahe ebenso gross ist wie der übrige Körper, an welchem es durch ein sehr bewegliches Gelenk eingefügt ist. Es wird,

wenn das Tier schwimmt, gewöhnlich umgeklappt gehalten, so dass dessen Bauchseite gegen den Körper ruht. An der Ventralseite des Pseudocapitulums bemerkt man die Mundöffnung mit den Spitzen der Mandibeln und die fünfgliedrigen Palpen mit ihrem klauenförmigen Endglied, am Rumpfe die Augen und die drei Epimerenpaare mit ihren Extremitäten, die mit Schwimmborsten und einfachen Krallen ausgestattet sind. Der Körper sowohl wie das Pseudocapitulum sind gepanzert.

Der Larventypus der Hygrobatinen lebt wie der Vorige schmarotzend an Wasserinsekten. Die Larven dieser Subfamilie variieren bei den verschiedenen Gattungen weniger von einander als es bei der grossen Verschiedenheit der erwachsenen Individuen zu vermuten wäre: nur Verschiedenheiten in den Körperdimensionen kommen vor, bedeutendere Differenzen aber nicht. Charakteristisch für diese Larvenform ist das verhältnismässig kleine, bewegliche Pseudocapitulum, mit keulenförmig angeschwollenen, mit kräftigen Krallen versehenen Palpen, ferner der gepanzerte Körper mit deutlichen Epimeren, und mit Füssen, die mit Schwimmhaaren und kräftigen Krallen ausgestattet sind.

In anatomischer Hinsicht habe ich Formen der beiden letzteren Larventypen genauer untersucht, nämlich als Repräsentanten für den Hygrobatinentypus Larven von *Piona ornata*, und für den *Hydrachna*-typus Larven von *Hydrachna globosa*. Die Larven der Eylainen und Hydryphantinen entziehen sich durch ihre winzige Grösse und ihren zarten Bau grösstenteils einer anatomischen Untersuchung, und es ist übrigens zu vermuten, dass ihr innerer Bau ebenso sehr wie der äussere mit demjenigen der Trombidienlarven übereinstimmt.

Die Larve von *Piona ornata* (Figg. 20, 21) is von länglich-ovaler, flachgedrückter Körperform. Der Körper derselben ist zum grössten Teil von Chitinplatten bedeckt, die mit einander durch weiche Cuticula vereinigt sind, und zwar ist die Rückenseite von einem einheitlichen, ovalen Rückenschild geschützt und die Bauchseite von den breiten Chitinplatten der drei Epimerenpaare, nebst einem unpaaren kleinen sogenannten Analschild bedeckt. An der Rückenseite sind verschiedene Paare sehr langer Borsten zu bemerken; ob jedoch diese wie bei den erwachsenen Hydrachniden Mündungen von Hautdrüsen andeuten, ist bei der unbedeutenden Grösse der Larven mir unmöglich zu entscheiden. Das Chitin der Panzerplatten ist ziemlich porös; die Poren, obschon nicht eng, entbehren doch ganz der für die Gattung *Arrhenurus* charakteristischen Erweiterungen. Von dem Vorderende des Körpers ist das Pseudocapitulum ganz deutlich abgesetzt. Es besteht aus einer ziemlich ausgezogenen, etwas gekrümmten,

conischen Unterlippe (Fig. 20, Lb) die an dasselbe Organ der Trombidien erinnert. An den Seiten des Mundkegels sind die eigentümlich geformten Palpen eingelenkt. Die Mittelglieder derselben sind bis zur Unförmlichkeit angeschwollen, so dass ihre Gliederung dadurch verwischt worden ist. Das Endglied ist in eine kräftige, sichelförmige Kralle umgewandelt, die durch umfangreiche Muskelbündel bewegt wird. Die Mandibeln (Fig. 20, Md) haben ganz dieselbe Form wie beim Prosopon: ein langes, flaches, dorsalwärts spitz auslaufendes Grundglied und ein dagegen bewegliches Krallenglied. Auch die Chitinbrücke, auf welcher die Mandibeln ruhen, ist hier vorhanden; die Bewegungsmuskulatur der Mandibeln ist dieselbe, und also auch ihre Bewegungen dieselben, wie beim Prosopon. Dagegen fehlen die Tracheen und ihre Stigmen. Der Oesophagus (Fig. 20, Oe) hat ganz denselben Verlauf wie bei dem Prosopon. Auch hier kann man die bekannte Saugvorrichtung unterscheiden, durch welche die Nahrung aufgenommen wird: die breiten Quermuskeln, die den Oesophagus verengern, und die Verticalmuskeln, welche, zwischen dem Oesophagus und den oberen Rändern des Mundkegels sich erstreckend, den Oesophagus erweitern. Der Oesophagus durchsetzt das Nervencentrum (Fig. 20, Nc) und mündet in den Lebermagen ein. Dieser (Figg. 20, 21, Lm) besteht aus einem Centralteil, der vorwärts und rückwärts in je zwei Lappen sich erweitert. Die Vorderlappen breiten sich aus, so dass sie zusammen eine halbmondförmige Figur bilden, die Hinterlappen dagegen vereinigen sich an ihren Enden und bilden dadurch einen geschlossenen Kreis, ähnlich wie der Magen der *Thyas* und *Limnochares*. Durch die in dieser Weise gebildete Oeffnung zieht sich das einfach schlauchförmige Excretionsorgan (Figg. 20, 21, Exc), das nach aussen mündet. Der Lebermagen ist dagegen ebenso wie bei den erwachsenen Hydrachniden geschlossen. In die Mundhöhle münden die Ausführungsgänge zweier Munddrüsenpaare, welche einen bedeutenden Raum im Vorderteil des Körpers einnehmen (Figg. 20, 21, Sdr). Ihre Form ist schwer zu bestimmen, da ihre unregelmässigen Ränder einander vielfach decken. Auch ihre innere Struktur ist allzu zart, um an gehärteten Präparaten bewahrt werden zu können.

Das Centralganglion (Figg. 20, 21, Nc) der Larve ist auffallend gross und nimmt die ganze Höhe der Körperhöhle ein, ohne, wie es bei den erwachsenen Individuen der Fall ist, vom Lebermagen überlagert zu sein. Die Form des Nervencentrums ist dieselbe wie beim Prosopon, und von demselben entspringen mehrere Nervenstämme, die jedoch, bei der unbedeutenden Grösse des Untersuchungsobjectes, schwierig zu verfolgen sind. Die Augen haben dieselbe Form

wie beim Prosopon, das heisst, die zwei Linsen jeder Körperseite sind zu einem einzigen Retinakörper vereinigt.

Die Muskulatur der Larve ist kräftig entwickelt, wie man es bei der grossen Beweglichkeit des Tierchens voraussetzen kann. Ausser den in derselben Weise wie beim Prosopon angeordneten, an den Epimeralplatten inserierenden Extremitätenmuskeln, kommen Verticalmuskeln, die das Rückenschild des Körpers mit der von den Epimeren gebildeten Bauchplatte vereinigen, vor. Ihre Thätigkeit die Körperhöhle zu erweitern und zu verengern stimmt mit grösster Wahrscheinlichkeit mit derjenigen der Verticalmuskeln beim erwachsenen Tier überein. Sehr deutlich zu beobachten sind ferner die am Rückenschild inserierenden Muskeln, die die Mandibeln zurückziehen (Fig 20, MMd_1) ebenso, wie schon erwähnt, die Muskeln des Oesophagus. Sämmtliche Muskeln sind deutlich quergestreift.

Es sind noch die Anlagen der Geschlechtsorgane zu erwähnen. Es sind ein Paar Schläuche (Fig. 21, AGen) die vom Lebermagen verdeckt, vor dem Nervencentrum anfangen und sich von dort in zwei Windungen ventralwärts und nach hinten strecken, um in der Nähe der Bauchwand blind zu endigen. Ihr Inhalt scheint feinkörnig zu sein, mit deutlich wahrnehmbaren Zellkernen. Eine äusserliche Andeutung der Lage der Geschlechtsöffnung fehlt vollkommen.

Wie aus dem oben Gesagten unmittelbar hervorgeht, stimmt die *Piona*-larve in ihrem inneren Bau wesentlich mit den erwachsenen Hydrachniden überein, und ihre äussere Form ist, trotz ihres fremdartigen Ausschens, leicht auf das Prosopon zurückzuführen. Die Verschiedenheiten im Bau der Mundteile sind unzweifelhaft als Folgen der parasitischen Lebensweise zu betrachten. Um so eigentümlicher und schwieriger zu deuten ist die zweite in Betracht genommene Larvenform, die *Hydrachna*-larve. Dieselbe zeigt in der That weder mit den übrigen Larvenformen, noch mit irgend einer der erwachsenen Hydrachnidenformen in betreff der äusseren Gestalt irgend welche nähere Uebereinstimmung. Oben sind die wichtigsten Charaktere derselben angegeben. Das grosse Pseudocapitulum (Fig. 22) ist von ovaler, nach vorne abgerundeter, nach hinten querer Form. Der Rumpf ist länglich mit parallelen Seitenrändern und abgerundetem Hinterende. Die beiden Stücke sind durch ein sehr dünnes, äusserst bewegliches Gelenk vereinigt. Dieses ausgenommen ist der ganze Körper der Larve gepanzert. Der Rumpf ist zwischen einem Rücken- und einem Bauchschild eingeschlossen, die durch einen schmalen Cuticulastreifen vereinigt sind. In den Vorderecken des Rückenschildes beobachtet man die beiden Augenpaare, die hier an jeder Seite des Körpers einander genähert sind, aber

doch deutlich unterscheidbare Retinabecher zeigen, sich also in derselben Lage, wie bei der erwachsenen *Hydrachna,* befinden. An der Ventralseite sind die Epimeren, die hier deutlich von einander abgegrenzt und von unbedeutender Grösse sind, zu bemerken.

Das Pseudocapitulum (Figg. 22, 23) und die zu demselben gehörenden Organe sind die am stärksten transformierten Teile der *Hydrachna*-larve und diejenigen, die am schwierigsten zu verstehen sind. Durch Vergleichen von Schnitten und Totalpräparaten habe ich folgendes Bild davon bekommen. Der gewölbte Chitindeckel des Scheinkopfes ist von den abgeflachten Grundgliedern der Mandibeln (Md) gebildet, die jedoch nicht wie bei *Limnochares* verwachsen, sondern ihrer ganzen Länge nach von einander deutlich abgegrenzt sind. Die Ventralseite des Scheinkopfes ist von der Unterlippe (Lb) gebildet, die jedoch hier nicht wie gewöhnlich eine oben offene Rinne bildet, in welcher die Mundteile ruhen; dies gilt für den Basalteil des Mundkegels, an dem Vorderende desselben dagegen vereinigen sich die Ränder der Rinne, umschliessen die Vorderteile der Basalglieder der Mandibeln und bilden eine kreisförmige Saugscheibe, die, schief nach unten gerichtet, das Ende des Pseudocapitulums darstellt. In der Mitte dieser Scheibe bemerkt man die gekrümmten Klauenglieder der Mandibeln, die an den Basalglieder derselben eingelenkt und wahrscheinlich allein beweglich sind. An den Seiten der Unterlippe sind die Palpen (P) eingelenkt; diese sind fünfgliedrig, mit breiten Basalgliedern und krallenförmigem Endglied; im Gegensatz zu der vorigen Larvenform sind die Palpen der *Hydrachna* nicht besonders kräftig entwickelt, und reichen kaum über die Spitze des Pseudocapitulums hinaus. Der innere Bau des Scheinkopfes zeigt die gewöhnliche Chitinbrücke als Stütze der Mandibeln. Der Oesophagus und dessen Muskulatur zeigt keine besonderen Abweichungen; überhaupt zeigt die Anatomie der *Hydrachna*-larve grosse Uebereinstimmung mit derjenigen der *Piona*-larve. Nur ist zu bemerken, dass von den Speicheldrüsen das eine Paar dem Scheinkopf, das andere dem Rumpf angehört, und dass die Augen, wie oben erwähnt, am Rückenschilde zu finden sind. Das Gelenk zwischen Scheinkopf und Rumpf besitzt natürlich eine seiner Beweglichkeit entsprechende kräftige Muskulatur. Die Muskelbündel inserieren einerseits an den Grundgliedern der Mandibeln, andererseits an dem Rumpfschild und füllen das Lumen des Gelenkes beinahe aus.

Wie aus dem schon Erwähnten hervorgeht, ist es schwierig, Vergleichspunkte zwischen der *Hydrachna*-larve und irgend einer anderen Entwickelungsform in der ganzen Hydrachnidenfamilie zu finden. Gerade der am meisten charakteristische Teil dieser Tiere, der Kopfteil, ist transformiert in einer Weise,

die alle weiteren Herleitungsversuche zu vereiteln scheint. Dagegen zeigt die *Hydrachna*-larve in betreff der Form des Pseudocapitulums eine gewisse Uebereinstimmung mit einer Rhyncholophiden-larve, die von BERLESE (*1*, pag. 81, Tav. X), abgebildet und beschrieben worden ist. Soweit man nach den sehr oberflächlichen und zum Teil sogar einander widersprechenden Zeichnungen BERLESES urteilen kann, wird diese Larve, — die Larve von *Rhyncholophus phalangioides* — charakterisiert durch die abgeflachten Grundglieder der Mandibeln, die den Scheinkopf oben bedecken, und deren Vorderenden von einer kragenförmigen Erweiterung des Mundkegels eingeschlossen sind, welche eine Saugscheibe bildet. Die Mandibularglieder sind freilich nicht so eng vereinigt, wie bei der *Hydrachna*-larve, sondern durch eine beträchtliche Spalte von einander getrennt, und eine dorsale Spalte in der Saugscheibe macht auch einen befremdenden Eindruck, aber die Klauenglieder der Mandibeln und der ganze Bau und die Einlenkungsweise der Palpen zeigen bei den beiden Larvenformen eine vollkommene Uebereinstimmung. Ebenso könnte das grosse, viereckige Rückenschild der *Rhyncholophus*-larve dem Rückenschild der *Hydrachna*-larve entsprechen. Eine nähere Vergleichung der beiden Larvenformen lässt sich natürlich nicht ohne eine genaue morphologische und anatomische Untersuchung der beiden Formen durchführen, und Obiges mag darum nur als eine Vermutung gelten; jedenfalls wäre eine solche Uebereinstimmung der Larvenformen, bei der unstreitig existierenden Aehnlichkeit zwischen den erwachsenen *Rhyncholophus* und *Hydrachna*, eine interessante Bestätigung der Verwandtschaft dieser Formen.

Die zweite Larvenform oder die Nymphe zeigt bei den Hydrachniden wie auch im allgemeinen unter verwandten Acaridenformen grosse Uebereinstimmung mit dem Prosopon. Bei den meisten Hydrachniden ist der einzige Unterschied zwischen den beiden Entwickelungsformen die rudimentäre Ausbildung der Geschlechtsöffnung und der zu derselben gehörenden Näpfe bei der Nymphe, was besonders bei solchen Formen auffällig ist, welche im erwachsenen Zustand ein complicierteres Geschlechtsfeld haben, z. B. *Curvipes*. In den meisten Fällen besitzt die Nymphe nur zwei Paar Geschlechtsnäpfe, welche die Lage der noch nicht offenen Geschlechtsspalte andeuten. Bei den gepanzerten Formen ist der Unterschied zwischen Nymphe und Prosopon grösser, da die erstere, wenigstens teilweise, ungepanzert ist. Bei der Gattung *Frontipoda* ist die Nymphe halbgepanzert, indem das Epimeralschild den Bauch und die Hälfte der Seiten bedeckt, ungefähr wie beim Prosopon der Gattung *Oxus*. Bei *Arrhenurus* ist die Nymphe immer ungepanzert, aber sonst in betreff

der Mundteile und der Napfplatten mit dem Prosopon übereinstimmend gebaut. Dasselbe Verhältnis zwischen Nymphe und Prosopon existiert ferner bei den Gattungen *Mideopsis*, *Brachypoda*, *Aturus* u. A. Die *Sperchon*-nymphe ist dünnhäutiger als das Prosopon.

Auch die Anatomie der Nymphe stimmt mit derjenigen des erwachsenen Tieres überein, natürlich mit Ausnahme der Geschlechtsorgane. Diese sind bei der Nymphe noch ganz indifferent und zeigen ungefähr denselben Bau wie bei der Larve. Erst nach der zweiten Verpuppung treten also die Geschlechtsunterschiede und infolgedessen auch der Geschlechtsdimorphismus auf. Das junge Prosopon besitzt noch nicht seine definitive Grösse, sondern diese wird durch secundäres Wachstum erreicht. Ob diese von Häutungen abhängig ist, wie einige Forscher behaupten, kann bezweifelt werden. Bei den ungepanzerten Formen ist ein Wachstum der Cuticula nicht ausgeschlossen. Bei der gepanzerten Gattung *Arrhenurus* erscheint der Panzer bei jungen Individuen als ein Netzwerk von feinen Chitinleisten, welche sich beim Wachsen immer mehr verdicken. Auch hier ist es mir nicht möglich gewesen, die das Wachstum begleitenden Häutungen, von welchen Könike *(10)* spricht, zu beobachten. Es scheint mir sehr möglich, dass der im Anfang äusserst dünne Panzer durch einfache Ausdehnung an Grösse zunimmt. Das junge Männchen von *Arrhenurus* besitzt noch nicht seine eigentümliche Gestalt in der ausgeprägten Form wie das ältere: so sind z. B. die Furcalhörner bei jungen Exemplaren ganz abgerundet und bekommen erst später ihre ausgezogene, spitze Form. Es scheint hieraus hervorzugehen, dass das Tier eine nicht unbeträchtliche Wachstumszeit nach dem Ausschlüpfen aus der Puppenhaut durchzumachen hat, ehe es völlig geschlechtsreif wird.

Werfen wir jetzt einen Rückblick auf die Ergebnisse der obigen anatomischen und morphologischen Untersuchung, so bemerken wir, dass bei den Hydrachniden im allgemeinen die inneren Organe, z. B. Verdauungskanal, Drüsensysteme, Genitalorgane, wenig oder gar nicht variieren, sondern die ganze Familie hindurch im grossen und ganzen in derselben Weise gebaut sind. Andererseits zeigen aber die äusseren Organe des Tieres bei den verschiedenen Formen der Familie sehr bedeutende Variationen: z. B. die Körperbedeckung, die Epimeren und Extremitäten, die Sinnesorgane, die äussere Umgebung der Genitalöffnung; vor allem aber zeigen die Mundteile Variationsformen sehr

durchgreifender Art, die oft sogar schwer zu einer gemeinsamen Grundform zurückzuführen gewesen sind. Noch wichtiger sind die bedeutenden Unterschiede, die zwischen verschiedenen Larvenformen der Hydrachniden zu finden sind. Es fehlt also dem Systematiker keineswegs an Ausgangspunkten, wenn er den Versuch machen will, die Verwandtschaftsverhältnisse innerhalb der Familie sowohl wie diejenigen der Familie zu ihren Nachbarformen zu bestimmen.

II.

Zur Phylogenie und Systematik der Hydrachniden.

In der ersten Abteilung dieser Abhandlung wurde eine Uebersicht der wichtigsten morphologischen und anatomischen Verhältnisse der Hydrachniden gegeben, mit besonderer Berücksichtigung solcher Eigenschaften, die für die Phylogenie und Systematik der Gruppe massgebend sein könnten. Es sollen nun die gewonnenen Ergebnisse für eine Beurteilung der mutmasslichen Abstammung sowohl der ganzen Familie als der einzelnen Subfamilien derselben verwertet werden. Eine solche auf phylogenetische Gründe sich basierende Einteilung einer Tiergruppe ist jedoch nicht leicht durchzuführen. Soll sie wirklich natürlich sein, das heisst die wahren Verwandtschaftsbeziehungen wiedergeben, so verlangt dieselbe eine vorausgehende allseitige Bearbeitung sämmtlicher Mitglieder der vorliegenden Tiergruppe. Es muss zuerst jedes Organ und jedes System von Organen die ganze Gruppe hindurch Glied für Glied einer vergleichenden Untersuchung unterworfen werden, und wenn die betreffenden Tiere einer Metamorphose irgend welcher Art unterworfen sind, müssen natürlich auch alle die besonderen Jugendformen mit einander und mit den erwachsenen Formen genau verglichen werden. Bei der ganzen Untersuchung hat man sorgsam zu prüfen, wie jede einzelne Eigenschaft erworben ist: ob sie lange Zeiten hindurch für die betreffende Tiergruppe charakteristisch gewesen, oder erst von einzelnen Zweigen derselben neu erworben ist, ob dieselbe von den Stammeltern vererbt oder durch veränderte Lebensverhältnisse hervorgerufen, ob sie in weiterer Entwickelung oder im Abnehmen begriffen ist. Um dann den phylogenetischen und somit auch den systematischen Wert der

verschiedenen Eigenschaften zu beurteilen, müssen sie einer vergleichenden Prüfung unterworfen werden: Charaktere von höherem Alter, grösserer räumlicher Verbreitung und grösserer funktioneller Bedeutung sollen anderen, in dieser Hinsicht geringfügigeren vorgezogen werden. Diese vergleichende Prüfung ist gerade die schwierigste Aufgabe des Systematikers, nicht nur wegen der Schwierigkeit, Charaktere ganz verschiedenartiger Natur zu vergleichen, sondern auch dadurch, dass oftmals die Beurteilung verschiedener Charaktere einander widersprechende Ausschläge giebt, wobei natürlich die Frage nach der wahren Verwandtschaft der betreffenden Tierformen durch einen Compromiss gelöst werden muss, wenn man nicht einer einzelnen Eigenschaft den Vorzug geben will und dadurch ein künstliches System erschafft.

Wenn man nun einen Versuch machen will, die oben in grösster Kürze angegebenen Prinzipien der natürlichen Systematik [1]) an der von uns vorgenommenen Tiergruppe, den Hydrachniden, wie auch an den Acariden im allgemeinen, anzuwenden, so wird es bald einleuchten, dass die Schwierigkeiten, die eine derartige Untersuchung immer begleiten, hier beträchtlich vergrössert sind. Erstens giebt die Paläontologie, deren Ergebnisse für phylogenetische Fragen unter den höheren Tieren so oft entscheidend gewesen sind, hier natürlich keine Auskunft. Noch grösser sind jedoch die Schwierigkeiten, die durch die mangelhafte Kenntnis der heutigen Acariden verursacht werden. Die embryologischen Entwickelungsstadien dieser Tiere sind unvollständig und nur von vereinzelten Formen bekannt; auch die verschiedenen Larvenstadien sind, wenn überhaupt bekannt, mangelhaft beschrieben. Unter den erwachsenen Acaridenformen giebt es nur von einigen wenigen Gattungen genauere anatomische Untersuchungen, wogegen es ganze Familien giebt, von welchen jede Angabe über den inneren Bau fehlt, so dass der Systematiker betreffs derselben nur auf die äusseren Merkmale hingewiesen ist, oft sogar nur auf die diesbezüglichen Angaben anderer Forscher, weil einige Acaridenformen äusserst selten sind. An dem von Fürbringer hervorgehobenen Grundgesetz des Systematikers „Nichts vernachlässigen“ muss der Acaridenforscher sich mehrmals unfreiwillig versündigen, da oft gerade jede Auskunft über ein wichtiges Merkmal für diese oder jene Form fehlt. In solchen Fällen muss man sich damit begnügen, aus dem zur Zeit vorhandenen Material das beste mögliche zu machen, denn, wie Fürbringer [2]) sich über Bestrebungen dieser Art äussert: — — — „es scheint

[1]) Eine ausführliche Darstellung der Methoden der natürlichen Systematik findet man in Fürbringers ausgezeichneter Arbeit über die Morphologie und Systematik der Vögel, Amsterdam 1888. Pag. 1123.

[2]) L. c. pag. 1122.

mir gerathener, dass jeder das zunächst erreichbare erstrebe — —. Und wäre der erste Versuch selbst nur gemacht, um anderen Arbeitern Anregung zu neuer Forschung zu geben, so hätte er seinen Zweck nicht verfehlt."

Was nun speziell die Hydrachniden betrifft, so gehören sie zu den sowohl morphologisch wie anatomisch am besten bekannten unter sämmtlichen Acariden, und auch die mit ihnen näher verwandten Landacariden sind verhältnismässig genau studiert worden, weshalb auch eine systematische Untersuchung der Hydrachniden mehr Aussichten auf Erfolge darzubieten scheint, als vielleicht irgend ein anderes Gebiet innerhalb der ganzen Acaridengruppe. Ich will darum einen Versuch zu einer solchen Untersuchung machen, und hoffe, wenn auch der Erfolg mangelhaft werden muss, dass sie doch als der erste Versuch auf diesem Gebiete nicht allzu hart beurteilt werden wird. Ehe ich zur Behandlung der Hydrachnidensystematik übergehe, mögen jedoch einige verwandtschaftliche Fragen vom Gebiet der Acariden im allgemeinen, welche mit dem Spezialzweck im Zusammenhang stehen, in Betracht genommen werden.

Die Frage, wie die Acariden sich entwickelt haben, und in welcher Beziehung sie zu den übrigen Arachniden und Arthropoden im allgemeinen stehen, muss noch als ungelöst betrachtet werden. Nach der alten, herkömmlichen Auffassung sind die Acariden Spinnentiere, die durch Parasitismus degeneriert sind; die deutliche Segmentation, das Herz, zum Teil auch die Augen und Trachéen sind durch das Schmarotzerleben verloren gegangen. Für diese Ansicht scheint das häufige Vorkommen parasitischer Lebensweise unter den Acariden zu sprechen, welches, da die parasitischen Formen für ärztliche Zwecke besonders studiert worden sind, sehr auffällig gewesen ist; ferner die thatsächlich sehr verkümmerte Gestalt und der oben erwähnte Mangel an Segmentation, Augen u. s. w. Ein eingehenderes Studium der Acariden zeigt aber sogleich die Unhaltbarheit dieser Ansicht; Formen, wie Gamasiden, Trombidien, Hydrachniden, zeigen eine in ihrer Art so hohe und originelle Entwickelung, so lebhafte Bewegungen, dass die Ansicht von einer Entwickelung durch parasitische Degeneration sehr unwahrscheinlich erscheint, wenn man nicht mit OUDEMANS *(18)* annehmen will, dass die Acariden eine selbständige, von den Arachniden überhaupt nicht abstammende Tierklasse bilden, in welcher die am höchsten organisierten Formen die ältesten und ursprünglichsten, die einfacher organisierten dagegen durch Parasitismus degeneriert worden sind, eine Auffassung, deren Unhaltbarheit schon durch das Vorkommen vieler, gar nicht parasitischer und dennoch verhältnismässig sehr primitiver Acariden hervorgeht. Es bleibt also die Ansicht übrig, dass die Acariden sich selbständig von niedereren Formen zu höheren entwickelt haben. Diese Ansicht wird von

dem englischen Forscher H. M. Bernard *(2)* verteidigt und durch Beweise sowohl biologischer als anatomischer Art gestützt. Um aber die Frage zu erklären, wie die Acariden ihre unbedeutende Körpergrösse erworben haben — da es ja anzunehmen ist, dass die Urformen der Arachniden viel grösser als die mikroskopischen Acariden waren, — nimmt er an, dass die Acariden auf dem Larvenstadium gebliebene und von demselben weiter entwickelte Arachniden sind, was er durch einige teilweise sehr eigentümliche Beweise zu erklären sucht: er vergleicht die Segmentierung, wie sie bei der primitiv entwickelten Acaridengattung *Tetranychus* vorkommt, mit derjenigen einiger Araneen und findet dabei, dass die extremitätentragenden Segmente der Acaride dem Cephalothorax der Spinne entsprechen, wogegen die drei übrigen Segmente von *Tetranychus* dem Abdomen der Spinne in verkümmerter Form entsprechen sollten; in Uebereinstimmung hiermit entspricht angeblich auch z. B. der Lebermagen der Acariden dem Vorderteil des Magens der Spinnen, das Rückengefäss der Gamasiden ist in dem Hinterende des Körpers zu suchen, weil der Abdominalteil des Herzens, wie es bei den Spinnen vorkommt, verkümmert ist, u. s. w. Dieser eigentümlichen Auffassung tritt mit Recht J. Wagner *(23)* entgegen, indem er zeigt, dass die Segmentation der Acariden, wenn sie vorkommt, secundär erworben ist und mit der Segmentation der Spinnen nichts zu thun hat, wodurch natürlich die ganze Bernard'sche Hypothese verfällt. Wagner gelingt es jedoch ebensowenig, die Entstehungsweise der Acariden zu erklären: er greift zu der alten Hypothese von der Degeneration, und zwar behauptet er, dass die atracheaten Acariden ihre Tracheen secundär durch Degeneration verloren haben. Um noch einmal diese Frage vorzunehmen, so findet man gerade unter den am allereinfachsten organisierten Acaridengruppen, unter den Phytoptiden und Tyroglyphiden, Formen, die nicht nur frei leben, sondern auch keine Spur von vorhergegangenem Parasitismus zeigen; solche Formen findet man auch in den meisten Acaridenfamilien, in welchen Parasitismus auftritt, z. B. die Gattung *Cheyletus* unter den Cheyletiden, *Raphignatus* unter den Tetranychiden; und es scheint in der That ebenso natürlich, die parasitischen Acaridenformen von diesen frei lebenden herzuleiten, wie wenn die stark deformierten parasitischen Crustacéen von entsprechenden frei lebenden Formen hergeleitet werden. Davon folgt aber ungezwungen, dass die höher organisierten Acaridenformen sich von den tiefer stehenden selbständig entwickelt haben, was auch durch mehrere Verwandtschaftscharaktere bestätigt wird. Die Ursache der, im Verhältnis zu den übrigen Arachniden geringen Grösse der Acariden bleibt freilich hierdurch unerklärt, aber entsprechende Anomalieen begegnen uns auch anderswo im Tierreich; ich erinnere an die Rotatorien.

Halten wir die oben ausgesprochene Ansicht betreffs der Entwickelung der Acariden im allgemeinen fest, so werden wir finden, dass die Hydrachniden zu den am höchsten entwickelten Acaridenformen gehören, was ihre durch kräftige Muskulatur und hoch entwickelte Sinnesorgane ermöglichte Lebhaftigkeit und schnelle Beweglichkeit deutlich beweist. Was aber ihre Herkunft betrifft, so stammen sie, wie dies schon früher (Pag. 6) angedeutet wurde, unzweifelhaft von Landacariden ab. Diese Ansicht wird schon dadurch wahrscheinlich, dass unter denjenigen tiefer stehenden Acaridenformen, die als mutmassliche Stammformen der Hydrachniden betrachtet werden könnten, keine Wasserbewohner zu finden sind. Noch mehr überzeugende Beweise für diese Annahme liefert die Form der Extremitäten, der Bau des Körpers und vor allem die Gegenwart eines gut entwickelten Trachéensystemes bei den Hydrachniden. Ihre Abstammung von Landbewohnern ist auch, soweit es mir bekannt ist, von niemandem bezweifelt, dagegen schon von KRAMER mit Bestimmtheit hervorgehoben worden. Nehmen wir also an, dass die Hydrachniden von Landbewohnern abstammen, so versteht es sich von selbst, dass wir beim Aufsuchen der primitivsten Formen unter den jetzt lebenden Hydrachniden uns vorzugsweise an solche Formen halten müssen, die am meisten an das Landleben erinnern, das heisst vor allem an die nicht schwimmenden Gattungen: *Thyas* und *Limnochares*. Vergleichen wir diese Gattungen mit einander, so werden wir nicht lange daran zweifeln, welche von beiden die relativ ursprünglichere ist. *Limnochares* mit ihrem unförmlichen, weichen Körper, der ausserhalb des Wassers als eine hülflose, unbewegliche Masse erscheint, ist unzweifelhaft eine in eigenartiger Richtung differenzierte Form, was auch durch den eigentümlichen Bau ihrer Mundteile und durch die Lage ihrer Augen bestätigt wird. Dagegen zeigt *Thyas* ausgeprägt primitive Eigenschaften: Eigenschaften eines Landtieres, das vor kurzem ins Wasser eingewandert ist. Der Körper ist weichhäutig [1]) und besitzt nicht die zum Schwimmen geeignete runde Form, sondern ist beinahe viereckig. Die kräftigen Extremitäten sind nur zum Gehen geeignet, und die Epimeren nicht besonders gross. Die Augen sind an jeder Seite des Körpers deutlich getrennt. Die Lebensweise des Tieres deutet auf das Landleben seiner Voreltern hin: es kommt in kleineren Gewässern, Bächen *(Thyas petrophilus)* oder grasgefüllten Tümpeln *(Th. venusta)* vor, kriecht unter den Wasserpflanzen herum und hilft sich nötigenfalls auch auf dem Trockenen. Die Larven können ebensowenig schwimmen; sie steigen zu der Wasserfläche

[1]) Nur bei einigen Species treten vereinzelte Panzerplatten auf, z. B. bei *Thyas petrophilus*.

empor und befestigen sich dort an Luftinsekten, an welchen sie die Larven- und Puppenstadien durchlaufen.

Mit der Gattung *Thyas* sind, wie schon oben erwähnt, zwei andere Gattungen, *Hydryphantes* und *Diplodontus* zu einer Subfamilie, *Hydryphantinae*, vereinigt worden, und zwar aus guten Gründen. Obwohl sie gute Schwimmer sind und die bei den schwimmenden Hydrachniden gewöhnliche ovale Körperform besitzen, so stimmen sie doch in dem Wesentlichsten mit *Thyas* überein. Die Mundteile haben, wie oben beschrieben, vollkommen denselben Bau: scheerenförmige Palpen, zweigliedrige Mandibeln, conischen Saugrüssel mit abgerundeten Hinterecken; die Cuticula ist bei allen drei Gattungen papillös, die Augen sind deutlich getrennt. Die Larven von allen drei Gattungen stimmen in der Lebensweise und auch in dem Wesentlichsten von dem Bau überein. Aus dem Gesagten folgt denn auch, dass von sämmtlichen schwimmenden Hydrachniden die Gattungen *Hydryphantes* und *Diplodontus* dem Urtypus der Hydrachniden am nächsten stehen. Besonders *Hydryphantes*. Sie stimmt mit *Thyas* überein in dem Vorhandensein eines Rückenschildes und eines unpaaren Auges, in der Lage der Augen beiderseits innerhalb einer Chitinkapsel, in der dreizahl der Genitalnäpfe, wenigstens bei einigen Arten, und in dem Bau der Larve. *Diplodontus* dagegen hat eine mehr selbständige Entwickelungsrichtung eingeschlagen: Die „Crista metopica“ fehlt, die Augen sind gänzlich getrennt, die Genitalnäpfe sind zahlreich; auch die Larve ist etwas verändert, besonders hat sie ein kleineres Scheinköpfchen als die *Thyas*-larve.

Wenden wir uns nun zu der wichtigsten Unterfamilie der Hydrachniden, die, welche die typischen Repräsentanten der Hydrachnidenform einschliesst, die Subfamilie der *Hygrobatinae*, so werden wir bedeutende Unterschiede von dem obenerwähnten Urtypus bemerken, was bei dem grossen Formenreichtum der Gruppe zu erwarten ist. Eine systematische Anordnung dieser Formen wird immer auf bedeutende Schwierigkeiten stossen; wir werden jedoch einen Versuch machen, die Verwandtschaftsbeziehungen der wichtigsten Gattungen der Subfamilie zu erläutern.

Von allen Gattungen der *Hygrobatinae* scheint *Limnesia* die primitivste zu sein, und zeigt die meisten Verwandtschaftscharaktere zu den oben beschriebenen niederen Hydrachnidenformen. Ihre Augen sind deutlich getrennt, wie bei *Thyas;* die Genitalscheiben sind nur mit je drei Näpfen besetzt, die Unter-

schiede zwischen Männchen und Weibchen unbedeutend. Am nächsten scheint dann die Gattung *Hygrobates* zu folgen: auch sie hat einfache, dreinäpfige Genitalscheiben und unbedeutende Geschlechtsunterschiede, ihre Augen sind aber schon paarweise verschmolzen; ausserdem ist die Gattung durch ein reich verästeltes Excretionsorgan und durch das Verschmelzen der beiden ersten Paare von Epimeren charakterisiert. Beinahe dieselben Charaktere zeigt die Gattung *Atractides*, welche übrigens durch veränderte Lebensweise — sie lebt in schnellfliessendem Wasser — ihr Schwimmvermögen eingebüsst hat und ferner durch die Form des ersten Fusspaares sich von *Hygrobates* unterscheidet.

Die obengenannten drei Gattungen dürften also die primitivsten Formen unter sämmtlichen Hygrobatinen darstellen. Wir werden jetzt eine Gruppe von Gattungen betrachten, die, obwohl sie auch keinen Geschlechtsdimorphismus zeigen, doch mehr differenziert sind, als die vorigen. Es sind die Gattungen *Teutonia*, *Lebertia* und *Sperchon*. Für alle diese charakteristisch ist der Bau der Genitalplatten: die drei Paare von Näpfen liegen nicht, wie bei den vorigen Gattungen, offen, sondern sind von zwei seitlichen Chitinleisten verdeckt. Die Gattung *Teutonia* hat weiche Haut und Epimeren von normaler Anordnung, stimmt also am meisten mit der Urform überein. Bei *Lebertia* sind die Epimeren zu einer einheitlichen Bauchplatte verschmolzen. *Sperchon* ist endlich durch seine dicke, mit Chitinplatten übersäete Haut charakterisiert (s. oben pag. 8), zeigt also eine nicht unbedeutende Differenzierung.

Die nahe zusammengehörigen Gattungen *Atax* und *Cochleophorus* sind demnächst zu erwähnen. Sie weisen in betreff der Epimerenbildung ganz primitive Verhältnisse auf, das erste Extremitätenpaar zeigt aber recht bemerkenswerte Veränderungen, indem sie beträchtlich verdickt und mit an besonderen Höckern eingelenkten Sinnesborsten besetzt sind. Noch grössere Veränderungen zeigen das Genitalfeld und dessen Näpfe. Die Geschlechtsöffnung, die zuweilen bis zum Hinterende des Körpers gerückt ist, ist bei den respektiven Arten von Scheiben verschiedener Form eingefasst, die mit Näpfen von wechselnder Zahl und Grösse besetzt sind; entweder sind die Scheiben rundlich *(Cochleophorus)* oder halbmondförmig (einige *Atax*-arten) und mit zahlreichen (20 oder mehr) kleinen Näpfen besetzt, oder ist die Geschlechtsspalte von zwei Paar Scheiben mit je drei Näpfen *(Atax crassipes)* eingefasst. Die Geschlechtsunterschiede sind unbedeutend. Durch Parasitismus sind einige *Atax*-arten beträchtlich degeneriert.

Wir haben noch die nicht unbedeutende Zahl von Hygrobatinengattungen vor uns, bei welchen der Unterschied zwischen Männchen und Weibchen von bedeutender Grösse ist, indem das Männchen, besonders in betreff des Genital-

feldes und irgend eines der hinteren Extremitätenpaaren von dem Weibchen und zugleich von den primitiveren Typen der Hydrachniden abweicht. Diese Geschlechtsdimorphismen sind schon oben beschrieben worden, weshalb sie hier nur im Zusammenhang mit den Gattungen erwähnt werden sollen. Als Uebergangsform zwischen den primitiveren Hydrachniden und einer der jetzt erwähnten Formen scheint die von Piersig beschriebene Gattung *Wettina* gelten zu können, da dieselbe nur unbedeutende Geschlechtsdimorphismen zeigt, sonst aber so vollkommen mit der Gattung *Acercus* übereinstimmt, dass sie von Könike mit derselben vereinigt worden ist. Die genannte Gattung *Acercus* mit ihrem zu einem Greiforgan umgebildeten Hinterfusspaar, ihren zahlreichen, auf länglichen Scheiben gelegenen Geschlechtsnäpfen und ihren Anlagen zur Panzerbildung muss als eine der am meisten abweichenden Hygrobatinenformen betrachtet werden. Weit primitiver ist die Gattung *Piona* mit ihren einfachen, dreinäpfigen Genitalplatten und ihrem abgeflachten Gliederpaar an den Hinterfüssen des Männchens. Eine weit vorgeschrittenere Entwickelung zeigt die grosse Gattung *Curvipes*, die übrigens eine reiche Variation betreffs der Geschlechtscharaktere aufweist. Eigentümlich für die Gattung ist der taschenförmige Samenbehälter hinter der männlichen Geschlechtsöffnung, ferner das charakteristisch umgebildete vierte Glied des letzten Fusspaares und das verkümmerte oder umgebildete letzte Glied des dritten Fusspaares, und endlich für beide Geschlechter die zahlreichen, auf zwei oder mehrere Scheiben verteilten, oder sogar in der weichen Cuticula eingebetteten Genitalnäpfe, Charaktere, die nur durch eine weit vorgeschrittene Entwickelung erworben sein können.

Betrachten wir nun die Gattung *Hydrochoreuthes*, so finden wir hier eine ebenso originelle wie weit vorgeschrittene Entwickelungsform. Der bei dem Männchen dieser Gattung vorkommende Petiolus ist schon beschrieben worden, ebenso die umgebildeten Extremitäten desselben. Das erstere Merkmal tritt ebenso unerwartet als vereinzelt auf, und es scheint mir nicht möglich dessen Entstehung anders zu deuten, als durch die Annahme einer langen, ganz selbständigen Entwickelung. Uebrigens zeigt die Gattung in der Anordnung der Epimeren und der Genitalscheiben und Näpfe ziemlich primitive Verhältnisse, was jede nähere Verwandtschaft mit den oben erwähnten abgeleiteten Gattungen ausschliesst.

Alle die bis jetzt besprochenen Hygrobatinengattungen zeichnen sich durch einen gemeinsamen Charakter aus: sie sind weichhäutig; ihre Cuticula ist dick, glatt, nur bei vereinzelten Arten einiger Gattungen mit eingelagerten Chitinplatten. Diese Hautbildung steht natürlich dem primitivsten Typus, der

dünnen, warzigen Haut der Hydryphantinen viel näher als die gepanzerte Form der Körperbedeckung, welche bei den noch zu besprechenden Gattungen der *Hygrobatinae* vorkommt. Die gepanzerten Gattungen müssen also als an und für sich differenzierter betrachtet werden als die weichhäutigen.

Unter den gepanzerten Gattungen sind zuerst zu nennen *Mideopsis* und *Midea*. Beide sind durch ihre runde, mehr oder weniger flache Körperform mit übergreifendem Bauchschild und hartem, feinporösen Panzer (s. oben p. 12) charakterisiert. Bei *Mideopsis*, der primitiveren Form, ist die Geschlechtsöffnung von einem Paar dreinäpfiger Platten eingeschlossen und kein Geschlechtsdimorphismus kommt vor; *Midea* dagegen hat Genitalscheiben, die mit zahlreichen, kleinen Näpfen besetzt sind, und ausserdem ist das Endglied des dritten männlichen Fusses verkürzt und gekrümmt. Es ist also wahrscheinlich, dass die beiden Gattungen verschiedene Entwickelungsformen eines und desselben Zweiges darstellen.

Dasselbe scheint mir für die Gattungen *Axonopsis*, *Brachypoda* und *Aturus* zu gelten. Sie sind alle durch einen ovalen oder verkehrt eiförmigen, äusserst flachen Körper mit grosser, vom Bauchschild am Rande umfasster Rückenplatte die zuweilen im Hinterteil etwas ausgeschnitten ist (s. oben p. 12) ausgezeichnet; die Epimeren sind zu einer einheitlichen, länglichen Platte verschmolzen, der Panzer ist hart, feinporös. Am primitivsten ist die Gattung *Axonopsis*, die durch viernäpfige Genitalplatten und unbedeutenden Geschlechtsdimorphismus ausgezeichnet ist; abgeleiteter dagegen sind *Brachypoda* und *Aturus*, deren Männchen bedeutend umgebildete Hinterbeine und ein abweichendes Geschlechtsfeld besitzen.

Wir haben dann die beiden offenbar zusammengehörigen Gattungen *Oxus* und *Frontipoda* zu betrachten. Sie werden beide durch ihren seitlich zusammengedrückten Körper, welcher von der aus den verschmolzenen Epimeren gebildeten Bauchplatte mehr oder weniger eingeschlossen ist (s. oben p. 8), charakterisiert. Die Extremitäten sind an dem Vorderende der Bauchplatte ringsum den Mund eingelenkt, was das eigentümliche Aussehen dieser Tiere noch mehr vergrössert. Der halbgepanzerte *Oxus* ist natürlich als primitiver als die ganz vom Panzer eingeschlossene *Frontipoda* zu betrachten. Ein Geschlechtsdimorphismus kommt bei diesen Gattungen nicht vor; die Geschlechtsplatten sind wie bei *Lebertia* organisiert. Eine Annahme, dass eine Verwandtschaft zwischen diesen beiden Gattungen existiere, kann jedoch kaum auf diese Uebereinstimmung begründet werden, noch weniger auf die Anwesenheit einer aus verschmolzenen Epimeren gebildeten Bauchplatte bei *Lebertia; Oxus* und *Frontipoda* bilden in der That durch ihre eigentümliche Körperform und

Panzerung eine der isoliertesten und eigentümlichsten Gruppen unter den Hygrobatinen.

Es ist noch zu besprechen die Gattung *Arrhenurus*, die artenreichste unter sämmtlichen Hydrachnidengattungen. Sie ist zugleich die am eigentümlichsten entwickelte und am höchsten differenzierte Gattung unter sämmtlichen Hygrobatinen, eine Gattung, die ganz isoliert und ohne Vereinigungsglieder mit anderen Gattungen dasteht. Zu diesem Urteil berechtigen uns nicht nur die schon beschriebene, höchst originelle Ausbildung des Körperpanzers (Pag. 9; Fig. 3) sondern auch der ebenfalls geschilderte Geschlechtsdimorphismus, der bei dieser Gattung in einem Grade entwickelt ist, wie bei keinen anderen Hydrachniden und kaum bei irgend einer von den übrigen frei lebenden Acariden. Als übrige Charaktere der Gattung sind zu nennen die kurzen, dicken, scheerenförmigen Palpen und die deutlichen, nicht verschmolzenen Epimeren. Noch zu erwähnen ist aber der ausserordentliche Formenreichtum unter den Männchen, der sich nicht nur in einer ungewöhnlichen Variation in dem Vorkommen verschiedenartig geformter Höcker, Rückenhörner und Caudalanhänge, sondern auch in der Gegenwart oder Abwesenheit eines bedeutungsvollen Paarungsorganes, des Petiolus, ausdrückt. Die grosse Uebereinstimmung der Weibchen macht hierbei das Vereinigen sämmtlicher dieser Formen in eine Gattung berechtigt, erhöht aber noch mehr das Eigentümliche in der Variation der Männchen. In der That muss sich die Paarung bei solchen *Arrhenurus*-formen, die des Petiolus entbehren, anders gestalten, als bei solchen, die das genannte Organ besitzen, da es mit Sicherheit dargelegt ist, dass dasselbe, wenn vorhanden, an der Copulation teilnimmt. Es scheint mir darum berechtigt, die Arrhenuren nach der An- oder Abwesenheit des völlig ausgebildeten Petiolus in zwei Unterabteilungen zu teilen, welche aber von diesen die primitivere ist, lässt sich nicht bestimmen, da die Petiolus-losen Männchen im Uebrigen ebenso eigentümliche Gestaltungsformen zeigen, als die Petiolustragenden. Wie sich dieser sonderbare Geschlechtsdimorphismus und die Variabilität der Männchen entwickelt haben, lässt sich bis jetzt überhaupt nicht erklären.

Dass die oben beschriebenen gepanzerten Hygrobatinenformen von ungepanzerten Urformen abstammen, scheint mir schon deshalb unzweifelhaft, weil ihre Nymphen weichhäutig sind, und zwar entweder gänzlich, wie bei *Arrhenurus* und *Brachypoda*, oder zur Hälfte, wie bei *Frontipoda*, deren Nymphe nach Piersigs Abbildung beinahe wie Oxus halbgepanzert ist. Ebenso sicher scheint es mir, dass die Panzerung bei den verschiedenen oben aufgezählten Gruppen selbständig entstanden ist. Denn nicht nur die Körperbedeckung, sondern auch die ganze Körperform ist bei Gattungen wie *Arrhenurus, Brachy-*

poda, *Frontipoda* so vollständig verschieden, dass eine Einheit der Abstammung nur innerhalb der Grenzen der Subfamilie der *Hygrobatinae* denkbar ist. Auch die beiden Formenkreise, die wir um *Axonopsis* und *Mideopsis* gruppiert haben, zeigen in dem Bau des Körpers und in der Anordnung des Panzers so grosse Verschiedenheiten, dass eine getrennte Abstammung sich wenigstens ebenso leicht annehmen lässt, wie eine gemeinsame.

Dass sämmtliche Gattungen der Subfamilie der *Hygrobatinae,* trotz ihres oben geschilderten Reichtums an Formen, dennoch gemeinsamer Abstammung sind, zeigt sich am deutlichsten durch die vollkommene Uebereinstimmung ihrer sechsbeinigen Larvenformen, an welchen thatsächlich nur unbedeutende Unterschiede in Körperform und Beborstung die verschiedenen Gattungen kennzeichnen. Da die Larvenform einer Hygrobatine schon oben beschrieben ist, ist es nicht nötig, bei derselben länger zu verweilen. Sie schmarotzen an im Wasser lebenden Insekten oder Insektenlarven, können aber auch, wie der russische Forscher KRENDOWSKY zuerst gezeigt hat, gelegentlich das Wasser verlassen. Der genannte Forscher beobachtete nämlich, dass die Larven von *Arrhenurus,* an den Flügeln von Libelluliden haftend, diese auf ihrem Fluge begleiteten; sie waren unzweifelhaft der Libellulidennymphe bei deren Hautwechsel aus dem Wasser gefolgt. Diese Thatsache, sowie auch die Gestaltung der Larven selbst, beweist unstreitig, dass die Grenze, die KRAMER zwischen den Larvenformen der Hygrobatinen und Hydryphantinen und damit auch zwischen den beiden Subfamilien selbst gezogen hat, zu scharf gewesen ist. Der Unterschied zwischen den Larvenformen beider Subfamilien ist freilich recht auffällig; aber trotz den Verschiedenheiten in dem Bau des Körpers, in der Form des Scheinkopfes und der Palpen bei den Larven (s. oben. pag. 41) scheint mir doch die Annahme einer einheitlichen Abstammung der beiden Subfamilien, der primitiveren Hydryphantinen und der mehr differenzierten Hygrobatinen, ebenso, wenn nicht mehr, berechtigt, als die KRAMER'sche Hypothese von einer zu verschiedenen Zeiten stattgefundenen „Einwanderung" Trombidienartiger Landacariden ins Wasser. Die Uebereinstimmung, welche zwischen den Prosopa beider Subfamilien existiert, besonders in betreff der im allgemeinen so sehr variablen Mundteile, und der, wie gezeigt wurde, bei beiden Familien ursprünglich dreinäpfigen Genitalscheiben, macht auch die Einheit der Abstammung wahrscheinlicher; die vorkommenden Unterschiede, z. B. der ausgezogene Rüssel der Hydryphantinen, sind nicht grösser, als dass sie verschiedene Entwickelungsstufen bezeichnen können. Die Möglichkeit der Hypothese von verschiedenen Einwanderungen ins Wasser will ich nicht leugnen: die Abzweigung der beiden Subfamilien aus der gemeinsamen Stammform kann sich

gewiss vor dem Aufgeben des Landlebens abgespielt haben; nur die Einheitlichkeit der Abstammung der beiden Subfamilien scheint mir unstreitig oder wenigstens höchst wahrscheinlich.

Steht es also fest, dass die beiden genannten Unterfamilien, *Hydryphantinae* und *Hygrobatinae*, gemeinsamer Abstammung sind, sowie dass ihre vorfahren einst Landbewohner gewesen sind, so fragt es sich, welche ihre nächsten Verwandten unter den Landacariden sein mögen. Wenn wir zu diesem Zweck die möglicherweise in Betracht kommenden Acaridengruppen untersuchen, so werden wir nicht lange bei der Wahl unschlüssig sein: die Trombidien zeigen eine so durchgehende Uebereinstimmung mit den genannten Hydrachnidenformen, und zwar besonders mit den primitiveren, dass ihre Zusammenhörigkeit sich ohne Weiteres darlegen lässt. Vergleichen wir die Gattung *Thyas* mit irgend einer Trombidiumform, so finden wir, dass die ganze Körperform, der Bau der Mundteile, sogar bis in unbedeutende Einzelheiten hinein, ferner die Lage der Augen beiderseits übereinstimmen. Die Entwickelungsgeschichte giebt ebensoviele Vergleichspunkte: der ganze Bau und die Lebensweise der *Trombidium*-larve stimmt mit derjenigen der *Thyas*-larve überein, auch die weiteren Formen der Metamorphose sind in beiden Fällen dieselben. Kurz und gut, *Thyas* zeigt uns das Bild einer ins Wasser eingewanderten und von dem Leben in demselben nur wenig beeinflussten Trombidiumartigen Acaride. Es folgt aber hieraus, dass sämmtliche Mitglieder der beiden oben erwähnten Hydrachnidensubfamilien mehr oder weniger stark umgeformte Zweige desselben Stammes sind wie derjenige der Trombidien. Die Letzteren aber, die gegenüber den Hydryphantinen und Hygrobatinen als eine eigene Subfamilie, *Trombidinae* bezeichnet werden müssen, haben mit der ursprünglichen Lebensweise der Stammform dieser Gruppen gewiss auch die ursprünglichen Charaktere derselben am treuesten bewahrt, und stellen demnach auch das Bild dieser Stammform am deutlichsten dar. Von dieser sind die verschiedenen Hydrachnidenformen mehr oder weniger weit abgeleitet: am wenigsten die Hydryphantinen, am meisten die Hygrobatinenformen, welche einen grossen Geschlechtsdimorphismus aufweisen, Formen wie *Curvipes, Acercus* und vor allem *Arrhenurus*.

Indem wir also die Unterfamilien der *Hydryphantinae* und *Hygrobatinae* betrachtet haben, haben wir damit auch den grössten Teil der Hydrachnidengattungen berücksichtigt. Es sind jetzt nur noch drei Gattungen übrig, von denen jede eine Unterfamilie bildet: die Unterfamilien *Limnocharinae*, *Eylainae* und *Hydrachninae*.

Betrachten wir zuerst den Vertreter der ersten dieser Gruppen, die Gattung *Limnochares*, so begegnen wir in derselben einer der eigentümlichsten von allen Hydrachniden, eine Form, die nicht nur mit den gewöhnlichen Typen der Hydrachniden, sondern auch mit den Trombidien weit schwieriger zu vergleichen ist, als irgend eine der bis jetzt erwähnten Hydrachnidenformen. Freilich teilt sie mit dem primitiven *Thyas* die Unfähigkeit zum Schwimmen, aber trotzdem ist *Limnochares* ebenso ausschliesslich ein Wassertier wie irgend eine der Hygrobatinen, da die ausserordentliche Weichheit des Körpers das Tier ausserhalb des Wassers zu einer unförmlichen, unbeweglichen Masse verwandelt. Diese Formenlosigkeit des Körpers zeichnet das Tier gegenüber sämmtlichen anderen Hydrachniden aus, ist aber nicht die in phylogenetischer Hinsicht am schwierigsten erklärbare Eigenschaft desselben. Der eigentümliche Bau der Mundteile: die ausgezogene Unterlippe, die Mandibeln mit ihren verschmolzenen Grundgliedern, die verkümmerten Palpen, ist schon beschrieben worden; ebenso ist die eigentümliche Lage der Augen innerhalb der Ränder des Rückenkammes, sowie die Abwesenheit der Genitalnäpfe erwähnt worden: Charaktere, die die Gattung ebenso sehr gegenüber den Trombidien, als gegenüber den früher erwähnten Hydrachnidenformen auszeichnen. Unter solchen Verhältnissen wäre es in der That schwierig, den Platz für *Limnochares* im Systeme zu finden, wenn nicht die Entwickelungsgeschichte weitere Auskunft gäbe. Ihre Larve zeigt aber vollkommen die Hauptcharaktere einer an Luftinsekten schmarotzenden Hydrachnidenlarve, obwohl dieselbe freilich in einer selbständigen Weise entwickelt ist; das kleine Scheinköpfchen, die scheerenförmigen Palpen, die zweigliedrigen Mandibeln entsprechen denselben Organen einer *Thyas*-oder *Diplodontus*-larve. Es wird, wenn man dieses berücksichtigt, möglich sein, für Limnochares eine mit den obengenannten Trombidiumartigen Acariden gemeinsame Abstammung anzunehmen. Nimmt man aber den eigentümlichen Bau der Mundteile, die Lage der Augen und die sonderbare Körperform in Betracht, so wird man einsehen, dass der Zweig der Limnocharinen sich sehr früh von dem gemeinsamen Stamm der Trombidiumartigen Acariden abgetrennt haben muss, sogar zu einer Zeit, als sich die Trombidien noch nicht von den Hydryphantinen und Hygrobatinen abgetrennt hatten, und also die Stammform sämmtlicher dieser Gruppen noch ein Landbewohner war.

Wenn also die Sonderstellung der *Limnochares* gegenüber anderen Hydrachniden schon von früheren Forschern anerkannt worden ist, so ist dagegen die Gattung *Eylais*, obwohl von neueren Systematikern als eigene Unterfamilie abgesondert, doch mit den gewöhnlichen Hydrachnidenformen in intimer Verbindung geblieben, besonders mit den Hydryphantinen. Nach der Ansicht Kramers und Piersigs sollen besonders die Gattungen *Eylais* und *Diplodontus* mit einander verwandt sein; der letztere Forscher lässt sogar den *Diplodontus* als Verbindungsglied zwischen Hydryphantinen und Eylainen gelten. Diese Auffassung ist auf die thatsächlich existierende grosse Uebereinstimmung der Larvenformen der beiden Gattungen gegründet. Die *Eylais*-larve zeigt in der That die typischen Eigenschaften einer luftbewohnenden Hydrachnidenlarve, und besitzt speziell durch ihren kleinen Scheinkopf und ihre scheerenförmigen Palpen mit der *Diplodontus*-larve eine gewisse Aehnlichkeit. Betrachten wir aber eine ausgebildete *Eylais*, so werden wir ganz anderen Verhältnissen begegnen. Die Form des Körpers und die Schwimmbewegungen zeigen freilich nichts Eigentümliches, die Lage der Augen aber, die Abwesenheit der Geschlechtsnäpfe und vor allem der Bau der Mundteile zeigen uns, dass wir eine Form vor uns haben, die mit keiner der bis jetzt betrachteten Hydrachnidengattungen in irgend einer näheren Verwandtschaft stehen kann. Die Lage sämmtlicher Augen innerhalb einer gemeinsamen Chitinplatte an der Mittellinie des Rückens ist schon oben angegeben; ebenso sind die Mundteile beschrieben worden: die fünfeckige Unterlippe mit ihren schief emporsteigenden, leistenförmigen Seitenecken, die eigentümlich geformten Mandibeln mit ihren wenig beweglichen Grundgliedern und kräftigen Klauen, die eigentümlichen säbelförmigen Luftkammern, und die trichterförmige, nach unten gerichtete Mundöffnung. Alle diese Charaktere beweisen deutlich, dass die Gattung *Eylais* eine lange, selbständige Entwickelung durchlaufen hat und jetzt gegenüber sämmtlichen anderen Hydrachnidenformen eine ganz isolierte Lage einnimmt. Der Bau ihrer Larve zeigt aber deutlich dass, wie selbständig auch die spätere Richtung ihrer Entwickelung gewesen sein mag, sie doch ursprünglich ein Zweig des gemeinsamen Stammes der Trombidiumartigen Acariden gewesen ist. Verhält es sich aber so, mit welchen von den oben besprochenen Subfamilien ist sie am nächsten verwandt? Die erwähnte, deutlich hervortretende Uebereinstimmung ihrer Larve mit den an Luftinsekten schmarotzenden Larvenformen schliesst die Verwandtschaft mit den Hygrobatinen aus; man hat also zwischen den Hydryphantinen und den Limnocharinen zu wählen. Für die Verwandtschaft mit den Ersteren spricht die schon erwähnte Aehnlichkeit zwischen den Larven, gegen dieselbe aber der Bau der Mundteile und des

Genitalfeldes, sowie die Lage der Augen bei dem Prosopon; in betreff der Lage der Augen stehen besonders *Diplodontus* und *Eylais* in scharfem Gegensatz zu einander. Vergleichen wir aber *Eylais* mit *Limnochares*, so werden wir freilich grosse Unterschiede, aber auch wichtige Vergleichspunkte finden. Die Uebereinstimmungen in dem Bau ihrer Mundteile sind schon früher besprochen worden: die Unbeweglichkeit der Grundglieder der Mandibeln und die Lage und Einlenkung ihrer Klauenglieder, ebenso die Form der Mundöffnung. Auch die Lage der Augen und die Beschaffenheit des Genitalfeldes sind bei beiden Gattungen gleich. Diese Uebereinstimmungen scheinen mir genügend zu sein, um zu zeigen, dass *Eylais* mit *Limnochares* relativ näher als mit irgend einer anderen Hydrachnide verwandt ist. Die Organisation ihrer Larvenformen scheint mir wenigstens nicht dagegen zu sprechen, obwohl freilich Unterschiede zwischen denselben vorhanden sind. Die noch grösseren Unterschiede zwischen den Prosopa sind nicht zu leugnen: Unterschiede in der allgemeinen Körperform, in dem Bau der Epimeren und vor allem in dem Bau der Mundteile. Eine nahe Verwandtschaft kann darum jedenfalls nicht zwischen *Eylais* und *Limnochares* existieren, aber die oben angeführten Gründe scheinen mir darauf hinzudeuten, dass die beiden Gattungen von einem gemeinsamen, von dem allgemeinen Stamm der Hydrachniden sehr früh abgetrennten und auch selbst sehr früh gespaltenen Zweig abstammen. Wenn HALLER die genannten Gattungen zu einer Gruppe, *Medioculatae*, gegenüber den übrigen Hydrachnidenformen *(Lateroculatae)* vereinigt, so scheint mir diese Einteilung, obwohl ursprünglich auf einen einzelnen Unterschied gegründet, doch auch in der Phylogenie der beiden Formen begründet zu sein. Wollte man den Namen *Medioculatae* als zusammenfassenden Begriff der beiden Subfamilien verwenden, so könnte man gegenüber demselben den Namen *Lateroculatae* in einem neuen Sinne verwenden, der dann die Hydryphantinen, Hygrobatinen und Trombidien umfassen würde.

Werfen wir jetzt einen Rückblick auf die ganze Gruppe der Trombidium-artigen Acariden, so finden wir unter denselben fünf Subfamilien: erstens die mit einander verwandten *Eylainae* und *Limnocharinae*, ferner die *Trombidinae, Hydryphantinae* und *Hygrobatinae*. Die am Lande lebenden Trombidinen sind ebenso arm an Formen, wie ihre wasserbewohnende Verwandten formenreich sind: sie zählen nur eine, höchstens zwei Gattungen mit etwa zwanzig bekannten Arten, die meist durch wenig bedeutende Charaktere, wie die Zahl der

Krallen an den Palpen, die Form der Körperhaare, u. s. w., von einander getrennt werden. Vergleicht man die an der Zahl der Entwickelungsformen unbedeutenden Trombidinen mit den zahlreichen und verschiedenartig entwickelten Hydrachnidensubfamilien, so wird man sogleich einsehen, dass der Stamm der Trombidiumartigen Acariden gegenwärtig seine grösste Entfaltung und höchste Entwickelung im Wasser erreicht hat.

Von den Unterfamilien der Hydrachniden ist eine bis jetzt unbeachtet geblieben, die Gruppe der *Hydrachninae*, mit der einzigen Gattung *Hydrachna*. Die Ursache dazu ist, dass in der That diese Form den vorher genannten Gruppen gegenüber ganz vereinzelt dasteht, was durch eine genauere Betrachtung derselben und ihrer Larvenform leicht hervorgehen wird. Betrachtet man eine *Hydrachna*, so findet man zuerst, dass ihre Körperform die für die Hydrachniden im allgemeinen typische ist, die Extremitäten und Epimeren bieten nichts Besonderes dar, die Genitalplatten sind halbmondförmig, mit zahlreichen Näpfen besetzt, etwa wie bei *Diplodontus*. Ein Rückenschild kommt bald vor, und zwar in derselben Form wie bei *Hydryphantes*, bald wiederum ist es rudimentär oder fehlt. Die Organisation der Mundteile aber zeigt uns Verhältnisse, denen wir noch nicht unter den bis jetzt behandelten Hydrachnidenformen begegnet sind. Die Unterlippe mit ihren hochgewölbten Hinterecken und ihrem zu einem langen, rinnenförmigen Rüssel ausgezogenen Vorderende, die unbedeutend entwickelten Luftkammern, vor allem aber die eingliedrigen, langen, stiletförmigen Mandibeln deuten darauf hin, dass wir hier eine Entwickelungsform vor uns haben, die von allen den vorher beschriebenen Zweigen des Hydrachnidenstammes weit entfernt steht. Und betrachten wir ihre Larve, werden wir eine noch auffallendere Bestätigung dieser Ansicht bekommen. Die Larve wurde schon oben beschrieben. Wir erinnern uns noch des ausserordentlich grossen, gegen den Körper umgeklappten Pseudocapitulums, der Mandibeln mit ihren breiten, flachen Grundgliedern, welche die Rückenseite des Scheinkopfes einnehmen, ferner der Unterlippe mit ihrem ringförmig geschlossenen, kragenförmigen Vorderteil, der die Spitzen der Mandibeln umschliesst. Aus diesen Eigentümlichkeiten in der Organisation sowohl der Larve wie des Prosopons der *Hydrachna* scheint es mir deutlich hervorzugehen, dass diese Form nicht nur mit den oben beschriebenen Hydrachnidenunterfamilien, sondern auch mit dem ganzen Stamm der Trombidienartigen Acariden nur in sehr entfernter

Verbindung stehen kann. Es giebt aber eine andere Gruppe von Landacariden, die mit *Hydrachna* etwas grössere Uebereinstimmung zeigt. Es ist die Gruppe der Rhyncholophiden im allgemeinen und besonders die wichtigste Gattung derselben, *Rhyncholophus*. Die Arten dieser Gattung stimmen, was ihre äussere Körperform betrifft, so ziemlich mit den Trombidien überein; sie haben wie diese eine schmale, leistenförmige „Crista metopica" und zuweilen zwei, gewöhnlicher aber nur ein Paar Augen. Der grösste Unterschied zwischen *Rhyncholophus* und den Trombidinen, und zugleich die grösste Uebereinstimmung zwischen jenem und *Hydrachna* besteht in den eingliedrigen, stiletförmigen Mandibeln. Die Uebereinstimmung in dem Bau eines so bedeutungsvollen Organes muss natürlich auch andere Vergleichspunkte in der Organisation der Mundteile hervorrufen: die Form der Unterlippe mit ihren in die Höhe gezogenen Hinterecken und ihrem rüsselförmigen Vorderteil, ferner der Verlauf der Trachéenstämme zeigen bei den in Rede stehenden Gattungen wichtige Uebereinstimmungen. Was die Organisation ihrer Larven betrifft, die ja in phylogenetischen Fragen überhaupt am entscheidendsten ist, so sind die Larven von *Rhyncholophus* leider äusserst unvollständig bekannt, aber so weit man aus den schematischen Zeichnungen BERLESE's von der Larve von *Rh. phalangioides* schliessen kann, zeigt ein Vergleich zwischen dieser und der *Hydrachna*-larve wenigstens nichts, was gegen die Verwandtschaft der beiden Formen sprechen würde. Eine vergleichende Darstellung der beiden Larvenformen wurde schon oben gegeben (pag. 46); Uebereinstimmungspunkte scheinen sich in der ganzen Organisation der Mandibeln, in der Form und Einlenkungsweise der Palpen und in der Gegenwart der kragenförmigen Saugscheibe zu finden. Einen grossen Wert kann ich freilich dieser Vergleichung nicht beilegen, so lange die *Rhyncholophus*-larve nicht genauer untersucht ist; ausserdem sind ja auch die Unterschiede zwischen den beiden Larvenformen gross, z. B. in betreff der Grösse und Einlenkungsweise des Scheinkopfes. Da jedoch die Differenzen zwischen den Larvenformen nicht grösser sind, und zugleich die ausgebildeten Formen der beiden Gattungen eine so augenscheinliche Uebereinstimmung der in systematischer Hinsicht so massgebenden Mundteile zeigen, so scheint mir die Annahme einer phylogenetisch gegründeten Verwandtschaft zwischen den beiden Formen nicht unberechtigt zu sein.

Vergleichen wir jetzt näher die *Hydrachna* mit ihrem nächsten Stammverwandten *Rhyncholophus*, so werden wir bald finden, dass die letztere Form viel primitiver ist. Ihre Mundteile sind im allgemeinen einfacher: der Rüssel ist kürzer und breiter, die Mandibeln kürzer mit dünneren Hinterenden, die Palpen sind nicht scheerenförmig, sondern endigen wie bei *Trombidium* mit

eine Klaue, kurz, das Ganze macht einen primitiveren Eindruck als die Mundteile der *Hydrachna*. Ferner sind die Augen des *Rhyncholophus* isoliert, der Rückenkamm hat dieselbe Form wie bei den Trombidien und die Genitalöffnung ist weder von Scheiben noch von Näpfen umgeben; dagegen sind bei *Hydrachna* die Augen paarweise in einer Chitinkapsel eingeschlossen und die Genitalleisten sind, wie erwähnt, vorhanden. Es scheint also, als wäre die Unterfamilie der *Hydrachninae* ein ins Wasser eingewanderter und dort weiter entwickelter und weit fortgeschrittener Zweig des *Rhyncholophus*-stammes.

Die Gruppe der Rhyncholophus-artigen Acariden ist aber weit reicher an Landformen, als die Trombidiengruppe. Ausser der Gattung *Rhyncholophus*, deren zahlreiche Arten recht beträchtlich variieren — man erinnere sich z. B. des obenerwähnten Fehlens oder Vorhandenseins des einen Augenpaares — sind die sehr abweichenden Gattungen *Smaris* und *Smaridia* zu nennen. In der Körperform stimmen sie mit *Rhyncholophus* so ziemlich überein, zeichnen sich aber dadurch aus, dass die zu einem langen Rüssel umgewandelte Unterlippe sowie die kurzen Palpen einziehbar sind und im Ruhezustand an der Aussenseite des Körpers nur als aus einer Vertiefung hervorragende Spitzen bemerkbar sind. Die Mandibeln sind sehr lang, stiletförmig. Ausserdem ist *Smaris* durch das Vorhandensein breiter, dreinäpfiger Genitalscheiben charakterisiert. *Smaridia* dagegen zeichnet sich, wenigstens was einige ihrer Arten betrifft, durch das Vorhandensein einzelner Panzerplatten sowohl an der Rücken- wie an der Bauchseite aus, was mit den Angaben Michaels über *Thyas petrophilus* übereinstimmt. Aus dem Gesagten geht mit grosser Wahrscheinlichkeit hervor, dass diese beiden Gattungen einen Zweig bilden, der sich in nicht allzu später Zeit von dem gemeinsamen *Rhyncholophus*-stamme abgespaltet haben dürfte. Leider sind die Larvenformen dieser beiden Gattungen vollkommen unbekannt, weshalb eine vollständige Beurteilung ihrer Beziehung zu *Rhyncholophus* und *Hydrachna* z. Z. nicht möglich ist. Dass sie weder mit der einen noch der anderen von diesen beiden Formen besonders nahe verwandt sind, geht schon aus dem oben Angeführten hervor. Es wäre darum vielleicht berechtigt, aus diesen beiden Gattungen eine besondere Unterfamilie zu bilden. Wir hätten dann innerhalb der Gruppe der Rhyncholophusähnlichen Acariden folgende drei Unterfamilien: *Hydrachninae*, *Rhyncholophinae* und *Smaridinae*.

Es entsteht nun die Frage nach dem Ursprung des Rhyncholophidenstammes. Um diese Frage beantworten zu können, müssen wir uns zunächst an den Zweig der *Rhyncholophinae* halten, da diese Gruppe unstreitig die primitivste des ganzen Stammes ist. Eine Auskunft über die Abstammung des in Rede stehenden Stammes ist also bei der Gattung *Rhyncholophus* und ihren Larvenformen zu suchen. Das wichtigste Merkmal der erwachsenen *Rhyncholophus*-formen bilden, wie erwähnt, die eingliedrigen Mandibeln. Betrachten wir aber die bekannten *Rhyncholophus*-larven, so finden wir das Merkmal hier nicht wieder. Die betreffenden Larven haben immer zweigliedrige Mandibeln wie die Trombidien, was ja auch bei der sonst abweichenden *Hydrachna*-larve der Fall ist. Auch im Uebrigen zeigen die Larven von *Rhyncholophus* und *Trombidium* bedeutende Uebereinstimmungen in betreff der Mundteile und der Körperform im allgemeinen. Auch die Prosopa der beiden Gattungen zeigen, wie schon oben hervorgehoben wurde, in mancher Hinsicht grosse Uebereinstimmungen. Es scheint also ohne weiteres festzustehen, dass zwischen *Trombidium* und *Rhyncholophus* eine wahre Blutverwandtschaft besteht; hieraus folgt wiederum, dass die beiden grossen Stämme, die der Trombidium-ähnlichen und die der Rhyncholophus-ähnlichen Acariden *(Trombidiformes* und *Rhyncholophiformes)* aus einem gemeinsamen Grundstamm hervorgegangen sind. Sie müssen also auch zusammen als eine systematische Einheit höherer Ordnung betrachtet werden, für welche der alte Familienname *Trombididae* der zweckmässigste sein dürfte, da er zugleich auf die charakteristischste Form des ganzen Stammes hinweist. Denn es muss angenommen werden, dass die Gattung *Trombidium* von allen Zweigen dieses Stammes mit der hypothetischen Urform desselben am meisten übereinstimmt, da sie nicht nur den primitivsten Spross an ihrem eigenen Zweig des gemeinsamen grossen Stammes darstellt, sondern auch in betreff der Mundteile primitivere Charaktere als die Rhyncholophinen zeigt.

Den übrigen Acariden gegenüber zeichnet sich die Abteilung der *Trombididae s. l.* durch folgende Eigenschaften aus. Erstens durch ihre Metamorphose, indem bei ihnen die erste sechsbeinige Larvenform dem Prosopon gegenüber mehr oder weniger grosse Formenunterschiede zeigt, die am wenigsten, aber doch deutlich, bei den primitiven Trombidien, am meisten bei den hoch differenzierten Eylainen und Hydrachninen hervortreten. Von übrigen, für die ganze Abteilung charakteristischen Eigenschaften sind zu erwähnen: bei den

Larven das mehr oder weniger deutlich abgesetzte Pseudocapitulum mit zweigliedrigen Mandibeln und fünfgliedrigen Palpen, bei dem Prosopon das Vorkommen von Augen, das Ausmünden der Genital- und Analöffnungen an der Bauchseite, und dazu noch natürlich das Ausmünden der Trachéenstigmen zwischen den Mandibeln: der allgemeine Charakter der Prostigmaten. Sämmtliche Mitglieder der Abteilung sind Raubtiere, was der Bau ihrer Mundteile deutlich darlegt.

Um noch einmal die wichtigsten Verzweigungen des grossen Trombidiidenstammes, wie sich diese aus oben dargelegten Gründen als mutmasslich herausstellten, in ihren Hauptzügen zu wiederholen, so teilt sich derselbe zunächst in zwei Hauptäste, die *Trombidiformes* und *Rhyncholophiformes* (cfr. Fig. 24). Der erstere Ast teilt sich bald danach in einen kleineren Zweig *(Medioculatae)*, der sich seinerseits unmittelbar in die Subfamilien *Eylainae* und *Limnocharinae* gabelt, und in einen grösseren *(Lateroculatae s. n.)*, der zuerst den Ast der landbewohnenden *Trombidinae* aussendet, worauf sich der Hauptstamm noch einmal in den kleineren Zweig der *Hydryphantinae* und den grösseren der *Hygrobatinae* teilt. Der Ast der *Rhyncholophiformes* teilt sich in drei Zweige: die landbewohnenden *Rhyncholophinae* und *Samaridinae* und die wasserbewohnenden *Hydrachninae*.

Es könnte nun noch die Frage nach dem Ursprung der ganzen Familie der *Trombidiidae s. l.* und ihrer Verwandtschaftsbeziehungen zu den übrigen Acaridengruppen aufgeworfen werden. Diese Frage ist bei der jetzt herrschenden mangelhaften Kenntnis der niedrigeren Acaridenformen, besonders ihrer Anatomie und Entwickelungsgeschichte, unmöglich zu beantworten, mögen noch so viele Hypothesen in dieser Richtung aufgestellt werden. Es liegt auch diese Frage ausserhalb des Gebietes unserer Untersuchung. Eine Frage, die uns dagegen besonderes Interesse darbietet, weil mehrere Hydrachnidensystematiker sich damit beschäftigt haben, ist die nach den Beziehungen der Hydrachniden zu den im Meere lebenden *Halacaridae*. Die letzteren Acariden sind äusserst winzige Tiere, die in nicht unbeträchtlicher Tiefe im Meere leben. Sie können nicht schwimmen, sondern halten sich ausschliesslich am Boden auf, wo sie auf Algen mehr oder weniger lebhaft umherkriechen. Sie sind durch ihren flachen Körper charakterisiert, der mit mehreren vieleckigen, genau an einander passenden Schildern bepanzert ist und die seitlich eingelenkten Extremitäten trägt,

ferner durch ein langgestrecktes Pseudocapitulum mit viergliedrigen Palpen und zweigliedrigen Mandibeln. Dass diese Formen degenerierte Abkömmlinge irgend einer der höheren Acaridenfamilien sind, geht daraus hervor, dass sie jeder Spur von Trachéen entbehren, aber dennoch in ihrer ganzen Organisation mit den *Acarida prostigmata* übereinstimmen, besonders in dem Bau des Pseudocapitulums, das sogar die aus dem Obigen bekannten chitinigen Luftkammern besitzt, obwohl diese hier nur ihre Funktion als Stütze der Mandibeln ausüben. Einer der ersten Kenner dieser Acariden, LOHMANN *(4)* will die Ansicht geltend machen, dass sie mit den Trombididen und besonders mit den Hydrachniden nahe verwandt sind. Andererseits wollen TROUESSART und CANESTRINI dieselben von den Bdelliden abstammen lassen. LOHMANN führt für seine Ansicht mehrere Gründe an: Uebereinstimmungen in der Struktur des Panzers, in dem Bau des Pseudocapitulums, in der Einlenkung der Krallen u. s. w. Diese Vergleichspunkte scheinen mir jedoch nur solcher Art zu sein, dass man ähnliche zwischen den Halacariden und mehreren anderen Familien der *Prostigmata* beobachten kann, mit welchem Begriff LOHMANN übrigens teilweise denjenigen der Trombididen vermischt, indem er zu den Trombididen auch Eupodiden, Rhaphignatiden und andere Prostigmatenfamilien zählt. Dass aber die Halacariden mit dem Trombididen in unserem Sinne, also auch mit den Hydrachniden, nicht gemeinsamer Abstammung sein können, scheint mir aus folgenden Gründe hervorzugehen: sie haben keine Metamorphose in dem Sinne der Trombididen, da, wie LOHMANNS Abbildungen zeigen, ihre sechsbeinigen Larven mit den Prosopa in der Körperform völlig übereinstimmen; ihre Panzerung ist eine ganz andere, als die bei den Hydrachniden vorkommende, einheitliche Chitinbedeckung des Körpers, ihr Scheinkopf hat eine Länge, die für die Trombididen ganz ungewöhnlich ist. Schon die Abwesenheit einer Metamorphose dürfte jedoch genug sein, um zu beweisen, dass die Halacariden keine näherer Verwandtschaftsbeziehungen zu den Hydrachniden oder zu den Trombididen überhaupt haben. Ihre etwaigen Verwandtschaftsbeziehungen zu anderen Acaridenformen liegen ausserhalb des Gebietes dieser Untersuchung. Es scheint mir jedoch dass, ganz oberflächlich betrachtet, die oben citierte Ansicht von ihrer Abstammung von den Bdelliden die grösste Wahrscheinlichkeit für sich hat.

Werfen wir noch einen letzten Blick auf die Ergebnisse unserer systematischen Untersuchung, so haben wir zuerst gefunden, dass die Familie der *Hydrachnidae* in dem alten Sinne nicht einheitlicher Abstammung ist, sondern eine Gruppe von durch Uebereinstimmung biologischer Verhältnisse zu einer gewissen äusseren Formenähnlichkeit gelangter Acaridenformen von verschiedener Herkunft darstellt. Und zwar sind die Mitglieder der Gruppe von triphyletischem Ursprung: die Unterfamilie *Hydrachninae* ist nämlich mit dem Acaridenstamm *Rhyncholophiformes* gemeinsamer Abstammung; die beiden Subfamilien *Eylainae* und *Limnocharinae* gehen aus einem besonderen Zweig des Stammes der *Trombidiformes* hervor, und schliesslich teilen die *Hydryphantinae* und *Hygrobatinae* mit den *Trombidinae* die Abstammung aus einem besonderen Zweig des erwähnten Stammes. Der Name *Hydrachnidae* muss also als die Bezeichnung eines biologischen, nicht eines verwandtschaftlich-systematischen Begriffes betrachtet werden, und hat als solche seine natürliche Bedeutung für den hydrofaunistischen und biologischen Forscher.

Ferner haben wir gefunden, dass die beiden Hauptstämme der *Trombidiformes* und *Rhyncholophiformes* wiederum Verzweigungen eines gemeinsamen Urstammes sind, dessen Verwandtschaftsbeziehungen zu den übrigen *Acarida prostigmata* zur Zeit nicht näher bestimmbar sind.

In Fig. 24 habe ich den Versuch gemacht, die Resultate meiner systematischen Untersuchung bezüglich der ganzen Familie *Trombididae* graphisch darzustellen, mehr in der Hoffnung, die Uebersichtlichkeit der Ergebnisse für den Leser zu erleichtern, als in der Absicht, die thatsächlichen Verwandtschaftsbeziehungen innerhalb der Familie im Detail wiederzugeben, was bei der gegenwärtigen, teilweise so unvollständigen Kenntnis der Mitglieder der Gruppe kaum im Ernst ausführbar wäre.

Der Verfasser ist sich dessen wohl bewusst, dass die vorstehende Untersuchung an Mangelhaftigkeit und Unvollständigkeit leidet. Sie konnte aber gegenwärtig nicht anders als lückenhaft werden, da einerseits die Kenntnis der Jugendstadien von mehreren in die Untersuchung eingezogenen Tierformen so äusserst mangelhaft ist, — indem, was einige der Landacaridengattungen betrifft, sogar jede Notitz über die Larvenformen fehlt — andererseits aber die tropischen Acaridenformen noch beinahe unerforscht sind, und es doch zu erwarten ist, dass gerade in diesen Gegenden der Formenreichtum der Acariden, ebenso

wie derjenige der meisten anderen Tierformen, seine grösste Entfaltung erreicht hat. Es ist daher sehr möglich, dass das System durch neue Entdeckungen auf den hier behandelten oder anderen Gebieten der Acaridenforschung vielfach geändert oder sogar ganz verworfen werden kann. Vielleicht aber kann dieser erste unvollständige Versuch den Zweck erfüllen, den FÜRBRINGER in den schon oben citierten Worten angiebt: „Und wäre der erste Versuch selbst nur gemacht, um anderen Arbeitern Anregung zu neuer Forschung zu geben, so hätte er seinen Zweck nicht verfehlt.“

Verzeichnis der citierten Schriften.

1. Berlese, A. Acari, Myriopoda et Scorpiones, hucusque in Italia reperta. Ordo Prostigmata. Patavii 1882—1895.
2. Bernard, H. M. Some Observations on the Relations of the Acaridae to the Arachnida. Journ. Linnean Society, vol. XXIV, pag. 279. London 1892.
3. Canestrini, G. Prospetto dell'acarofauna italiana. Padova 1885—1897.
4. Claparède, E. Studien an Acariden. Zeitschr. f. wiss. Zoologie, Bd. 18. Leipzig 1868.
5. Croneberg, A. Ueber den Bau von Eylais extendens, etc. (russisch). Nachr. d. K. Gesellsch. Freunde d. Naturw. etc. T. XXIX, 2 Lief. Moskau 1878.
6. Dujardin, F. Premier Mémoire sur les Acariens etc. Annales des Sciences naturelles, III Serie, Tome III. Paris 1845.
7. Haller, G. Die Hydrachniden der Schweiz. Mittheil. der naturf. Gesellsch. in Bern, Jahrg. 1881.
8. Henking, H. Beiträge zur Anatomie, Entwickelungsgeschichte und Biologie von Trombidium fuliginosum Herm. Zeitschr. f. wiss. Zoologie, Bd. 37. Leipzig 1882.
9. Koenike, F. Seltsame Begattung unter den Hydrachniden. Zool. Anzeiger XIV, 1891.
10. — — — Zur Entwickelung der Hydrachniden. Zool. Anz. XII, 1889.
11. Kramer, P. Ueber die Typen der postembryonalen Entwickelung bei den Acariden. Arch. für Naturgeschichte, 57 Jahrg. Bd I. Berlin 1891.
12. — — — Ueber die verschiedenen Typen der sechsfüssigen Larven bei den Süsswassermilben. Arch. für Naturgesch., 59 Jahrg. Bd I. Berlin 1893.
13. Krendowsky, M. Notizen über die Entwickelung der Hydrachniden. Charkow 1876.
14. Lohmann, H. Die Unterfamilie der Halacaridae Murr. Inaugural-Dissertation. Jena 1888.
15. Michael, A. Study on the Internal Anatomy of Thyas petrophilus. Proc. of the zoological Society. London 1895.
16. Müller, O. F. Hydrachnae, quas in aquis Daniae detexit etc. Lipsiae 1781.
17. Neuman, C. L. Om Sveriges Hydrachnider. Kongl. Svenska Vetenskaps-akademiens Handlingar, Bd 17. Stockholm 1880.
18. Oudemans, A. C. Die gegenseitige Verwandtschaft, Abstammung und Classification der sogen. Arthropoden. Tijdsch. der Nederl. dierk. Vereen. Deel I, 1885—1887.
19. Piersig, G. R. Beitr. zur. Kenntn. der in Sachsen einh. Hydrachnidenformen. Akad. Abh. Leipzig 1896.

20. Piersig, G. R. Deutschlands Hydrachniden. Zoologica, Lief. 22, 1—4 Heft. Stuttgart 1896.

21. v. Schaub, R. Ueber die Anatomie von Hydrodroma. Sitzungsber. Kais. Akad. Wissensch. Wien. Math. Naturw. Klasse. Bd 97, 1888.

22. van Vleet, A. On the Mouth-parts etc. of Limnochares. Akad. Abh. Leipzig 1897.

23. Wagner, J. Beiträge zur Phylogenie der Arachniden. Jenaische Zeitschr. für Naturwissenschaft Bd. 29, 1895.

Ausserdem kleinere Mitteilungen und weniger bedeutende Citate von Könike, Michael, Pagenstecher, Piersig u. A., die z. T. in Fussnoten angeführt sind.

Erklärung der Figuren.

Erklärung der Bezeichnungen.

AGen. Anlagen der Genitalorgane (Bei der Larve).
Ch. Chitinisierte Teile der Haut.
Chl. Chitinleisten.
Crm. Crista metopica.
Cu. Cuticula.
Dp. Dorsalpanzer.
Exc. Excretionsorgan.
G. Gelenk zwischen Rücken- und Bauchpanzer.
Gl. Hautdrüse (Glandula).
Glg. Accessorische Geschlechtsdrüse (bei *Arrhenurus*).
Gn. Genitalöffnung.
Lb. Labium (Unterlippe).
Lm. Lebermagen.
Mc. Körpermuskeln.
Md. Mandibeln: Md_1 Grundglied, Md_2 Klauenglied.
Mg. Gelenkhöhle des Klauengliedes der Mandibeln.
MMd. Mandibularmuskeln: 1) Retractor, 2) Levator, 3) Krallenmuskel.
Mtr. Matrixschicht der Haut.
Nc. Nervencentrum.
Oe. Oesophagus.
Oer. Rinne des Oesophagus.
P. Hautporen.
Pl. Palpen.
Pt. Petiolus.
S. S-förmige Luftkammern.
Sdr. Speicheldrüse.
St. Tracheenstigma.
Te. Testis.
Tr. Trachée.
V. p. Ventralpanzer.

Tafel I.

Fig. 1. *Curvipes nodatus.* Hautsektion.
Fig. 2. *Sperchon glandulosus.* Hautsektion mit der Mündung einer Hautdrüse und der Ansatzstelle der Mandibularmuskeln.
Fig. 3. *Arrhenurus pustulator.* Sektion durch die Haut mit dem Gelenk zwischen den beiden Schildern, A, in dem Vorderteil, B, in dem Hinterende des Tieres.
Fig. 4. *Brachypoda versicolor.* Querschnitt durch das Tier in der Gegend der Mundteile.
Fig. 5. *Mideopsis orbicularis.* Die Hälfte eines Querschnittes in der Gegend der Genitalöffnung.
Fig. 6. *Frontipoda musculus.* Querschnitt in der Gegend des Nervencentrums.
Fig. 7. *Frontipoda musculus.* Medianer Sagittalschnitt durch ein Männchen.
Fig. 8. *Trombidium fuliginosum.* Mundteile.
Fig. 9. *Hydryphantes ruber.* Mundteile.
Fig. 10. *Curvipes nodatus.* Mundteile.
Fig. 11. *Limnochares holosericea.* Mundteile
Fig. 12. *Limnochares holosericea.* Medianer Sagittalschnitt durch die Mundteile.
Fig. 13. *Eylais extendens.* Mundteile.
Fig. 14. *Eylais extendens.* Medianer Sagittalschnitt durch die Mundteile.

Tafel II.

Fig. 15. *Rhyncholophus phalangioides.* Mundteile.
Fig. 16. *Hydrachna globosa.* Mundteile.
Fig. 17, A. *Sperchon glandulosus.* Sagittalschnitt durch einen Geschlechtsnapf.
Fig. 17, B. *Diplodontus despiciens.* Sagittalschitt durch einen Teil einer Genitalscheibe.
Fig. 18, A. *Arrhenurus Neumani,* ♂. Medianer Sagittalschnitt durch den Hinterteil des Körpers mit dem Petiolus und einer der accessorischen Drüsen.
Fig. 18, B. *Arrhenurus Bruzelii.* Querschnitt durch den Petiolus.
Fig. 19. *Hydrochoreuthes ungulatus,* ♂. Horizontalschnitt durch das Hinterende des Körpers mit dem Petiolus und dessen chitinigen Schutzleisten.
Fig. 20. *Piona ornata.* Medianer Sagittalschnitt durch die Larve.
Fig. 21. *Piona ornata.* Schief von oben nach unten geführter Längsschnitt durch die Larve.
Fig. 22. *Hydrachna globosa.* Dorsalansicht des Pseudocapitulums der Larve.
Fig. 23. *Hydrachna globosa.* Sagittalschnitt (etwas schief) durch das Pseudocapitulum der Larve.

Sämmtliche oben angeführte Figuren sind mit Hülfe einer Nachet'schen Camera lucida gezeichnet.

Die Totalbilder des Mundskeletes Figg. 8—11, 13, 15, 16, sind nach in Kalilauge macerierten Präparaten gezeichnet.

Fig. 24. Versuch eines Stammbaums der Familie *Trombididae.*

Inhaltsverzeichnis.

Vorrede . . . . . I.

I. Zur Morphologie und Anatomie der Hydrachniden . . . . . 1.

Allgemeine Charakteristik der Hydrachniden . . . . . 5.

Haut und Hautdrüsen . . . . . 6.

Muskulatur . . . . . 11.

Cirkulations- und Respirationsvorrichtungen . . . . . 14.

Mundteile . . . . . 16.

Verdauungsorgane . . . . . 23.

Nervensystem und Sinnesorgane . . . . . 28.

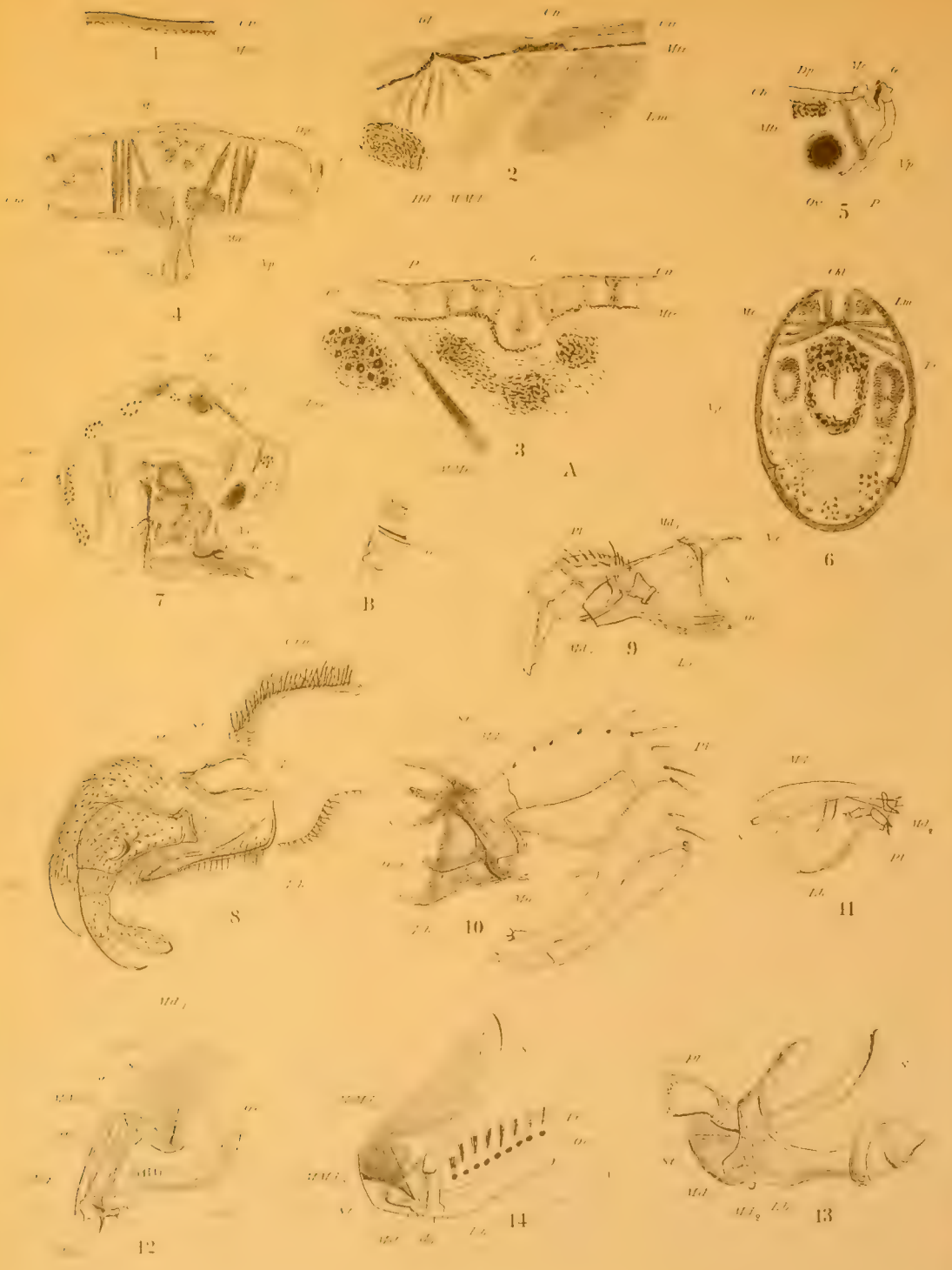
Geschlechtsorgane und Geschlechtsdimorphismus . . . . . 32.

Entwickelungsgeschichte . . . . . 39.

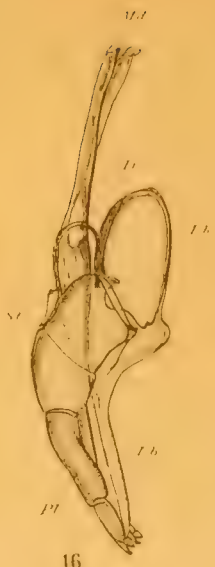
II. Zur Phylogenie und Systematik der Hydrachniden . . . . . 48.

Verzeichnis der citierten Schriften . . . . . 71.

Erklärung der Figuren . . . . . 73.

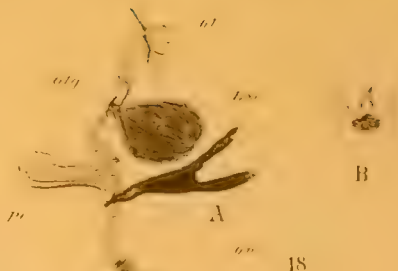


15



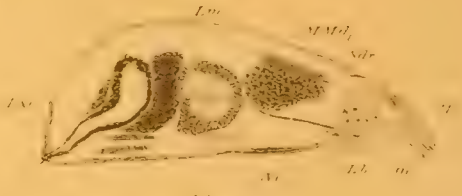
16

17



18

19

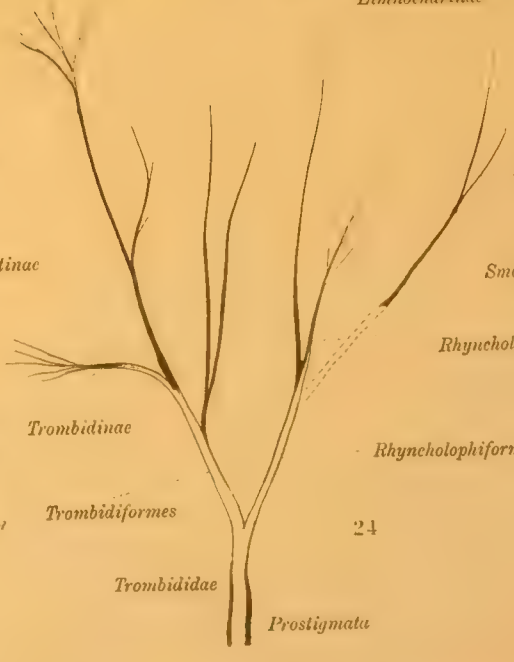


20

21

22

23



24

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ.
TOM. XXIV. № 6.

SYNTAKTISCHE FREIHEITEN

BEI

HANS SACHS

AN SEINEN FABELN UND SCHWÄNKEN UND FASTNACHTSPIELEN

DARGESTELLT VON

EDWIN HAGFORS.
DR PHIL

I.

Vorwort.

Von der ritterlich-aristokratischen Poesie der mittelhochdeutschen Blütezeit unterscheidet sich die der Übergangszeit zwischen dem Mittelhochdeutschen und dem Neuhochdeutschen, sowie die der frühneuhochdeutschen Periode durch ihre bürgerlich-volkstümliche Natur (siehe Vogt und Koch, Geschichte der deutschen Litteratur, S. 214 ff.). Charakteristisch für diese bürgerlich-volkstümliche Dichtung ist neben einem grossen Reichtum an Stoffen ein ebenso grosser Mangel an künstlerischem Formensinn in deren Behandlung und Ausgestaltung. Ungeschick und Plumpheit, Nüchternheit und Trockenheit der Darstellung, Vernachlässigung und Verletzung des Ebenmaasses im Verse, Verstösse gegen den natürlichen Rhythmus bilden kennzeichnende Merkmale der dichterischen Erzeugnisse jener Zeit. Aber auch an ihrem sprachlichen Gewande lässt sich der volkstümliche Charakter jener Dichtung erkennen; auch in der Handhabung der Sprache bekundet sich der ihr eigentümliche Mangel an Formgefühl. Die Dichter bedienen sich der ungezwungenen Sprache des Volkes, ihrer kräftigen derben und grobkörnigen Ausdrücke; ihr Satzbau hat etwas Ungefeiltes und Ungehobeltes; sie erlauben sich allerlei Freiheiten, Nachlässigkeiten, Inkorrektheiten der lebendigen Rede, des alltäglichen mündlichen Verkehrs. Sie gehen sogar noch weiter: sie scheuen sich nicht, unbequeme Sprachformen willkührlich für das Versmaass oder für den Reim zurechtzumachen.

Mögen auch die obigen Bemerkungen in erster Linie für die poetische Litteratur des XIV. und XV. Jahrhunderts zutreffend sein, im Allgemeinen gelten sie doch von der ganzen bürgerlich-volkstümlichen Dichtung, freilich von den verschiedenen Gattungen und Dichtern in verschiedenem Grade.

Die vorliegende Abhandlung wird zu zeigen suchen, dass das oben über die sprachliche Seite jener Dichtung im Allgemeinen Gesagte auch von deren klassischem Vertreter, von Hans Sachs gilt. Unsere Abhandlung stellt sich die Aufgabe, wenigstens die Hauptpunkte ins Auge zu fassen, in denen Hans

Sachsens Sprache von dem in formeller Hinsicht Normalen abweicht, in denen seine Syntax den Forderungen des grammatisch Korrekten nicht gerecht wird. Eine derartige Untersuchung dürfte, als ein Beitrag nicht nur zur Charakteristik von Hans Sachsens Sprachgebrauch sondern auch zur Kenntnis der Syntax des XVI. Jahrhunderts, — einer für die historische Syntax der deutschen Sprache bis jetzt nur wenig und mangelhaft bearbeiteten Sprachperiode — ein nicht geringes Interesse beanspruchen können.

Ob und inwieweit die den Gegenstand unserer Untersuchung bildenden syntaktischen Freiheiten speziell für Hans Sachs charakteristisch sind, oder sich auch sonst in der Sprache nachweisen lassen, ist eine Frage, die sich nur auf Grund umfassender und eingehender Vergleichungen älterer und jüngerer, in erster Linie aber zeitgenössischer Litteraturdenkmäler mit genügender Sicherheit und Genauigkeit beantworten liesse. Solche Vergleichungen fallen aber ausserhalb des Rahmens dieser Untersuchung. Da durch dieselben ausserdem der Abschluss der Arbeit in eine unabsehbare Ferne gerückt worden wäre, musste darauf auch aus praktischen Gründen verzichtet werden. Der Verfasser musste sich damit begnügen, jene syntaktischen Freiheiten, wie sie bei Hans Sachs bestehen, zu beschreiben und thunlichst zu erklären; dass dabei die Unterschiede und Übereinstimmungen zwischen dem modern neuhochdeutschen Sprachgebrauch und dem von Hans Sachs besondere Berücksichtigung erfuhren, wird man wohl nicht unberechtigt finden. In Bezug auf das sonstige Vorkommen jener Freiheiten in der Sprache musste der Verfasser sich darauf beschränken, auf einige wenige leicht zugängliche fachwissenschaftliche Arbeiten zu verweisen, die sich mehr oder weniger direkt mit denselben und ähnlichen Erscheinungen beschäftigen. Die von uns öfters und deshalb mit verkürztem Titel citierten sind folgende:

H. Paul: *Principien der Sprachgeschichte*, 2. Aufl., Halle 1886 (citiert: Paul Pr.)

„ *Mittelhochd. Grammatik*, 3. Aufl., Halle 1889 (citiert: Paul Gr.)

O. Erdmann: *Grundzüge der deutschen Syntax*, I., Stuttgart 1886 (citiert: Erdmann).

H. Wunderlich: *Der deutsche Satzbau*, Stuttgart 1892 (citiert: Wunderlich Sb.).

„ *Untersuchungen über den Satzbau Luthers*, I. Theil, Die Pronomina, München 1887 (citiert: Wunderlich Luther Pr.).

C. Franke: *Grundzüge der Schriftsprache Luthers*, Görlitz 1888 (citiert: Franke).

I. Kehrein: *Grammatik der deutschen Sprache dès funfzehnten bis siebenzehnten Jahrhunderts*, Dritter Teil, Leipzig 1856 (citiert: Kehrein).
Th. Matthias: *Sprachleben und Sprachschäden*, Leipzig 1892 (citiert: Matthias).

Die Hinweisungen auf Grimms Grammatik beziehen sich auf die neueste Auflage, besorgt von Roethe und Schroeder. Übrige von uns benutzte Untersuchungen sind an Ort und Stelle mit ausführlichem Titel angegeben. Obwohl in keiner unter den von uns citierten Arbeiten die Sprache eines Litteraturwerkes, oder mehrerer, von demselben Gesichtspunkte aus untersucht ist, von welchem wir Hans Sachsens Sprache hier betrachten wollen, konnten sie doch für unseren Zweck mit vielem Nutzen herangezogen werden.

Die Beschränkung unseres Untersuchungsgebietes auf die Fabeln und Schwänke und Fastnachtspiele von Hans Sachs war durch den Umstand geboten, dass diese unter seinen Dichtungen die einzigen sind, welche zuverlässig nach den Handschriften des Dichters herausgegeben vorliegen, und zwar in der Ausgabe von Edmund Goetze: *Sämtliche Fabeln und Schwänke von Hans Sachs*, 2 Bnde (387 Nummern), Halle 1893 und 1894; *Sämmtliche Fastnachtspiele von Hans Sachs*, 7 Bändchen (85 Nummern), Halle 1880—1887. Unsere Citate sind durchweg nach dieser Ausgabe gegeben; FS. = Fabeln und Schwänke, Fsp. = Fastnachtspiele.

Gründe, die näher auseinanderzusetzen hier nicht der geeignete Ort ist, die aber nicht in der Natur unseres Stoffes liegen, haben uns dazu bestimmt, unsere Untersuchung in zwei Teilen erscheinen zu lassen. In dem vorliegenden ersten Teile ist über *Sparsamkeit im Ausdruck*, *Pleonasmus*, *Verstösse gegen die normale Rektion* gehandelt; die Hauptabschnitte des zweiten Teiles werden über *Inkongruenz*, *Kontamination*, *Anakoluthie*, *Widerspruch zwischen dem logischen Satzverhältnisse und dessen grammatischer Bezeichnung* zu handeln haben.

Schon durch den Titel unserer Abhandlung haben wir andeuten wollen, dass man von uns nicht eine erschöpfende Behandlung des angezeigten Gegenstandes erwarten soll. Wir können und wollen nicht behaupten, die syntaktischen Freiheiten bei Hans Sachs vollständig dargestellt zu haben. Bei der grossen Menge und bunten Mannigfaltigkeit der für uns in Betracht kommenden sprachlichen Erscheinungen kann es wohl möglich sein, dass wir diese oder jene weniger in die Augen springende übersehen haben. Die hauptsächlichen wird man doch, wollen wir hoffen, von uns berücksichtigt finden. — Auf statistisch genaue Feststellung der Häufigkeit einer jeden Erscheinung kam es uns nicht an. Auch haben wir daher Vollständigkeit in der Anführung von Be-

legstellen nicht angestrebt. Es schien uns zu genügen, die Erscheinungen je nach ihrer grösseren oder geringeren Häufigkeit mit einer grösseren oder kleineren Anzahl von Beispielen zu belegen.

Wer sich auch nur einigermaassen eingehend mit Hans Sachsens Sprache beschäftigt hat, wird die Schwierigkeiten kennen, welche diese, eben durch ihre Freiheiten und Unregelmässigkeiten, auf dem Gebiete der Syntax einer genauen und sicheren Interpretation in den Weg stellt, und mit welchen also ganz besonders diese Untersuchung zu arbeiten gehabt hat. Wir wagen nicht zu glauben, dass wir diese Schwierigkeiten immer glücklich überwältigt, die mancherlei zu berührenden Fragen richtig aufgefasst und gelöst, über die vielen zweifelhaften Stellen überall das letzte und überzeugende Wort gesprochen hätten. Im Gegenteil, wir sind über die vielen Mängel unserer Arbeit in keinem Irrtum befangen. Unser Möglichstes haben wir aber gethan und sind für jede Berichtigung und Belehrung von kundigerer Seite nur dankbar. Wenn unsere Abhandlung künftigen Forschern auf demselben oder benachbartem Gebiete auch nur als Materialiensammlung nützlich sein und ihnen so den Weg einigermaassen ebnen könnte, so hätten wir nicht vergebens gearbeitet und wären für unsere Mühe hinlänglich belohnt.

Helsingfors den 10. August 1898.

DER VERFASSER.

Die Anregung zu meiner Untersuchung verdanke ich Herrn Professor D:r Hermann Paul, der auch während meines Aufenthaltes in München meine Arbeit stets mit Interesse umfasst und sie durch viele lehrreiche Winke und Ratschläge befördert hat. Es ist mir eine angenehme Pflicht, ihm für diese überaus wertvolle Hilfeleistung meinen innigsten, aufrichtigen Dank auch hier auszusprechen.

Inhaltsverzeichnis.

S.

I. Sparsamkeit im Ausdruck 1

A. Ersparung eines Subjektpronomens 2

1. Ersparungen der persönlichen Pronomina.

Fälle, wo das Fehlen des Pron. aus phonetischen Einflüssen erklärt werden kann § 1. Gruppierung der übrigen Fälle § 2.

a. Erste Hauptgruppe (Vertretung des Pron. durch ein vorhergehendes Subjektswort) 5

Allgemeines § 3.

α) Bei gleichwertigen Sätzen 5

Ersparungen der Pron. 3. Pers. § 4—5, der Pron. 1. Pers. § 6, der Pron. 2. Pers. § 7. Besonderheit der Pluralpron. § 8.

β) Bei nicht gleichwertigen Sätzen 11

In Verbindungen von regierendem u. abhängigem Satz § 9. In Sätzen, die nicht in direkter Beziehung zu einander stehen § 10.

b. Zweite Hauptgruppe (Vertretung des Pron. durch ein vorhergehendes Wort, das nicht als Subjekt fungiert) 14

Allgemeines § 11. Vertretung durch einen Akkusativ § 12, durch e. Dativ § 13, durch e. Genitiv § 14, durch e. Possessivum § 15, durch e. von einer Präposition abhängiges Wort § 16, durch das Pronominaladv. *da* § 17. Besonderheit der Pluralpronomina § 18.

c. Dritte Hauptgruppe (Ersparung ohne vorhergehende Vertretung) 21

Allgemeines § 19. Ersparungen der Pron. 1. Pers. § 20—21, der Pron. 2. Pers. § 22—3, eines Subjektswortes 3. Pers. § 24.

2. Ersparungen eines relativen Subjektpronomens 25

Vertretung durch e. obl. Kasus od. e. Adv. bei koord. Sätzen § 25.

3. Ersparungen eines indefiniten Subjektpronomens 27

Bei Verbindung von regierendem u. abh. Satz u. bei koord. Sätzen § 26.

4. Ersparungen der Neutralform es 27

Fälle, die phonetisch erklärt werden können § 27. Ersparungen eines mit bestimmter Beziehung gebrauchten *es* § 28—9, eines ohne bestimmte Beziehung gebrauchten *es* § 30.

B. Ersparung eines Objektpronomens 31

Fälle, wo die Ersparung phonetisch erklärt werden kann § 31. Gruppierung der übrigen Fälle § 32.

1. Erste Hauptgruppe (Ersparung bei vorhergehender Vertretung) 32

Vertretung durch einen Objektsakkusativ § 33, durch einen Subjektsnominativ § 34, durch e. Dativ § 35, durch e. Genitiv § 36, durch e. von einer Präposition

abhängiges Wort § 37, durch das Pronominaladv. *da* § 38. Die zu zwei Verben gehörige Bestimmung, die das Obj.-pron. vertritt, richtet sich nach dem entfernteren Verb. § 39.

2. Zweite Hauptgruppe 38

Ersparung ohne vorhergehende Vertretung § 40.

C. Ersparung einer pronominalen Dativbestimmung 39

Vertretung durch einen vorhergehenden Dativ § 41, durch e. Akkusativ § 42, durch e. von einer Präposition abh. Wort § 43.

D. Ersparung eines Verbums 40

Vertretung einer Verbalform durch e. andere Form desselben Verbums bei gleicher Bedeutung § 44. Einfache Setzung einer Verbalform mit zweifacher Bedeutung § 45. Vertretung einer Verbalform durch die entsprechende Form eines anderen Verbums § 46. Anomale Ersparungen der Hilfsverba § 47.

E. Ersparung eines adjektivischen Bestimmungswortes 48

Phonetische Einflüsse § 48. Einfache Setzung des Bestimmungswortes zu koord. Substantiven von gleichem Numerus, Genus u. Kasus § 49, zu Substantiven von verschiedenem Numerus § 50, zu Subst. v. versch. Gen. § 51, zu Subst. v. versch. Num. u. Gen. § 52. Ein einfach gesetztes Bestimmungswort richtet sich nach dem letzteren v. zwei koord. Subst. § 53.

F. Ersparung einer Partikel 55

Einfache Setzung einer Präposition zu koord. Substantiven § 54, des *zu* bei koord. Infinitiven § 55, der Negationspartikel bei koord. Satzgliedern § 56. Ersparung einer Konjunktion § 57.

G. Ersparung einer Flexionsendung 59

In kopulativen Verbindungen von Substantiven § 58, von Adjektiven § 59. Bei Verbindung von attrib. Adj. + Subst. § 60. In Fällen, wo für die am Subst. ersparte Flexionsendung kein Ersatz in einem anderen flektierten Worte da ist § 61. Das unflektierte *vil* statt eines Genit. oder eines Dat. § 62.

H. Ersparung mehrerer Satzglieder 70

Ersparung von Subj u. Verb. finitum oder von Subj. u. Obj. § 63.

J. Konstruktion ἀπὸ κοινοῦ 71

Asyndese zwischen Sätzen § 64. Konstruktion ἀ. κ. zwischen logisch u. grammatisch gleichwertigen Sätzen § 65, zwischen Sätzen, von denen der eine logisch von dem anderen abhängig ist § 66. Das Demonstrativum *der* u. demonstrative Adv. ἀ. κ. gebraucht § 67. Die Indefinita *wer, was, welcher* u. verwandte Adv. ἀ. κ. gebraucht § 68. Konstruktion ἀ. κ. zwischen Haupt- u. Nebensatz § 69. Ein ganzer Satz ἀ. κ. gebraucht § 70.

K. Gemeinsames Glied nur zum zweiten von den nichtgemeinsamen gesetzt 84

Das gem. Glied steht zu den nichtgem. in gleichem grammat. Verhältnis § 71, in verschiedenem grammat. Verhältnis § 72.

L. Ellipse 88

Der sprachlichen Form nach eingliedrige Sätze § 73. Psychologisches Subj. u. Präd. ohne Mittelglied neben einander gestellt § 74. Fälle, wo statt eines Subst. mit einer Bestimmung nur die letztere gesetzt ist § 75. Ellipse in Betheuerungsformeln § 76.

Anhang: Ersparung eines Determinativums § 77 97

II. Pleonasmus 99

Derselbe Satzteil innerhalb desselben Satzes zweimal gesetzt § 78. Derselbe zwei koord. Satzgliedern gemeinsame Satzteil in beiden ausgedrückt § 79. Wiederaufnahme eines Subst. mittelst des Demonstr. *der* u. Attraktion des Korrelats in den Kasus des Relativums § 80. Wiederaufnahme eines Wortes

mittelst des Pron. *er* § 81, eines Prädikates oder einer adverb. Bestimmung durch die Adv. *so* u. *da* § 82. Fälle, wo e. Gegenstand zuerst unbestimmt durch e. Pron. u. nachträglich bestimmt durch e. Subst. bezeichnet wird § 83. Pleonastische Bezeichnung eines possessiven Verhältnisses § 84. Pleonastische Negation § 85. Pleonastisches *und* § 86.

III. Verstösse gegen die normale Rektion 114

Rektionen der Präpositionen § 87, der Verba § 88.

Berichtigungen.

Seite 33 Zeile 18 von oben steht *hecht.* lies *heckt.*
„ 57 „ 4 „ „ „ Wiederholung, „ Nichtwiederholung.

I.

Sparsamkeit im Ausdruck.

In gewisser Hinsicht stehen Sprache und Darstellungsweise bei Hans Sachs in scharfem Gegensatze zu einander. Wird die letztere im Allgemeinen durch gemüthliche Breite und epische Ausführlichkeit gekennzeichnet, so scheint dem modernen Leser hingegen Knappheit und Kürze das vielleicht am meisten charakteristische Merkmal der ersteren. Diese Knappheit zeigt sich nicht nur auf lautlichem Gebiete, in allerlei Abkürzungen und Verschleifungen; auch auf dem der Syntax unterscheidet sich die Sprache in Hans Sachsens Schriften von dem jetzigen Sprachgebrauche wohl durch nichts schärfer, als durch die Sparsamkeit im Ausdruck. Der moderne Leser hat, um Hans Sachsens Syntax mit der seinigen in Übereinstimmung zu bringen, vor allem eine Menge Wiederholungen und Ergänzungen bald des einen, bald des anderen Satzteiles nötig, der ihm ausgelassen scheint.

Bei der folgenden Darstellung der bei Hans Sachs vorkommenden, zur Sparsamkeit im Ausdruck gehörigen Erscheinungen schliessen wir uns in der Auffassung derselben an die von Paul, Pr. S. 263 ff. auseinandergesetzten Grundsätze an. Was dort über Erscheinungen der fraglichen Art im Allgemeinen gesagt ist, werden wir hier auf Hans Sachsens Sprache anzuwenden suchen. Die oben erwähnten, bei Hans Sachs so häufigen Ersparungen verschiedenartiger Satzbestandteile, deren Setzung bei vollständigerem Ausdruck des Gedankens — wie er auch bei Hans Sachs das Regelmässige ist und wie ihn der moderne Sprachgebrauch noch entschiedener verlangt — notwendig wäre, haben wir demnach zum allergrössten Teile aus einfacher Setzung eines mit mehrfacher Beziehung gebrauchten Satzteiles zu erklären, einem Gebrauch, welcher der modernen Sprache nur noch in sehr beschränktem Maasse geläufig ist. Wo aber ein solches mehreren Satzgliedern gemeinsames, die ersparten Satzteile vertretendes Element nicht vorhanden ist, sind jene Satzteile als selbst-

verständlich und überflüssig nicht zum sprachlichen Ausdruck gelangt und gehen, wenigstens für den Dichter, aus dem Zusammenhange, aus der Situation deutlich genug hervor.

Diese allgemeinen Sätze wird die nachstehende Darstellung im Einzelnen näher auszuführen haben.

A. Ersparung eines Subjektpronomens.

1. Ersparungen der persönlichen Pronomina.

§ 1. Bei der Betrachtung dieser Erscheinungen sind zunächst solche Fälle auszusondern, in denen, wie wir annehmen, das Fehlen des Pron. nur scheinbar und aus phonetischen Einflüssen und metrischen Bedürfnissen zugleich zu erklären ist. Solche Faktoren scheinen uns bei allen Personen, ausser der 1. und der 2. Pers. Plur. wirksam zu sein, am häufigsten natürlich bei der 3. Pers. Wir sagen „scheinen", denn wir wollen das Angenommene keineswegs als eine ausgemachte Thatsache hinstellen. In den meisten von den unten verzeichneten Fällen ist es uns allerdings schwer, die Ersparung anders als phonetisch zu erklären; in einigen lässt sich aber auch eine Vertretung des fehlenden Pron., wie in den § 3 ff. besprochenen Gruppen, denken. Weder in jenen noch in diesen Fällen können wir es nun beweisen, dass das Fehlen des Pron. nur scheinbar und aus phonetischen Einflüssen zu erklären ist. Aber andererseits lässt sich die Möglichkeit dieser Erklärung auch nicht läugnen, und dies ist uns Grund genug, um die in diesem § besprochenen Fälle von denen zu trennen, in welchen an phonetische Momente nicht zu denken ist.

1) Wunderlich (Luther Pr. S. 17) nimmt bei Luther eine Abneigung an, nach *oder* und *sondern* durch Setzung des Pron. *er* den Lautkomplex *er* zweimal dicht nebeneinander zu wiederholen. Eher als aus dieser Rücksicht auf den Wohllaut scheint uns bei dem Dichter Hans Sachs die Unterdrückung des schwach betonten Pron. nach einem Worte mit auslautendem *-er* aus dem Bedürfnis hervorzugehen, eine Silbe bei der Herstellung eines Verses zu ersparen. In dem auslautenden *-er* von *oder* steckt wohl das Pron. z. B. FS. 292, 105—10: *Wenn dem . . . Zufellt ein dapffer Erbes stück, Oder macht jhn ein Heyrath reich, . . ., Oder ein gutes Ampt dergleich, Oder kompt in eim Bergkwerck auff*, vgl. noch 326, 76—85 u. das darüber unten § 25, *3)* gesagte.

Das auslautende *-er* von *Sünder* scheint uns das Pron. mitzuenthalten z. B. FS. 208, 45—6: *Aim freünt gfelt kain vngrechtikeit, Sünder straffet die mit warheit;* ebenso das auslautende *-er* anderer Wörter in folgenden Fällen: FS. 162, 34: *Weil aber all sach schlüeg hin hinder;* 176, 46: *Wie sehr in dem loch sich trang;* 126, 41—2: *Die ander nacht verlüer Das kües;* wohl auch 310, 103: *Den schlug aüfs pflaster an den enden*, wo durch unsere Annahme das Subj. keine für Hans Sachs unmögliche Stellung erhält. Sogar in einem Falle wie 237, 19—22: *Als der einmal . . . Angrieffe ainen alten hasen, War doch nit so kreftig . . ., Das . . .*, ist es wahrscheinlich, dass das Pron. *er* im auslautenden *-r* von *war* steckt. Aber auch mit einem anlautenden *er-* konnte wohl das Pron. verschmelzen; dies nehmen wir an z. B. Fsp. 84, 345: *Ey lieber, hat erschlagen den alten?* FS. 212, 83—5: *Hat aber die alt in geeft . . ., Müs erst mit iren freünden rechten;* 252, 84: *Derhalb ain sin erdencken war* (vgl. z. B. Fsp. 74, 151—2: *das er erwarm zw stünd*, wo das Pron. metrisch unentbehrlich war).

2) Die Femininform *sie* wird bei Hans Sachs oft aus metrischen Gründen in der mundartlichen verkürzten Form *s'* einem Worte angehängt (s. z. B. FS. 7, 127, 139, 149, 197, 237). Bei auslautendem *-s* kann das Pron. daher leicht mit diesem zusammenschmelzen und ganz unbezeichnet bleiben. Dies ist wohl der Fall z. B. FS. 212, 93: *Ir guet, das im pracht in die ee;* 272, 26: *Ir Pfeil liesz augenblicklich wandern;* vgl. auch Fsp. 12, 179: *So isz vom wassr vil schelliger worn.* Mit anlautendem *s-* konnte das verkürzte Pron. wohl ebenso leicht verschmelzen (vgl. unten *3)*), besonders bei folgendem Vokal. Doch steht uns dafür kein Beispiel zu Verfügung. Bei folgendem Konsonanten (z. B. FS. 80, 21—25: *Der Pfaff gab ir den* (korock) . . . *zw pfant; Spert in ain kestlein in zw hant*) ist der Zusammenfall weniger wahrscheinlich.

3) Was wir eben über die Singularform *sie* gesagt haben, gilt natürlich auch von der gleichlautenden Pluralform. Fälle, wo das Pron. wahrscheinlich in einem auslautenden *-s* steckt, sind z. B. FS. 252, 69: *Als nün der salben nicht mer hetten;* 309, 166: *glaub, das aller ding auch drumb kamen;* bei *dass* noch z. B. 318, 96. Mit einem anlautenden *s-* scheint das Pron. zusammengeschmolzen zu sein z. B. FS. 112, 16—18: *Solten ein vrtail pringen;* 282, 227: *Sagen, ich sol hacken vnd rewten;* 335, 99: *Darmit sich oft in grünt verterben;* Fsp. 85, 636: *Sind vast ir müeter art durch aus.* Vgl. noch 324, 118: *zw essen sind schedlich, auf glauben* [wir fassen den Vers als parenthetische Einschiebung zwischen den Hauptsatz (V. 117) und den Nebensatz (V. 119); vgl. die Interpunktion Goetzes]. Das Zusammentreffen zweier *s*-Laute begünstigt

die Verschlingung des Pron. FS. 252, 45: *Das steez mit hauffen ire sel . . . füeren in die hel.*

4) Nur wenige Fälle können wir anführen, in denen uns bei der Ersparung des Pron. *der 1. Pers. Sing.* phonetische und metrische Faktoren wirksam zu sein scheinen. Das Pron. *ich* wurde in der Mundart von Hans Sachs zu *i'* verkürzt. Diese dialektische Form ist, wie wir glauben, mit einem folgenden anlautenden *i* verschmolzen Fsp. 56, 178—9: *Ey, sol der verflucht Hund das Beth Verderben, vnd sol jhm sehen zu?* (jhm = i' ihm); Fsp. 40, 333—4: *Bald er hin kam, gar vnuerdrossen Sucht im Hausz unden mit eim Licht* (im = i' im); Fsp. 54, 115—16: *Wann er den Pfaffen nit hett gesehen, Wolt jm selb wol ein Nasen drehen* (jm = i' ihm). Eine passende Vertretung für das fehlende *ich* zu finden, scheint uns in diesen Fällen nicht möglich. Das Pron. ist entweder aus der Situation zu entnehmen, oder es steckt in dem folgenden anlautenden *i*. Die letztere, phonetische Erklärung ist uns die wahrscheinlichste.

5) Bei den Ersparungen des Pron. *der 2. Pers. Sing.* kommen wieder phonetische Momente häufig in Betracht. Der volle Vokal des im Verhältnis zu seinem Verbum meistens schwach betonten Pron. konnte bei der Aussprache zu einem unbestimmten *ə*-Laut abgeschwächt werden, oder ganz ausfallen (s. Paul Gr. § 88). Das so abgekürzte, nur aus einem *d- t*-Laut bestehende Pron. konnte nun bei invertierter Wortfolge mit dem *t* der Verbalendung zusammenschmelzen und unbezeichnet bleiben. Auf das Vorkommen dieser Erscheinung im Mhd. hat Paul Gr. § 196, Anm. 2 hingewiesen, für nhd. Mundarten bezeugt sie Wunderlich, Sb. S. 16. Dem Dichter bot sie ein bequemes Mittel eine Silbe im Verse zu ersparen, und sehr häufig sind daher bei Hans Sachs Fälle wie FS. 294, 55: *Warumb schweigst vnd rettst nit dein ehr?* wo bei der Inversion das Pron. in der Verbalendung steckt. Aber auch vor dem Verb war das Pron. in der Regel schwach betont und konnte seinen Vokal einbüssen. Eine Verschmelzung des abgekürzten Pron. mit einem vorangehenden *t*-Laut konnte daher wohl auch bei gerader Wortfolge stattfinden. Es ist uns sehr wahrscheinlich, dass z. B. in Fällen wie FS. 3, 44: *Vnd must mir gelten mit der hewt;* 67, 203: *Vnd wilt mich erst noch pas zerschneiden* das Pron. im Auslaut von *und* mit enthalten ist. Beim Übergang aus diesem oder einem ähnlichen Auslaut zum Anlaut des Verbums bildet sich in der Aussprache ein unbestimmter *ə*-Laut, der aber unbezeichnet bleibt. — Endlich lässt sich eine Verschmelzung des abgekürzten Pron. mit einem nachfolgenden *t* auch wohl denken, und es scheint uns nicht unmöglich, dass z. B. Fsp. 84, 355: *Ist der kaufmon, von dem thuest sagen* das anlautende *t* von *thuest* auch das Pron. vertritt.

§ 2. Diejenigen Ersparungen nun, bei denen phonetische Faktoren der oben angedeuteten Art keine Rolle spielen, lassen sich in drei Hauptgruppen zerlegen. In den beiden ersten ist das ersparte Pron. im Vorhergehenden vertreten; die Ersparung ist aus einfacher Setzung eines Satzgliedes mit mehrfacher Beziehung zu erklären. Die erste Hauptgruppe wird von den Fällen gebildet, wo das grammatische Verhältnis jenes gemeinsamen Satzgliedes zu den nichtgemeinsamen (hier Verben) das gleiche ist, anders ausgedrückt: von den Fällen, wo das Wort, von dem das ersparte Subjektpronomen vertreten wird, in seinem Satze Subjekt ist. Die zweite Gruppe setzt sich aus den Fällen zusammen, in denen das grammatische Verhältnis des gemeinsamen Gliedes zu den nichtgemeinsamen nach den verschiedenen Richtungen ein verschiedenes ist, d. h. das Wort von dem das ersparte Pron. vertreten wird, ist in seinem Satze nicht Subjekt, sondern hat eine andere, bald diese, bald jene Funktion. Als dritte Hauptgruppe stehen den beiden ersten gegenüber die Fälle, in denen das Subjektpron., ohne im Vorhergehenden vertreten zu sein, als selbstverständlich und aus dem Zusammenhange, aus der Situation deutlich genug hervorgehend, erspart wird.

a. Erste Hauptgruppe.

§ 3. Ein einfach gesetztes, mehreren Verben gemeinsames Subj. zeigt auch die heutige Sprache noch in Sätzen von dem Typus: Cäsar (er, ich) kam, sah und siegte; ebenso bei gemeinsamer Unterordnung. Die Setzung eines gemeinsamen Subjektes ist aber heutzutage auf solche unter sich gleichwertigen, eng zusammenhängenden Sätze beschränkt, und auch in diesen nur bei gerader Wortstellung und Verknüpfung der Sätze durch *und* gebräuchlich (s. Wunderlich, Sb. S. 14 f.). Diese Schranken kennt die ältere Sprache im Allgemeinen nicht (s. Grimm S. 245 ff., Erdmann § 5) und sie gelten ebensowenig für Hans Sachs. Hier können sowohl nicht gleichwertige als gleichwertige Sätze ein gemeinsames Subj. haben, und in den letzteren kann die Wiederholung des einmal gesetzten Subj. auch bei Asyndese und bei invertierter Wortstellung unterbleiben. Wir betrachten zunächst die Ersparungen

α) Bei gleichwertigen Sätzen.

Im Interesse der Klarheit behandeln wir die Verhältnisse bei den verschiedenen Personen nicht mit- sondern nacheinander. Es liegt in der Natur der

Sache, dass die Fälle am häufigsten sind, wo ein Pron. *der dritten Pers.* erspart wird. Diese betrachten wir daher zuerst.

§ 4. Die Sätze gleichen Subjektes können mit einander in engerem oder loserem Zusammenhange stehen. Sie können sich aneinander anschliessen, z. B. FS. 123, 42 ff: *So můes mein maid hewt aůch mit wandern; Kan hewer gleich als viel als vert; Mit spinen ist sie nichsen wert: Ains vertret, das ander verwuezelt;* 216, 12—15: *Ains tags hetten sie ausgespecht, Der Schwab ain sack mit nůesen . . ., pey im peschlos, Wie er den hollen wolt zw nacht,* vgl. noch Fsp. 11, 204—6; FS. 240, 15—16 und sehr oft. Oder, was dem modernen Leser eine noch grössere Freiheit scheint, die Sätze gleichen Subjekts sind durch einen Satz mit fremden Subj. von einander getrennt (vgl. Paul, Pr. S. 265). So bei Asyndese z. B. FS. 311, 27—9: *(Der maister) sach den schuknecht sawer an, Der sach herwider saůer tron, Fragt* (nicht der Knecht, sondern der Meister): „*Wan pistw gezogen her?*“ Weniger auffallend als dieses Beispiel ist das folgende, weil hier keine solche Unklarheit über das Subj. entsteht wie dort: FS. 212, 109—114: *So thuet sich ir der hawsher schemen . . . So felt den alle frewd in dreck; Můes das gancz jar . . . kiffarbeis essen.* Ähnlich wie hier ist *er* erspart noch z. B. FS. 84, 89—93; 187, 57—9; 210, 84—7; 240, 10—14; 251, 59—61; 290, 40—44; 292, 48—50. Ebenso das Pluralpronomen *sie* z. B. FS. 220, 58—62: *(die affn) Ain dancz vmb den kremer anfingen. Darnach . . . Schaisz im ain aff in seinen hůet. Die schůech im von sein fuesen zuegen Vnd sie im in den walt vertruegen,* ähnlich z. B. FS. 238, 52—6 (Subj. zu *Hettens*, wo das angehängte *s* = der Acc. Plur. *sie*, ist *Die kůntschaftr* in V. 52; nach V. 55 scheint uns der Zusammenhang einen Punkt zu fordern); vgl. noch 160, 100—102. In einem parenthetisch eingeschobenen Satze ist *er* erspart FS. 315, 48—50: *Der hat mer fressen, als* (= wie) *ich mein — So geiczig in sein rachen fras — Mer den kain gast, der zu disch sas* (wo in der Ausgabe die Parenthesezeichen oder wenigstens ein Komma nach *fras* nicht fehlen sollte); ähnlich bei eingeschobenem *sprach* FS. 179, 150—153: *Der pawer . . . wart ser zornig an dem ent: „Dass euch rosz hoden schent vnd plent!“ Sprach, „Hat euch der dewffel hergfůert?* Sogar nach mehreren fremden Subjekten unterbleibt oft die Wiederaufnahme des gemeinsamen Subjektes; so z. B. FS. 96, 45—9: *Sie ist schlůchtisch in allen sachen . . . Heffen vnd schůessl liegt vngespůelt, Sam hab ein saw darin geůelt. Pfercht in die heffen auch darzw,* vgl. FS. 32, 101—105, ähnlich bei männlichem Subj. FS. 254, 60—70 (Subj. zu *zaumet* in V. 70 ist *der kerner* in V. 60); bei eingeschobenem *sprach* FS. 179, 49—53: *der pa-*

werszmon . . . seim grosen vnrat nachson: Das kalb erdrunckn, das flaisch gefressen, Die kacz erschlagn. „Ich kon ermessen", Sprach, „das sprichwort mús ie war sein".

Sehr häufig kommt die Trennung der Sätze gleichen Subjektes auch bei Syndese vor. *Ein* fremdes Subjekt ist zwischen die Sätze eingeschoben z. B. FS. 228, 16—19: *Da rueffet seim geselen er, Der war nur aus laimen geprent, Ser leicht, vnd schwam dahin pehent, Vnd sprach* (nicht der Geselle, sondern *er*), ähnlich FS. 191, 59—64; 206, 65—7; Fsp. 74, 151—2; vgl. noch FS. 7, 237—41: *Ich sprach: „Ists* (= ist sie) *dir dann freúntlich nicht . . .?" Er sprach: „Ia, ein halb viertel or* (ist sie mir freundlich), *So lig wir ynn dem hatz als vor, Vnd leyt die nacht an mir zu kiffen;* bei Koordination durch *oder* FS. 220, 105—7: *(solich spotfogel) Wischen das mawl, drollen darfon, Kainer wil nichs geredet hon, Oder geben fur iren glimpff.* Durch mehrere Sätze mit fremden Subjekten sind jene Sätze getrennt z. B. FS. 202, 65—70: *Da fúert der fúechs den wolff hinúemb Hin vnd wider im holcz vil kruemb, Pis das doch ging die nacht herein, der man ging auf mit hellem schein, Vnd pracht den wolff pey ainer múel Zv aim schopffprúnen* (V. 68 ist wohl mit V. 67 koordiniert, und die Interpunktion von Goetze daher nicht berechtigt); 221, 62—5: *(sie) Detten in hart rawffen vnd denen, Vnd wurt zerkraczet vnd zerpissen, Sein angsicht mit negeln zvrissen, Vnd jagten in von in pluetrúnstig;* hierher gehört wohl auch 209, 37—42: *Wan wo der ware fried regiert, Lant vnde lewt gesegnet wirt: Sicher sint alle weg vnd stras Vnd all hendel gúet vbermas; Nembt an gwalt, er vnd reichtúm zw, Vnd wont sicher in stiller rw* (Subj. zu *Nembt* ist wohl *Lant vnde lewt*).

§ 5. Noch eine Reihe von Fällen, die den eben angeführten nahe stehen, haben wir hier zu betrachten. In dem letzteren von zwei koordinierten Sätzen gleichen Subjektes kann unter Umständen die Hindeutung auf das im ersteren Satze gesetzte gemeinsame Subj. heutzutage auch dann fehlen, wenn der erstere Satz durch Bestimmungen erweitert ist. Sogar wenn die Bestimmungen den Umfang von Sätzen annehmen, und die Sätze gleichen Subjektes also durch Sätze mit fremdem Subjekt von einander getrennt werden, ist die Wiederaufnahme des gemeinsamen Subj. nicht nötig, solange der Zusammenhang auch ohnedies klar genug ist. Zum Beispiel in einem Falle wie FS. 266, 73—5: *Der Lindel Dótsch sprach: „Schaw mir zw! Ich thet gleich, wie ich iczúnd thw", Vnd wider auf den prúnen sas,* wird auch jetzt nach *und* kein Subjektpronomen gefordert; vgl. noch z. B. 287, 34—38 und 122—125. Sobald aber die Klarheit des Zusammenhanges es erfordert, namentlich nach mehreren ein-

geschobenen fremden Subjekten, muss jetzt auch in derartigen Fällen nach *und* das gemeinsame Subj. wieder durch ein Pron. aufgenommen werden. Bei Hans Sachs aber besteht in Sätzen von diesem Typus eine viel grössere Freiheit in Bezug auf die Wiederaufnahme des Subj., als in der jetzigen Sprache. Es kommt sehr häufig vor, dass er, wo Worte oder Gedanken einer Person angeführt werden, nach dem Verbum dicendi eine lange oratio directa oder indirecta oft mit wechselnden Subjekten folgen lässt und, wenn danach wieder in die Person des Verbum dicendi übergegangen wird, das mit jenem Verbum gemeinsame Subj. doch nicht wieder aufnimmt. So bei direkter Form der Rede z. B. FS. 276, 107—116: *(der alte dropff) Sprach: „Ich bin gantz vnd gar verdorben, Mir wer nichts bessers denn gestorben . . ., Mein hertz das schreyet zetter waffen! . . . Weil ich mein Schätz nit mehren kan, . . ., Bin ich je arm vnd sehr elend“, Vnd neiget sein Kopff in die Händ;* ähnlich bei männlichem Subj. noch z. B. 263, 32—41; 276, 37—43; 284, 96—103; 309, 43—49; 313, 127—132; vgl. 327, 31—41, wo das gemeinsame Subj. durch *er* wieder aufgenommen ist. Bei weiblichem Subjekt z. B. FS. 54, 72—79: *Da rueffet sie vmb gnad . . . Vnd sprach: „Mein herczenlieber man, Hör auf! ich wil sein nimer than. Mich hat ein nachtparin verfüert . . . Der wil ich folgen nimer mer. Hab dir zw pfant mein weiplich er!“ Vnd fiel mir wainent vmb den hals;* ähnlich noch FS. 7, 188—194; 204, 58—78 (besonders lange Rede); 298, 83—86; 312, 20—32. Bei indirekter Form der Rede s. z. B. FS. 217, 24—36; 313, 32—42; vgl. auch FS. 253, 75—8: *Dem er gar hoch sein gnadprieff rüembt, Wie er künt werden nicht verthüembt, Sunder het gwis das ewig leben, Vnd veracht den armen darneben;* wegen der freien Wortstellung in der Or. obl. ist uns die Stelle unklar; um anzudeuten, dass der letzte Vers nicht mehr zur Or. obl. gehört, müsste nach unserem Gefühl nach *Vnd* das Subj. *er* wiederholt werden. In allen diesen Fällen scheint uns der Umstand, dass das gemeinsame Subj. nicht wieder aufgenommen wird, ein Beweis dafür, dass der Dichter die ganze Rede nur als Bestimmung, Objekt des Verbum dicendi gefasst, und sich die angefangene Periode mit der Rede noch nicht als abgeschlossen gedacht hat. Dies ist uns auch in solchen Fällen wahrscheinlich, wo der Übergang aus der Rede in die Erzählung nicht wie an den oben angeführten Stellen syndetisch durch *und*, sondern asyndetisch geschieht, z. B. 328, 29 ff: *Der wirt sprach: „Der wandel vnd prechen Thw ich euch meinen gawl versprechen; Idoch ich euch hie nit verhel, Der gawl hat ainen klainen fel: Im anfang ist vast treg sein gang, Pis er erschwitzt, . . ., Den get er den trab, . . ., Das ir gnüg habt zv wider halten“, Schwüer, sünst west er kain fel*

daran; vgl. noch z. B. FS. 63, 21—26; 309, 94—108; 311, 139—41; 313, 69—80; 328, 55—57, 93—97.

§ 6. Die zur ersten Hauptgruppe gehörigen Ersparungen der Pronomina der 1. Pers. sind nach denen der Pronomina dritter Person die zahlreichsten. Das Hauptkontingent stellt natürlich das Singularpron. *ich;* ebenso liegt die Seltenheit der Erscheinung bei *wir* in der Natur der Sache. Wir entnehmen unseren Beispielen nur wenige. Trennung der Sätze gleichen Subjekts wie bei der dritten Person, z. B. FS. 308, 1—5: *Ich haw vnd hobel an dem ploch, . . ., idoch Pleibt es doch vngeschlacht vnd grob, . . ., Verderb daran mein werckzeüg güet;* 309, 165—7: *Nit wais ich, wis den spiczpuebn ging Mit dem gelt; glaub, das aller ding Auch drumb kamen,* ähnlich bei Verknüpfung durch *auch* FS. 153, 108—110; bei Verknüpfung durch *und* FS. 65, 441—3: *Im augenplick ich auferwacht. Da war es noch stickfinstre nacht, Vnd lag in einem kalten schwais.* Wegen der Inversion führen wir an FS. 312, 122—3: *(in ewer zuechtschüel) Pin ich mit der künst worn pegabt: Der wil mein lebtag halten mich,* ähnlich Fsp. 20, 309—312; bei Verknüpfung durch *und* Fsp. 59, 127—9: *Sol ich widr steln vnd würt gefangen . . ., So künt ich ie nit wider kumen,* ähnliche Fälle bei Luther, s. Wunderlich Luther Pr. S. 16; bei Verknüpfung durch *auch* FS. 238, 96—8: *Wir pawern sint da gwest allain Vnd haben kolholcz vmb geschlagen, Auch thettn zwey aichhornlein vmbjagen.* Den eben citierten Fällen wird wohl am passendsten anzureihen sein eine bemerkenswerte Stelle, wo zwar nicht die Form *ich*, aber doch die 1. Pers. Sing. als logisches Subj. erspart ist. FS. 306 spricht Klaus Narr (V. 23): *Ir herrn, vil dings wundert euch ser, Doch wündern mich drey ding vil mer,* und auf die Frage, was es für Dinge seien, antwortet er (V. 32): *Erstlich wundert das gros gepew, Das die parfueser münich thon.* Wie in den zuerst angeführten Fällen das einmal gesetzte grammatikalische Subj., so wird hier bei *wundert* das schon V. 24 stehende logische Subj. erspart. — Endlich sei noch erwähnt FS. 259, 56—60: *Ich macht mich auf vnd zv im sagt: „Hans, ich wais die milch grüeben wol. Drin stent zwen virtail hefen vol Milch; ich wil gen ainen pringen", Schlich hin;* vgl. 258, 18—21 u. s. oben § 5.

§ 7. Sieht man von den Fällen der oben § 1, 5) behandelten Art ab, so sind die hierher gehörigen Ersparungen von *du* bei Hans Sachs selten (vgl. dagegen zweite Hauptgruppe). Bei Trennung der Sätze gleichen Subjektes findet sich auch *du* bisweilen erspart. So z. B. Fsp. 8, wo V. 220 *der Für-*

witz sagt: *Da must du gutte Rådlein machen*, worauf *Eckhart* antwortet: *Fürwitz der rhet zu gfärling sachen. Must wagen Leib, Rosz vnd den Schlitn*, vgl. FS. 16, 153—6. Als zur ersten Gruppe gehörig betrachten wir auch die Ersparungen nach einem Imperativ, bei dem das Pron. nicht gesetzt ist, z. B. Fsp. 25, 24—28: *Mein Vatter, kauff mir in der Stadt . . . ein blobes tuch, . . ., Solst mich stets rôsch vnd munter finnen*, vgl. noch Fsp. 3, 350—351; FS. 329, 131—4. Noch einen hierher gehörigen Fall haben wir wohl Fsp. 31, 116—121, wo *solt* (V. 120) wahrscheinlich statt *sollst* steht; das ersparte Subjektpron. liegt in den Imperativen der Verse 116, 117.

Die Ersparungen von *ihr* sind bei Hans Sachs im Ganzen genommen nicht seltener (vgl. Wunderlich Sb. S. 16), wenn auch nicht häufiger als die von *du* (s. zweite und dritte Hauptgruppe). Aber hier können wir nur folgende Fälle erwähnen: FS. 293, 83—88: *O Herr, Wie habt jr vns Brûder so ferr In ewrem Geistling Hertzn vergessen . . .? Vormals vns nie so ellend liest;* ferner bei Trennung der Sätze gleichen Subjekts Fsp. 9, 107—10, wo der Handwerksmann von den Bauern sagt: *Im Winter geht jr int Rockenstuben, Da schertzen Meyd vnd die Roszpuben. Zu nacht die Pawren Knecht erst fenstern; Habt gut warm stubn, so es thut glenstern;* ebenso nach einem vorangegangenen Imperativ FS. 320: nachdem in Vers 53 gesagt ist: *Merckt! das erst thier das ist ain kacz*, heisst es V. 61 ff: *Das ander thier das ist ein saw, Die hilft zv kainem ackerpaw, Spant sie weder in karn noch wagen.*

§ 8. Als Besonderheit der drei Pluralpronomina ist noch hervorzuheben, dass sie nicht nur durch ein pluralisches Subj. mitvertreten sein können, sondern auch durch zwei resp. mehrere singularische. Dies ist der Fall z. B. FS. 232, 113—15: *Ainer wirt gschossn, der andr lam gschlagen . . . Haben knoblauch getragen aus* etc.; 313, 82—95: *Der pfarer lachet zv im sprach: . . . Der mûnch war auch ain gueter zecher . . . Machten sich auf den weg darnach;* Fsp. 81, Bühnenbemerkung nach V. 300: *Der knecht reibt sich an in; er stôst in von im. Gent also mit einander aus*, ganz ähnlich sind die Bühnenbemerkungen noch Fsp. 76, nach V. 169; 79, nach V. 338 (Subjekte zu *gent* sind *der Hederlein* und *der pawer*), vgl. ausserdem Fsp. 66, 257—60; bei Verknüpfung durch *und* z. B. FS. 214, 86—93: *Die hausfôgtin thet zv ir jehen: . . .? Die fraw sprach: . . . Vnd namens aus dem vogel haûs*, ähnlich noch Fsp. 66, 157—61; 68, 7—12; FS. 283, 79—92; — Fsp. 12, 267—8: *Red ich ain wort, so ret sie zway, Vnd haben oft im haus ein gschray;* FS. 214, 62—5: *Dw pist vurwar der selbig pieber, Der*

otter ist dein hausfögtin, Die mir meinen al haben hin, Vnd habt in mit einander gfressen.

β) Ersparungen bei nicht gleichwertigen Sätzen.

§ 9. Eine bei Hans Sachs nicht seltene Erscheinung ist es, dass das gemeinsame Subj. eines regierenden und eines abhängigen Satzes nur in dem einen von beiden gesetzt, in dem anderen dagegen erspart wird. Schon im Ahd. war dies häufig der Fall (s. Grimm S. 245, Erdmann S. 4); aus dem Mhd. scheint Erdmann diese Art von Ersparung bei der dritten Pers. nicht zu kennen (s. S. 5); doch vgl. Paul Gr. § 379, auch Pr. S. 265; aus Luther bringen Beispiele Wunderlich (Luther Pr. S. 18 f.) und Franke (§ 338, 2. a). Wie aus den folgenden Belegen hervorgeht, findet sich die Erscheinung bei Hans Sachs gerade bei der dritten Pers. am häufigsten. — Das gemeinsame Subj. ist in dem vorangehenden regierenden Satz enthalten bei konjunktionslosem Objektsnebensatz FS. 301, 91: *Wenn er meynt, sie am gwisten hab;* 356, 73: *Doch wenn er meint am vesten steh;* 175, 62: *So sie main, kinder habn geporn* (ähnlich mhd., s. Paul a. a. O.); in abhängigen Sätzen anderer Art, die ihren Hauptsätzen nachfolgen, ist das Subjektpron. erspart FS. 203, 67—9: *Der hoffertig wolff glawbet das Vnd zv dem mawl sich nehen was, Wie wol der schrift vnkúnet war;* 282, 172—3: *Daran hab ich sehr schmalen gwinn, Das schier hab weder Geldt noch pfand;* 346, 14: *Ich hab gnúg, sterb hewt oder morgen;* 139, 51—2: *(Du) Waist doch darpey, wie vnpeschaiden Dich heltest mit den pawren maiden.* — Häufiger ist das Pron. im Hauptsatz erspart und das gemeinsame Subj. steht im vorangehenden Nebensatz. So z. B. in einem konjunktionslosen Bedingungssatz Fsp. 12, 362: *Hat ewer einer lust, mag darnach fregen* (ein ähnliches Beispiel aus Hans Sachs bei Paul Pr. a. a. O.); Fsp. 41, 157—8: *Hab ich vrkundt von diesen Dingen, wil den bachen vom Dieb wol bringen,* ähnlich *ich* erspart noch FS. 16, 88—9; Fsp. 66, 179—80 und 182—5; vgl. Fsp. 36, 172: *Ergreiff wirn, wôlln jn lebndig schinden;* FS. 338, 9—10: *Folgt ir nach meiner ler auf erden, So wert on zweiffel selig werden;* bei adhortat. Konjunktiv im Hauptsatz FS. 347, 129—30: *Merckt er, das man in wil gefern, So tracht, wie er múg ledig wern.* In einem durch Konjunktion eingeleiteten Bedingungssatz steht das im Hauptsatz ersparte Pron. z. B. Fsp. 52, 349—51: *Wenn sie all Kônig vnd Fürsten wern, . . ., Mûsten ob einander verschmorn;* vgl. FS. 384, 65—6: *Vnd wo sie einen keczer finden, Mit heilger schrift in vberwinden;* in einem Falle wie FS. 139, 46—7 (= 335, 88—9): *Wen dw*

im lant thůest therminiren, *Thuest die alten pewrin petriegen* ist die Ersparung möglicherweise nur scheinbar, s. § 1, 5); in den bisherigen Beispielen gieng der Bedingungssatz seinem Hauptsatze voran; umgekehrt ist die Satzstellung FS. 313, 74—5: *Sambt dem gelt wůrt ewig verlorn, wo ir dieses gelt det an růern* (das gemeinsame Subjekt im nachfolgenden Nebensatze). In einem Temporalsatz steht das im Hauptsatz ersparte Subj. FS. 311, 83—4: *Vnd als er nachs sich legen thet, Das kues im pet verloren het;* FS. 63, 46—7: *Als sie sahen den dotten dragen, Mit groser růmor auf in stiesen;* hierher gehört wohl auch FS. 180, 83—6: *Als er aufstůnd in finster nacht, Metten zv petten mit andacht, Kniet nider also vngewies Vnd seinen wasser krůeg vmb sties* (den Nachsatz bildet wohl *Kniet nider* etc.); ferner FS. 292, 4—6: *Vnd als man nun zu Tische sasz, Vnd also frölich asz vnd tranck, Sagten auch manchen guten Schwanck,* wo der in *man* liegende Pluralbegriff das Subj. des Hauptsatzes zu vertreten scheint; vgl. noch FS. 259, 102—3: *Als ich dise wort hören thet, Merckt erst, das het geirret ich.* Ähnlich wie die eben angeführten Fälle ist wohl aufzufassen FS. 315, 70—71: *Als frue der reůters man aůffstůnd, Sein gawl fůetern vnd sateln thet*[1]), ferner FS. 97, 33—5: *Vnd als der wolff vm sach, das er im war so nach, Forcht, das er in zw ris*[2]). In Nebensätzen anderer Art steht das ihnen mit dem nachfolgenden Hauptsatze gemeinsame Subj. FS. 133, 46—7: *Sie sprach: Eh ich euch lasz verderben, Stůrtz eh vbr euch ein schaff mit Wasser*, ähnlich Fsp. 28, 213—14: *Eh ich mein weyb noch mehr wolt schlagen, Wolt eh kein Bruch nicht mehr antragen;* vgl. ausserdem Fsp. 19, 252—3: *Wie oft ich dise war hertrueg, Kunz weder verkauffn noch verstechen.* Unsicher bleibt es uns, wie man folgende Stelle aufzufassen hat: FS. 194, 3—10: *Nach dem vnd got, der herr, peschůeff All creatůr . . ., Vnd vnserm ersten vater Adam Ein rieb aus seiner seitten nam, Daraůs Eua, das weib, im pawt . . ., Gab in darnach sein segen wert.* Es ist nicht ersichtlich, wo hier der Nachsatz beginnt. Man könnte den Satz entweder so verstehen: nachdem Gott . . . schuf und . . . nam, baute er; oder so: nachdem Gott schuf und nam und . . . baute, gab er . . .

---

[1]) Fasst man wie wir V. 71 als Nachsatz zu V. 70 und lässt man mit V. 72 einen neuen Satz beginnen, wird die Stelle viel einfacher und natürlicher als nach der Interpunktion Goetzes, der durch den Gedankenstrich hinter V. 71 anzudeuten scheint, dass hier eine Anakoluthie vorliege. Diese Annahme, nach welcher V. 70—75 *eine* äusserst gezwungene Periode bilden würden, ist nach unserer Auffassung ganz unnötig. V. 70—71 bilden eine ähnliche Periode wie z. B. die oben citierten FS. 311, 83—4.

[2]) *Forcht* fassen wir als Nachsatz und setzen Punkt nach *ris*. Die Interpunktion Goetzes, nach welcher *Forcht* zum *als*-Satz gehören und der Nachsatz erst V. 36 beginnen würde, scheint uns die Stelle unnötiger Weise verwickelt zu machen.

In beiden Fällen stände dann in dem vorangehenden Temporalsatze das für diesen und den Hauptsatz gemeinsame Subjekt *(got)*. Möglich ist aber auch, dass der Dichter keinen von den bezeichneten Sätzen mehr als Nachsatz empfunden, sondern die mit dem temporalen Vordersatz angefangene Konstruktion verlassen hat und die folgenden Sätze als unabhängig nebeinander reiht. Derartige Anakoluthien finden sich bei Hans Sachs nicht selten, wie im zweiten Teile unserer Untersuchung näher nachzuweisen sein wird.

Bei Luther erhält zuweilen ein übergeordneter Satz sein Subj. aus einem eingeschobenen untergeordneten Satze (s. Wunderlich und Franke a. a. O.). Fälle dieser Art kennen wir bei Hans Sachs nicht.

§ 10. Die nicht gleichwertigen Sätze, denen das Subj. gemeinsam ist, brauchen nicht immer in so enger Beziehung zu einander zu stehen, wie in den bisher angeführten Beispielen. Vielmehr unterbleibt bisweilen in dem letzteren von zwei nicht gleichwertigen Sätzen die Hindeutung auf das gemeinsame Subjekt auch dann, wenn die Sätze nicht zusammen eine Verbindung von Haupt- und Nebensatz bilden, sondern durch einen Satz mit fremdem Subj. von einander getrennt sind (ähnlich mhd., s. Paul, Gr. § 378, Anm., Pr. S. 265 a. E., wo auch ein Beispiel aus Hans Sachs). So z. B. FS. 182, 99—102: *Wo sie wirt aber nit gewert, Was sie von dem man hat pegert, So thůet die ander art sich mellen, Vnd* (sie) *fecht an wie ain hůnd zv pellen;* bei asyndetischer Anreihung des Satzes, wo das Subjektpron. erspart ist FS. 24, 25—7: *Ehe jr das wochen lohn einembt, Ist es die wochen vor verschlembt. Bleybt etwan noch schuldig darzu;* 309, 117—120: *Vnd als ich eylent im zv drat, Er mich vmb ain almuessen pat, Stelt sich gancz krencklich vnd pluet arm. Sprach: . . .* (Subj. zu *Sprach* ist nicht *er,* sondern *ich*), vgl. noch 320, 37—40. An folgender Stelle schliessen sich die ungleichwertigen Sätze gleichen Subjektes zwar unmittelbar an einander, stehen aber unter sich nicht in direkter Beziehung (vgl. Paul a. a. O.): FS. 91, 41—4: *Solichs wirt am jungsten gericht Pezalet, wie got selbert spricht, Vnd wirt den himel geben ein Den, die also parmherzig sein* (der Satz *Vnd wirt* etc. ist mit dem Satze *Solichs wirt pezalet* koordiniert und parallel, hat aber das Subjekt mit dem *wie*-Satz gemein). In diesem Zusammenhange seien noch ein Paar Fälle verzeichnet, wo zwei Nebensätze ungleicher Art, unter denen keine direkte Beziehung stattfindet, das Subjekt mit einander gemein haben. Die Sätze schliessen sich aneinander an Fsp. 30, 270—274: *. . . Als zu Rom verbrunnen Viel Heuser, die Silla zerstôret, Auch an zal viel Burger ermôret, Vnd jr gut ôffentlich war feil, Da kaufft ich des ein grossen teil* (hier setzt der mit *Auch* eingeleitete Satz den

Als-Satz fort und ist mit diesem zu parallelisieren; trotzdem ist sein mit dem Relativsatze gemeinsames Subjekt nicht wieder aufgenommen, und der Satz macht deshalb den Eindruck, als wäre er mit dem Relativsatze koordiniert). Durch einen Satz mit fremdem Subjekte sind die Sätze getrennt Fsp. 23, 127—9: (ich sol) *Sprechen, mein Fraw sey vberfeldt, Ob er gleich fordern wirt sein gelt, Vnd* (sie) *mit jm kumb für Gricht vnd Rhat.*

b. Zweite Hauptgruppe.

§ 11. In den hier zu behandelnden Fällen ist das gemeinsame Glied, von dem das ersparte Subjektpron. vertreten wird, in seinem Satze nicht Subjekt, sondern hat eine andere Funktion. Die Sätze, denen das Glied gemeinsam ist, brauchen hier ebensowenig wie in der ersten Gruppe gleichwertig zu sein und können hier wie dort mit einander in engerem oder loserem Zusammenhange stehen. Ferner sind die hierher gehörigen Ersparungen ebensowenig wie die der ersten Gruppe etwas speziell für Hans Sachs Charakteristisches; im Gegenteil kommen sowohl vor als nach ihm in der Sprache dieselben Erscheinungen häufig vor. Wir verweisen hier ein für allemal auf die Beispiele aus dem Mhd. bei Paul Gr. § 378, aus Luthers Sprache bei Franke § 337, 1 und Wunderlich Luther Pr. S. 19 ff.; aus dem 15.—17. Jh. finden sich Beispiele bei Kehrein § 69, *3)*; zu vergleichen ist ferner Paul Pr. S. 267 f., wo neben mhd. und moderneren Beispielen auch einige aus Hans Sachs mitgeteilt sind; einige finden sich auch bei Erdmann S. 5. Wir lassen hier eine reichhaltigere Sammlung folgen, um von der Häufigkeit dieser Ersparungen eine Vorstellung zu geben. — Das gemeinsame Glied kann nun

§ 12. Ein Akkusativ sein, entweder von einem Substantivum, oder von einem Pronomen. Ziemlich oft ist das Subjektpronomen durch einen Akkusativ vertreten

1. bei asyndetisch nebeneinander gestellten Sätzen. So *er* z. B. FS. 135, 38—9: *Den pfaffen der rewtrew vertros, Stig ab, trieb den gaůl vor im hine,* ausserdem z. B. 248, 47—8; 311, 33—4; vgl. 267, 63—4: *Darmit dettens das fůellein schrecken, Schmůeg sich im stal hin in ain ecken.* Ähnlich *sie* (Plur.) FS. 194, 64—6: *Die schönen kinder allesam Het sie gestelet nach ainander, Entpfingen den herrn allesander,* ausserdem z. B. 252, 55—6; vgl. noch FS. 249, 21—4: *Das vertros diese potschaft hart, ... Vermainten, ...* Ferner *ich* FS. 86, 110—11: *Mich dünckt, eůr maid*

hab ein posen mûnd; Sachs nûn pey einr nachparin sten; und *du* Fsp. 11, 206—8: *(der Narr mit) Meyden vnd sehnen thet dich vexieren. Mainst* (= meintest), *dein sach wer haimlich auffs best, So es all menschen von dir west.* Mit den obigen Fällen vgl. 279, 113—14: *(die Leut) Sahen den Teuffel in Pranger stahn, Ein guten fûchssen Rock hett an,* wo das Subj. des Acc. c. Inf. auch für den folgenden Satz gilt; derselbe Fall noch 238, 18—23.

2. Ebenso bei Verknüpfung der Sätze durch *und* FS. 214, 68—9: *Dis freûel wort erzûrnt in gar, Vnd gab ir ainen packen straich,* vgl. 221, 62—3; 387, 32—3; vgl. noch FS. 228, 80—81: *Den reit den armen vngefel Vnd hat den spot den zv dem schaden;* bemerkenswert ist Fsp. 18, 7—9: *Ob einer allhie wer entgegen, Der mir disen* (= den Traum) *klar ausz thet legen, Vnd mir zum besten wirdt* (= würde) *beschiden,* wo die Sätze, denen das Glied gemeinsam ist, nicht in direkter Beziehung zu einander stehen (s. Paul Pr. S. 265, a. E.); vgl. FS. 341, 7 ff.: *So pald in* (= den Hund) *nûr ain wolff hôrt pellen . . ., So gab er in den walt die fluecht . . .; Vnd thet* (sc. der Hund) *pey allen seinen tagen Die wolff . . . verjagen* (die Sätze, denen das Satzglied gemeinsam ist, sind durch einen dritten von einander getrennt). — FS. 74, 41—2: *Die fraw des mans eyffer peweget, Vnd sich zw einem jûngling leget,* vgl. FS. 29, 24—6. — FS. 374, 61—2: *Machen die pueller doll vnd plind, Vnd achten weder weib noch kind,* vgl. Fsp. 76, 68—9; 79, 200—201. — FS. 225, 17—20: *weil mich gott hat Zv der arbeit peschaffen glat, . . ., Vnd gewin mein speis mit dem pflueg.* — 351, 137—8: *Weil ich euch pat, . . ., Vnd mich geweret* (= gewährtet) *eben.* — Fsp. 3, 395—7: *wo dich drûck Mangel . . . vnnd vngelûck Vnd pleybst gedultig dyse zeyt,* wo zu beachten ist, das Vnd pleybst vielleicht = und du pl. (s. oben § 1, *5)*); ähnlich Fsp. 11, 187—8. Bei Verknüpfung der Sätze durch *auch* z. B. 218, 89—91: *In dawcht stez, wie der dot sich rûert, . . . Dacht auch: . . .;* ähnlich *sie* (Plur.) erspart Fsp. 34, 94—6, ferner *wir* Fsp. 64, 217—18 und *du* Fsp. 4, 135—6. Bei Verknüpfung durch *doch* z. B. FS. 207, 113—15: *sie oft die armûet jagt . . ., Verachten doch ainfeltig lewt,* ähnlich *du* erspart z. B. FS. 35, 90—91.

3. Seltener vertritt ein Akkusativ des Hauptsatzes das Subj. des Nebensatzes, oder ein Akkusativ im Nebensatze das des Hauptsatzes. FS. 184, 69—71: *Vnd fegt im den magen zv hant . . . Das wart saûber, kreiden weis.* — FS. 385, 23—5: *Wo aber armut vnd vnfall Ein Weib treibet in den Notstal, Thut in vngedult sich auffbaumen.* — Fsp. 50, 37—8: *(antwort jm) Las mich Gott auff das new Iar leben, Wil im eins mit dem*

andern geben. — FS. 230, 65—6: *ich wolt euch freúntlich pitten, Wolt mich vom tancz . . . Haimfüeren,* ähnlich FS. 17, 34—5.

§ 13. Noch häufiger als von einem Akkusativ ist das Subjektpronomen von einem Dativ vertreten und zwar

1. In asyndetisch dastehenden Sätzen. FS. 218, 134—5: *Da ward im auch zv fliehen gach, Warff den dotten von seinem nack,* ähnlich 223, 19—20; 246, 15—17; vgl. FS. 239, 81—3: *Darob würt hais . . . dem schultheis, . . ., Hies pald lewten die stúrmglocken,* ähnlich 273, 20—21; — FS. 103, 34—5: *Da würt der frawen haimlich pang, Dacht . . .;* Fsp. 1, 108—10: *(er) Tag vnde nacht der liebe dienet Vnd hat doch selb kein frewdt daruon, Gibt offt zu letzt gar bósen lon* (die Sätze, denen das Satzglied gemeinsam ist, sind durch einen dritten von einander getrennt); FS. 292, 83—4: *(sie) Streiffen jr an die Narrenkappen. Thut endtlich jr einen erdappen;* — FS. 236, 11—12: *Also den frôschen auch geschach. Rúngen auch aignem vnglueck nach;* 249, 112—15: *Das in wurd alles abgeschlagen, . . . Vngenter sach wider haimzuegen;* — 231, 30—31: *Den thet der frost mir vil zv laid. War stecz gfangen in seiner straff,* ähnlich z. B. 259, 52—3, 60—61: — FS. 200, 52—4: *Die almal vns sint pey gestanden . . ., Woln in vertrawn vnser freyheit,* vgl. noch FS. 298, 46—9. — FS. 231, 44—5: *Die ainod pringt dir auch vertries. Můest dich in schne vnd regen schmiegen,* ähnlich z. B. 225, 72—3; Fsp. 4, 383—4; 5, 271—2. — Der Dat. Plur. eines Substantivs vertritt das Subjektpron. *ihr* Fsp. 13, 235—7: *Wo ich hin reit . . ., Pin ich den wirten gar vnwert, Porgt mir von keim mal zw dem andern,* wo zu bemerken ist, dass die angeredete Person ein Wirt ist.

2. Noch viel häufiger bei Verknüpfung der Sätze entweder durch *und,* z. B. FS. 220, 26—7: *In dem gingen die awgen im Zv vnd pey dem pruenlein entschlieff* (ähnlich *er* erspart noch z. B. 135, 21—3; 216, 25—6 und sehr oft) oder durch andere koordinierende Bindewörter, z. B. 242, 80—82: *Die jung die graben* (Haare) *im aus rúepfet. Derhalb von paiden weibern war . . . peruepft gancz vnd gar;* — FS. 40, 18—19: *Die zotten hiengen jr ins Maul Vnd war vmbs maul faist vnd besudelt,* ähnlich 145, 77—8; 258, 87—8 und oft; bei Verknüpfung durch *auch* z. B. 255, 97—100: *Milch vnd milchram lag ir im sin, . . ., Forcht auch . . .;* bei Verknüpfung durch *doch* 344, 61—3: *Da wart der jungen frawen wee . . ., Doch mit gotes hilff pald gepar.* — Bei Verknüpfung durch *oder* 294, 94—6: *Bisz jn der schopff an Galgen rúrt, Oder werden mit spot vnd schand . . . gejagt ausz dem Land.* — FS. 51, 1—3: *als mir in Westúalen Ein edelman ein pfert solt zalen.*

Vnd gleich auf Osenpruck zw zůeg (nicht *er* sondern *ich*), vgl. 323, 80—81; FS. 86, 118—19, bei Verknüpfung durch *auch* z. B. 328, 142—4: *Zwen gewl haben mir schaden gnůmen, Hab all mein pargelt aůch on worn, Hab auch mein kellerin verlorn.* — FS. 378, 40—41: *So verget vns das frölich gsanck, Vnd singen den den wemer wee.* — Fsp. 11, 333—4: *Das dir gefiel dein sinn allein Vnd liszt deym aygen willen raum*, wenn nicht vielleicht *Vnd* = und du [s. oben § 1, 5)]; ähnlich z. B. Fsp. 3, 387—9; FS. 332, 167—9; vgl. noch Fsp. 3, 246—7 (Verknüpfung durch *dennoch*); — Fsp. 9, 121—2: *Das gilt euch alles Gelts genug Vnd treibt darmit doch grosz betrug*, ähnlich Fsp. 68, 401—3. — FS. 355, 86—8: *Das er nicht werd . . . ein glechter andern lewten, Vnd thůn mit fingern auf in dewten.*

3. Selten in Verbindungen von Haupt- und Nebensatz. Wir haben nur folgende Beispiele: FS. 229, 82—4: *Darmit er im den thuet vergleichen Sein unpild . . .*, *Das aus verachtůng thet herlangen* (*Das* ist relat. Pron.); FS. 168, 171—2: *Das im nit spot zůmb schaden wachs, Schaw vmb vnd auf!* (obs! adhortat. Konjunktiv); FS. 292, 75—6: *Weil aber stoltzet jr der muth, Nach einem Mann vmbsehen thut;* Fsp. 28, 268—9: *Wo du die Bruch gwinst wieder mir, Will dir ein dutzet Taller schenckn;* Fsp. 51, 122—3: *Wer uns nit gibt, dem selbn erkrumb Sein maul;* vgl. noch Fsp. 8, 143—4: *Iůngling, ich rhiet dir trewlich gern, Leszt* (= du läsest) *in der Iugent, wer das best*, wo wahrscheinlich der Satz *Leszt* etc. *ἀπὸ κοινοῦ* steht, d. h. als Obj. von *rhiet*, als Subj. von *wer* abhängig ist (s. § 70).

§ 14. Einen Genitiv als Vertreter der Subjektpronomina haben wir nur an folgenden Stellen gefunden:

1. Bei asyndetischer Nebeneinanderstellung der Sätze FS. 157, 114—15: *Sein aber spotet idermon, Fuer ain narren gehalten wůer;* Fsp. 12, 342—3: *kainer sich nimpt des pachen an, Ist wol zwayhundert jar ga ghangen;* FS. 242, 20—21: *Ir ide wolt sein fraw im haůs, Zanckten mit einander on rw.*

2. Bei Koordination durch *und* FS. 245, 25—6: *Des mannes kammer offen stůnd, Vnd der schlangen zv sehen kůnd.* — FS. 175, 58—9: *Den hebt sich an der eltern clagen, Vnd muessen die seck selber tragen;* 239, 102—3: *Doch wolt ir kainer foren dron, Vnd deten sich darob all spreissn;* Fsp. 24, 155—6: *Da wart ich nur jr aller spodt Vnd warffen mich mit dreck vnd kot.* Hierher ist vielleicht auch zu führen die unklare Stelle 342, 26—30: *Zv stůnd ist im abissen worn Sein rechte hant von seinem leib, . . ., Von disen staines leben rachen Vnd det das mensch zv schanden machen;* das

Subjekt zu *det* hat man sich wohl als durch den Genit. *leben* (= Löwen) vertreten zu denken. Wie die Fügung *Von . . . rachen* in V. 29 zu erklären ist, wissen wir nicht.

§ 15. Ziemlich häufig übernimmt auch als Vertreter der Subjektpronomina das Possessivpronomen die Rolle des Genitivs.

1. In asyndetisch aneinandergereihten Sätzen z. B. FS. 208, 59—61: *(Sie) Geit allen seinen lastern stat; Hat von im kain warnúng noch schúecz,* ähnlich 220, 11—13; 249, 124—5; Fsp. 50, 332—3; vgl. noch 352, 67—8: (das confect) *Det im sein múnd lieblich durch súesen, Vnd* (er) *thet sein nasch gar wol mit púesen,* wo das Subj. zu *thet* sowohl in *im* als in *sein* liegen kann; — FS. 86, 135—7: *Ich sas ein mal in irem haús . . .; Wolt vmb zwen guelden mich ersteigen;* — FS. 212, 56—8: *Das pringt den freúnden vngeduld Vnd legt ir frewd alle in aschen; Mainten, ein reyger zv erhaschen,* ähnlich z. B. 243, 9—10; — FS. 91, 50—52: *Die deglich peinigt meinen leib . . . Hab tag vnd nacht vor ir kein rw.*

2. In Sätzen, die durch *und* verknüpft sind z. B. FS. 237, 13: *Sein atem wart kúrcz vnd wurt schnaúffen;* ähnlich 328, 13—15; — Fsp. 5, 318—19: *Denn kompt dein Bulerey an tag Vnd schembst dich,* wenn nicht etwa *Vnd* = und du; vgl. noch Fsp. 3, 371—4; — Fsp. 52, 153—4: *Vnd wirt euch ewer Súnd vergeben, Vnd werdet ewig mit mir Leben,* vgl. unter *1.* das Beispiel FS. 352, 67—8.

3. In Sätzen, die nicht in direkter Beziehung zu einander stehen Fsp. 23, 273—5: *(Mich wundert) Das er trawdt wider jrem gschefft Vnd nit merckt, das er ist vnwerdt,* (und sie) *Allein nur seines gelts begerdt.*

§ 16. Eine bei Hans Sachs häufig vorkommende Erscheinung ist es, dass das Wort, welches uns das Subjektpron. vertritt, in seinem Satze von einer Präposition abhängig ist. Beispiele:

1. Bei Asyndese: FS. 290, 7—10: *(Von den Affen) Hab ich von eim Zygeuner ghort Gar wunder vnd seltzame wort, . . . Sagt: . . .;* ähnlich Fsp. 50, 92—3; FS. 292, 37—39; vgl. Fsp. 17, 180—181: *Thust mit dem neide dich beladen, Verdort das marck in dem gebein;* — FS. 232, 28—30: *Habens nit all schaden genúmen Von den jegern vnd von den húnden? Haben all dein gschlecht vberwúnden;* — Fsp. 82, 206—7: *In dem felt auf mich der vnflat, Wirt von im hart gerauft vnd gschlagen,* vgl. FS. 230, 27—8; — FS. 8, 16—17: *So hab ichs doch von dir gehort, Weist, da ich erstlich einher kam;* — FS. 133, 85—7: *ich von*

euch spůr Den Strosack liegen vor der Thůr, Macht mich langweillig in den dingen.

2. Noch gewöhnlicher bei Syndese, z. B. FS. 284, 108—10: *Da wurd er gehling angeloffen Mit zoren von dem Centelon Vnd sprach* (nicht er, sondern *der C.*); vgl. Fsp. 11, 50—51: *Es thut mich in dem pauch hat nagen, Vnd ist mir leichnam hart geschwollen*, ähnlich Fsp. 79, 328—30; Verknüpfung durch *sondern* z. B. FS. 323, 83—4: *Wan er stůnd nit fest auf dem tach, Sunder abheng gar schmal vnd schwach;* — Fsp. 78, 207—8: *Auf das es in der welt pas ste, Vnd sich sanft erner gleich wie e*, vgl. FS. 209, 8—10; 301, 92—3; — FS. 239, 77—8: *In sie kam ein solch forcht vnd graus Vnd flohen alle aus dem haůs*, vgl. 236, 45—7; — Fsp. 3, 214—15: *Bey dir, Reichtumb, hat sie kain platz Vnd schmechst mich doch an allen ortten;* — Fsp. 58, 188—9: *Weil ich pey eůch lieg zv herberg Vnd wolt darob habn kein vnwillen;* — FS. 16, 100—101: *Bin nun bey euch ein viertel jar, List mich noch* (= dennoch) *vngern inn ein pad.*

3. Aus Verbindungen von Haupt- und Nebensatz haben wir nur folgende Beispiele dieser Erscheinung: Fsp. 1, 182—3 [ist bei Paul Pr. S. 267 (letztes Beispiel) citiert]; FS. 329, 22—3: *Thet vor dem pild sich hart pesorgen, Wůrt in vor dem kaiser dargeben.*

4. In Sätzen, die nicht in direkter Beziehung zu einander stehen, kommt die Erscheinung vor z. B. FS. 17, 27—8: *Iunckherr, ich hab an euch ein bitt (Ich hoff, wert mirs versagen nit);* Fsp. 1, 77—80: *wo die lieb ein bricht In ein hertz, darnach sie durch ficht, Bisz das sie vberwindet gantz Vnd schlecht* (sc. das Herz) *leib, ehr vnd gut in schantz.*

§ 17. Wie im Mhd. (s. Paul Gr. a. a. O.; aus Luther finden wir bei Wunderlich und Franke keine Belege) findet sich auch bei Hans Sachs die statt eines Pronominalkasus fungierende Partikel *da* als Vertreter eines Subjektpron. gebraucht, und zwar entweder für sich, oder in Verbindungen wie *daraus, darin, daran* etc. Doch ist die Erscheinung ziemlich selten. Da nun die Partikel bei Hans Sachs sowohl demonstr. als relat. Bedeutung hat, kann sie sowohl demonstr. resp. persönl. als auch relat. Pronomina vertreten. Bei der gänzlich freien Wortstellung des Dichters lassen sich die Fälle ersterer Art nicht immer sicher von den letzteren unterscheiden. Wir haben nur folgende Stellen beobachtet, welche der ersteren Art angehören können. FS. 153, 86—90: *Warůmb fůerchstw nit deinen got, Der fuelerey verpoten hat, Weil daraus kůmbt vil uebeldat, . . ., Vnd* (sie) *ist ain rechtes ziechpflaster* ist die demonstrative Bedeutung der Partikel unzweifelhaft. Ebenso FS. 154,

41—4: *Nach dem der altreůs stecz nach son, Wie er das gelt mocht legen on, Das er nicht mit der zeit drůmb kům, Sunder* (es) *sich meret.* Unsicher scheint uns die Bedeutung der Partikel Fsp. 76, 307—11: *was zeichstw mich . . ., Das dw mich . . . treibest aus Von diesem woluestigen haus? Darin ich sicz in stiller rw,* (es) *Ist nach meim wolgfalln ghrůestet zv.* Jedenfalls fassen wir aber den Satz *Ist . . . grůestet* als demonstrativ auf; denn wenn man auch die Partikel *Darin* als Relativum nimmt, so ist doch anzunehmen, dass hier ein Übergang aus relat. in demonstr. Konstruktion stattgefunden hat, eine Anakoluthie, für welche wir im zweiten Teile unserer Untersuchung zahlreiche Beispiele anführen werden. Einen ähnlichen Übergang nehmen wir an Fsp. 44, 9—14: *Nun seyen wir in Grecia, in der mechting Stadt Athena, Welche Stadt ist der Weiszheit stuel, Da die Philosophi jr Schuel Halten vnd* (sie) *ist in aller Welt die . . . fürtrefflígst gemelt.* Wo die Partikel *da* sonst noch als Vertreter eines Subjektpronomens auftritt, scheint sie uns ein relat. Pron. zu vertreten, und wir verzeichnen daher die Stellen in Zusammenhang mit den übrigen Ersparungen dieser Pronomina, unten § 25, *4.*

§ 18. Wir haben oben (§ 8) gesehen, dass die persönlichen Subjektpron. des Plurals von zwei Subjekten im Singular vertreten sein können. Hier sind nun eine Reihe von Fällen anzuführen, in denen zwei verschiedenartige Satzteile zusammen jene Subjektpron. vertreten. Die Erscheinung findet sich bei Hans Sachs oft

1. Bei asyndetischer Anreihung des Satzes, wo das Pron. erspart ist, z. B. FS. 245, 59—61: *Der man ain nachtpawrn zu im nam Vnd zv der schlangen hőlen kam,* (sie) *Gaben ir ain gelaid heraůs,* ähnlich 177, 117—19; vgl. FS. 273, 66—7: *Einer nach dem andren auff fuhr, Wolten den Sprecher da türengeln,* ähnlich 275, 24—30; 293, 59—62; vgl. Fsp. 66, 164—6: *Sie thet sich psinnen vnd an rőtten Vnd warff im den korb wider dar. Kamen zw leczt zw straichen gar;* — FS. 230, 57—9: *kent ir mich nechten nit, Als ich zw eůch pin kůmen mit der můmerey?* (wir) *Waren verpůeczt . . .*, ähnlich Fsp. 61, 330—32; vgl. Fsp. 37, 148—9: *Ich thu dir für die würst ein knotn. Habn erst vor acht tagn die saw gschlagn,* ähnlich Fsp. 65, 62—3; 76, 176—8; — Fsp. 73, 267—9: *Dw sorgst für dich, . . ., der gleich füer die gespillen dein, Wolt viller mender frawen sein.*

2. Seltener bei syndetischer Verknüpfung der Sätze, z. B. FS. 287, 77—9: *Der Iunckherr . . ., mit faul Fritzen zu Tische sasz, Vnd namen auch das Nachtmal ein,* ähnlich FS. 247, 81—86; Fsp. 1, 137—9 und 260—263 (beide Stellen citiert bei Paul Pr. S. 268); Fsp. 57, 249—50; — Fsp.

12, 278—9: *So schmicz ich den mit dellern zw ir, Vnd reissen auch oft aneinander*, vgl. Fsp. 54, 271—5; — hierher gehört wohl auch Fsp. 4, 352—3: *Mit meinem Mann du frist vnd seuffst Vnd lest mich armes Weib dormaulen*, wo *lest* wahrscheinlich statt *lasst* steht.

c. Dritte Hauptgruppe.

§ 19. Diese bildet den Gegensatz zu den beiden ersten. Während in diesen das ersparte Pron. entweder durch ein Subj. oder durch ein anderes Satzglied mit mehrfacher Beziehung vertreten war, bleibt in den Fällen der dritten Hauptgruppe das Pron. ohne vorhergehende Vertretung unausgedrückt, weil es selbstverständlich ist, aus dem Zusammenhange, aus der Situation wenigstens für den Dichter deutlich genug hervorgeht.

§ 20. Leichter als die übrigen Personen scheint die erste das Subjektpron. entbehren zu können und öfter als die übrigen Pron. bleibt bei Hans Sachs wie bei Luther (s. Wunderlich Luther Pr. S. 11) *ich* in der oben bezeichneten Weise unausgedrückt. So z. B. FS. 174, b. 15—16: *Pit, wolst zv vns schaffen schwind Etlich aús deinem hoff gesind*, bei *bitte* noch oft; FS. 86, 117: *Wais wol, welch nachpewrin ir meint*, ähnlich z. B. 290, 116; — 338, 78: *Hoff, wer nicht drümb des dewffels sein;* 313, 154: *Wolt nit, das ich das halbes het*[1]); Fsp. 72, 241: *Wil euch hernach wol zaigen on, Was ich mer zw der wesch mús hon* (ähnliche „formelhafte" Ausdrücke belegt für das Frühnhd. im Allg. Erdmann S. 5, für Luther Wunderlich a. a. O. S. 12). Ferner vgl. Fs. 327, 32: *Hab dir vil drueppel dinst gethon* ähnlich ib. V. 36; Fsp. 27, 337: *Nem* (= nähme) *noch vier Thalr, wer mir on schaden;* 71, 245: *Mús schawen, ob ich Solonem Durch list kúnt obliegen.* Dagegen gehört wohl nicht hierher Fsp. 18, 138: *Ach lieber Nachbaur, thús* (= ich thue) *nit gern*, denn das hier fehlende Pron. steht schon V. 133 als Subjekt. Auch bei den zuerst angeführten sogenannten formelhaften Ausdrücken ist die Setzung des Pron. keineswegs ausgeschlossen; oft steht z. B. *ich* bei *bitte* und in einem Falle wie 174, b. 26: *Hoff, pitlich werst vns des gewern* ist wohl das Pron. durch *mir* V. 23 vertreten; auch bei den übrigen Ausdrücken findet oft eine Vertretung des Pron. statt; vgl. z. B. Fsp. 18, 121—4; 20, 275—82; 235, 30—32; 298, 138—42.

[1]) Die Interpunktion von Goetze ist hier nicht sinngemäss. V. 153—4 sind offenbar als Parenthese aufzufassen und zu bezeichnen. Nach V. 152 keine stärkere Interpunktion als Komma.

§ 21. Das Pron. der *1. Pers. Plur.* scheint aus der Situation zu entnehmen zu sein Fsp. 66, 149, wo der mit seiner Frau zu Tisch sitzende Herr seinem hereintretenden Knecht, der lange auf sich hat warten lassen, u. a. sagt: *Sint vast ein stund zw disch gesessen.* Ferner Fsp. 21, 78, wo die Frau ihrem Manne zuruft: *Komb! wôllen des Han fûdern suchen.* Ähnlich ist Fsp. 70, 165: *Kumbt! wôllen zv dem stock vns nehen;* die Worte bilden, nach modernen Begriffen, den Anfang eines neuen Aufzuges, und daher ist wohl eine Vertretung des Pron. durch das *wir* im V. 164 nicht annehmbar (die 1. Pers. Plur. *wollen* auch bei Luther oft ohne Subjektpron., s. Wunderlich, a. a. O.). Sonst ist bei *wollen* das fehlende Pron. öfter im Vorhergehenden vertreten; z. B. Fsp. 32, 357—8; 39, 208—12; 75, 202—5.

§ 22. Wir haben oben bemerkt, dass die zur ersten Hauptgruppe gehörenden Ersparungen des Pron. der 2. Pers. Sing. bei Hans Sachs selten sind. Noch mehr gilt dies für die Ersparungen der dritten Gruppe (ähnlich scheint es sich bei Luther zu verhalten, s. Wunderlich, a. a. O., S. 12). Unsicher sind Fälle wie Fsp. 85, 450: *Hast mich doch selbert haisen reden*, da *hast* = hast᷑, hastu sein kann. Ausserdem gehört hierher, wenn wir nichts übersehen haben, nur FS. 144, 237—8: *Ich maint, wuerst die landzknecht erheben Mit lob.* Sonst ist in ähnlichen Fällen die angeredete Person im Vorhergehenden irgendwie bezeichnet, entweder durch das Pron. selbst, sei es im Nominativ, sei es in einem obl. Kasus (s. z. B. Fsp. 15, 193—200; 49, 181—2; FS. 174, b. 1 ff., c. 10 ff.), oder durch ein Subst., wie z. B. FS. 139, 43 (= 335, 85): *Münich, vns zum dewffel dreibst*, welches das Pron. leichter entbehrlich macht.

§ 23. Vereinzelt sind auch die Stellen, wo das Pron. der 2. Pers. Plur. als aus der Situation hervorgehend erspart wird. Dies scheint der Fall zu sein Fsp. 73, 239—41, wo auf die Frage des Manlius: *Sol wir euch weibern rechnûng geben Vber vnser gsecz vnd statût?* Hortensia antwortet: *Ia,* (ihr) *macht alle ding wol vnd guet, Doch wôl wir sein vnûeberladen.* Ferner gehört wohl hierher FS. 47, 25—6, wo der Dichter, nachdem er die Fabel erzählt hat, die Leser so anredet: *Ausz dieser fabel solt verstan Bey der ameisz ein jungen man* (obs.! das Fehlen des Pron. bei Inversion). Nur für sich betrachtet wäre wohl die Stelle am einfachsten durch die Annahme zu erklären, dass *solt* = soltu = sollst du sei (vgl. oben § 1, *5)*). Beachtet man aber, dass der Dichter V. 37: *Zum andern versteht bey dem grillen Ein jungen man voller mutwillen* die Anrede in der 2. Pers. Plur. wieder aufnimmt,

so wird es wahrscheinlicher, dass er auch zu *solt* sich ein *ihr* als Subj. gedacht, dies aber wie beim Imperativ ausgelassen hat, weil ein *solt verstan* der Bedeutung nach einem Imperativ, einem *versteht* gleich ist. — Unsicher bleibt es uns, wie die Stelle Fsp. 85, 437 zu erklären sei. Esopus hat V. 418 ff. die Frau des Xantus arg verhöhnt und verspottet. Nachdem er aufgehört hat, ruft jene aus: *Schaw, wie dreipt so gros spot vnd dant!* (Inversion!). An wen sie die Worte richtet, ist nicht angegeben. Am nächsten würde es liegen, zu *dreipt* ein *er* (= Esopus) als Subj. zu denken; doch kennen wir keine andere Stelle, wo *er* in analoger Weise erspart wäre. Auch könnte man sich denken, dass *dreipt* = dreipst = treibst du gesetzt sei, wie z. B. wilt = wiltu = willst du stehen kann; doch kennen wir auch hierzu bei den starken Verben keine Analogie bei Hans Sachs. Bemerkenswert scheint uns nun, dass die Frau, wie ihre Worte V. 393 ff. beweisen, ihren Mann für den eigentlichen Anstifter des ganzen Zankes und Esopus für sein Werkzeug hält und meint, es sei ihr Mann, der durch den Mund des Esopus spricht. Deshalb möchten wir glauben, dass sie mit *dreipt* V. 437 die beiden Männer meint, dann V. 438 f. dem Esopus, V. 440 ihrem Manne spricht. Wir hätten also, wenn unsere Annahme richtig ist, hier eine Ersparung von *ihr*, die den beiden vorher angeführten analog wäre. — Leichter als an den obigen Stellen ist *ihr* als Subj. entbehrlich Fsp. 58, 38—41: *Vnd het nur ain par daler ich, . . ., vnd list mich darnach kochen, Ich wolt im frey sein gawl abschwaisen*, weil die angeredete Person vorher (V. 34: *Gnediger herr*) angegeben ist. Endlich sind hier noch anzuführen Wendungen wie Fsp. 73, 324—5: *An ain senat ist vnser pit, Wolt vns frawen verargen nit, das* etc. (Die angeredete Person ist ein Senator).

§ 24. In diesem Zusammenhange seien noch einige Stellen erwähnt, an denen das Fehlen des Subjektwortes dritter Person bemerkenswert scheint. Im Fsp. 39 wird von zwei Handwerksgesellen erzählt, die in dem Hause eines Bürgers jeder sein Liebchen hatten. Wenn es nun V. 19 ff. heisst: *Das doch jren Meister vertrosz Vnd böse rigel vnter schosz Sambt seinem Weyb, solch Lieb zu wenden: Den gsellen sie beid Iungfraw schenden, Dergleich beidt gsellen wiederumb Schendet vor den Iungfrawen frumb*, so bleibt unklar, ob bei *Schendet* als Subj. *er* oder *sie* gemeint sei. Da der Meister überhaupt als Hauptperson eingeführt ist, so ist das erstere wahrscheinlicher; es kommt hinzu dass *er* schon vorher (bei *schosz*) als Subj. zwar nicht gesetzt, aber doch zu denken ist und wohl deshalb bei *Schendet* nicht ausgedrückt wird. — Eine zweite hierher gehörige Stelle, die der ersten wenigstens bis zu einem gewissen

Grade analog ist, findet sich FS. 287, wo von einem Edelmann und seinem Knecht erzählt wird, dass sie auf einer Reise in einem Wirtshause übernachteten und dabei bis in den hellen Tag hinein schliefen. Es heisst weiter V. 135 ff.: *So stundens auff, sassen zu Tisch, Assen das Frůmal gsund vnd frisch. Darnach mit dem Wirt rechnen thet.* Aus der Situation geht klar genug hervor, dass bei *thet* die Hauptperson, der Edelmann Subj. ist, und als selbstverständlich ist das Subj. unbezeichnet geblieben, obgleich hier das persönl. Pron., weil seine Beziehung nicht klar wäre, als Subjekt nicht genügt hätte, sondern das Subst. hätte gesetzt werden müssen. — Eine ähnliche Unterlassung der Subjektbezeichnung findet sich noch FS. 342. Der Schwanck fängt so an: *Průeder Iohann Paůli der schrieb Das puech schimpf vnd ernst, ... Darinen so thuet er gedencken, wie* etc. Es folgt die Geschichte, wie in Rom die Leute, welche des Ehebruchs oder des Diebstahls verdächtig waren, vor einem vom Künstler *Filliůs* gemachten steinernen Löwen, in dessen Rachen sie die Hand stossen mussten, ihre Unschuld mit einem Eid betheuern konnten. Wenn jemand, heisst es weiter, einen falschen Eid schwur (V. 26 ff.): *Zv stůnd ist im abissen worn Sein rechte hant ... Von disen staines leben rachen Vnd det das mensch zv schanden machen* (Subj. zu *det* ist *der Löwe*). Wenn man nun weiter liest (31 f.): *Duet hernach von aim kaiser sagen, Pey dem hab sich ein sach zv tragen* etc., so ist klar, dass das Subj. von *det* nicht mehr bei *Duet* gelten kann, sondern ein Subjektwechsel eingetreten ist. Das neue Subj. ist aber auch nicht ausgedrückt, sondern der Dichter muthet es dem Leser zu, er werde es aus dem Zusammenhange ersehen, dass bei *Duet* als Subjekt *Iohann Paůli* zu verstehen sei. Und dem aufmerksamen Leser wird das auch keine Schwierigkeiten machen. — Noch kühner und auffallender als der eben besprochene Fall ist eine Auslassung des Subjektwortes, die FS. 383 vorkommt. Es ist von einem Kauffmann die Rede, der nach Frankfurt segeln wollte und dort seinen Nachbarn dem einen dies, dem andern das einkaufen sollte. Jeder Nachbar hatte seinen Wunsch auf einen *denckzettel* geschrieben, niemand hatte aber an das zu den Einkäufen nöthige Geld gedacht. Nur ein Schäfer, dem der Kauffmann eine Sackpfeife bringen sollte, hatte diesem einen Thaler mitgegeben. In Frankfurt angelangt, lud der Kauffmann all seine Waaren aus und legte die Zettel darauf. Nun heisst es weiter (V. 31 ff.): *Ins schiff da kam ein starcker wind Vnd warff sein denckzettel geschwind ... all in den Main. Plieb liegen in dem schiff allain, Wan er het den daler drauf gelegt.* Dass hier bei *Plieb liegen* als Subjekt *des Schäfers Denckzettel* gemeint sei, ist auf den ersten Blick nicht klar, da es im Vorhergehenden in keinerlei Weise angedeutet ist. Die Ergänzung des Subjekts

aus dem Zusammenhange wird erst durch das Folgende erleichtert, besonders durch die Verse 36—38, wo es heisst: *Des plieb der zettel vnpewegt. Drúmb er die sackpfewff kaúfen was, Der andern aller zettl vergas.*

Nur eine Stelle haben wir bemerkt, wo das Subjektwort 3. Pers. Pluralis aus der Situation zu entnehmen ist. Sie findet sich FS. 266, wo erzählt wird, wie der Bauernknecht zweimal in den Brunnen fiel. Nachdem beschrieben worden ist, wie er zum zweiten Mal hinaufgezogen wurde, heisst es V. 89—90: *Lainten in an die sunen hin, Liesen wider vertropfen in.* Als Subjekt zu *Lainten* wird aus dem Zusammenhange das herbeigeeilte Volk verstanden, um so leichter, als schon im Vorhergehenden bei der in V. 45 ff. beschriebenen ganz ähnlichen Situation mit Bezug auf das V. 43 genannte Volk gesagt ist (V. 48 ff.): *Da halff trewlich darzv ain yder, Zogen den Dôtschen wider raús, . . ., Lainten in an des prúnen sewln.*

2. Ersparungen eines relativen Subjektpronomens.

§ 25. Diese Ersparungen finden unter ganz analogen Bedingungen statt wie diejenigen Ersparungen der persönl. Pron., welche wir oben in der zweiten Hauptgruppe kennen gelernt haben; sie kommen aber nur bei koordinierten Relativsätzen vor. In dem letzteren von zwei koordinierten Relativsätzen kann das Pron. als Subj. erspart werden, wenn es von einem im ersteren stehenden obl. Kasus (dieselbe Erscheinung im Mhd., s. Paul Gr. § 345, Anm. 3; einige moderne Beispiele finden sich bei Matthias. S. 278) oder Adv. vertreten ist. Die Ersparung trifft sowohl die verallgemeinernden Relativa als das aus dem Demonstrativum entstandene. Der vertretende oblique Kasus ist

1. Ein Akkusativ, z. B. FS. 226, 94—5: *Wen woluest also ueberwindet,* (wer) *Vermaint, das pest leben zu sein, Der vergleicht sich dem faisten schwein;* 233, 30—34: *Weil deinem edlen stein nach steln Mancherley jeger dieser zeit Welche all reit die geiczikeit, Stellen dir so lang nach zv lecz, Pis sie dich pringen in ir necz* (hier vielleicht Punkt vor *Stellen;* dann würde der Fall unter § 10 gehören). Bei Verknüpfung der Sätze durch *und* FS. 228, 57—8: *Welch armen aber hoffart reit Vnd sich zv gselet seiner zeit Den reich gwaltigen* etc. Nach der Interpunktion von Goetze würde wohl hierher gehören FS. 331, 130—133: *(die lewt) So fuerwicz sind, die hoch erfrewt, So sie was news hôrn, pos oder gůet, Des glaubens, als hetz sin vnd můet, Vnd faren den nach vnpesůnen.* Nun sind doch wohl die Worte *Des*

glaubens nicht etwa als Genitiv Sing. des Subst. zu fassen, was keinen guten Sinn geben würde, sondern sie geben wohl den Satz *das glauben sie* nach der mundartlichen Aussprache des Hans Sachs wieder. Mit diesen Worten beginnt also wohl ein neuer, selbständiger Satz, und nach *güet* muss wohl ein Punkt gesetzt werden. So gefasst, enthält die Stelle keinerlei Anomalie und gehört also nicht hierher.

2. Von einem Dativ ist das ersparte Pron. vertreten FS. 283, 105—6: *Wem wol ist mit der Schlemmerey, Schawt auff sein handel nicht darbey, . . .* (Nachsatz erst V. 113); 307, 152—3: *(solch hader kaczen) Den wol ist mit krelen vnd kraczen, Ein ide sach wollen ferfechten*, vgl. noch 359, 35—6; — FS. 244, 97—101: *(ein mon) Welchem sein guet . . . Ist zvgefallen durch gros glueck . . ., Vnd siczet . . . In seinem grosen hab vnd güet* (das Semikolon der Ausgabe vor *und* ist entweder in Komma zu verändern, oder zu tilgen); Fsp. 7, 100—102: *Das wird mit Tandalo bewisen, Dem die öpffel hingen für dem mund Vnd jr doch nicht geniessen kund.*

3. Für die Erscheinung, dass der obl. Kasus, welcher das ersparte Pron. vertritt, von einer Präposition abhängig ist, steht uns bei den Ersparungen der Relativa nur ein Beleg zu Verfügung, und auch der scheint uns nicht notwendig hierher gehören zu müssen. Die Sätze sind durch *oder* koordiniert. Die Stelle ist FS. 326, 76—85: *Pey welchen kremern man finden thet Ein leicht gewicht, zv kürcze elen, . . ., Oder* (welcher kremer) *het pös vngrechte war, . . ., Den thet man vor dem Römer abhawen An dem klain finger das erst glied.* Beachtenswert ist der Übergang aus dem Plural in den Singular und zurück in den Plural. Dass die Stelle in der bezeichneten Weise aufgefasst werden kann, scheint uns wohl möglich. Möglich ist aber auch, dass wir hier einen Übergang aus relativer Konstruktion in demonstrative resp. persönliche [*oder* vielleicht = oder er, vgl. oben § 1, *1)*] anzunehmen haben, wie sie bei Hans Sachs nicht selten sind.

4. Die statt eines Pronominalkasus fungierende Relativpartikel *da* in Verbindung mit einem adverbialen *an* vertritt das Pron. Fsp. 85, 420—425: *Dw wolst zům knecht ain jůngeling, . . ., Daran dw deinen luest mochst sehen, Vnd hůelff auch seinen herren schmehen* (= der auch . . . hülfe) und FS. 7, 334—7: *(wie we ist einem man) Den Gott plagt mit eym solchen weyb, Da weder zucht noch straff hilfft an, Sunder tracht nůr, wie yhrem man Ein vnglück . . . wachs* (= die nur trachtet). Die Möglichkeit, die Partikel demonstrativ aufzufassen, ist hier nicht ganz ausgeschlossen (vgl. oben § 17).

3. Ersparungen eines indefiniten Subjektpronomens.

§ 26. Die Erscheinung ist sehr selten. Einmal findet sich *man* als gemeinsames Subj. eines regierenden und eines abhängigen Satzes in dem letzteren erspart: Fsp. 35, 99: *Wenn man meindt, hab zu lang gehart* (vgl. § 9). Gleichfalls einmal ist in dem letzteren von zwei koordinierten Sätzen ein indefinites Subjektpron. von einem Dativ im ersteren vertreten: FS. 76, 46—7: *O, wie manchem das hercz entpfál Vnd* (wie mancher) *zittert wie ein espen laůb!* (vgl. § 13, 2.).

4. Ersparungen der Neutralform es.

Die Neutralform *es* kann in zweierlei Weise als Subjekt verwendet werden: 1:o mit bestimmter Beziehung auf einen durch ein Substantivum, ein substantivisches Wort oder einen Satz bezeichneten Begriff, und 2:o ohne bestimmte Beziehung, als formales Subjekt, entweder bei den unpersönlichen Verben oder bei den persönlichen zur Vorwegnahme des eigentlichen Subjektes. Nach diesen Verwendungsarten des Pronomens lassen sich auch die Ersparungen desselben in zwei Hauptgruppen einteilen.

§ 27. In beiden Hauptgruppen kommen aber bei Hans Sachs Fälle vor, wo das Fehlen des Pronomens vielleicht nur scheinbar ist und phonetisch erklärt werden kann. Über die Fälle dieser Art schicken wir deshalb hier eine kurze Bemerkung voraus, ehe wir zur Besprechung der eigentlichen Ersparungen übergehen. Bei metrischem Bedürfnis konnte das Pronomen *es* nach der mundartlichen Aussprache zu *'s* abgekürzt und in dieser Form einem Worte angehängt werden. Bei auslautendem *s* konnte daher das Pronomen leicht mit diesem zusammenschmelzen. Dies scheint uns geschehen zu sein z. B. FS. 7, 212: *ich glaub, das also sey;* 349, 53: (der pawer) *schlueg den schultheis in das mawl, Das patscht;* Fsp. 9, 40: *Ich merck, das gut Stallbrůder sein*, nach *dass* noch z. B. FS. 281, 106; 326, 43; — vgl. FS. 379, 36: *als nun lawt schnawden thet*, nach *als* noch z. B. FS. 201, 79; — vgl. 310, 115: *Pis doch zv lecz ainem gelang.* Ähnliche Beispiele bringt aus Luthers Sprache Wunderlich, Luther Pr. S. 31. Eine auf analogen Gründen beruhende Verschmelzung des Pronomens mit einem nachfolgenden anlautenden *s* kann wohl in Fällen angenommen werden wie z. B. Fsp. 10, 72: *Sol wol der Teuffel selber sein;* FS. 213, 89: *Ich sprach: „Sag her! sey, was es wôll!“*

§ 28. Wir kommen jetzt zu der ersten Hauptgruppe derjenigen Ersparungen des neutralen Subjektpronomens, bei denen an phonetische Einflüsse nicht zu denken ist.

Wie die persönlichen Subjektpronomina, kann bei Hans Sachs auch die Neutralform *es* durch einfache Setzung eines mit mehrfacher Beziehung gebrauchten Satzteiles in manchen Fällen erspart werden, wo sie bei vollständigem Ausdruck stehen müsste und z. B. heutzutage nicht mehr entbehrlich ist.

1. Selten sind die Fälle, in denen jener das ersparte *es* vertretende Satzteil ein mehreren Verben gemeinsames Subjekt ist. Wir haben nur Beispiele, wo als Verbum des Satzes die Kopula auftritt und das Prädikat ein Substantivum ist: FS. 241, 12—14: *Wer in sein můel zv malen kam, War gleich ein pawer oder peck, So grieff er in zv dieff int seck* (gewöhnlich wird in analogen Fällen das *es* ausgedrückt, z. B. 342, 28: *Es sey gewest man oder weib* und oft; hier ist es durch *wer* vertreten), vgl. Fsp. 84, 352—5: *ich sich dort . . . Ein man, der schewcht des mones glinster. Der auf sein schultern thuet was tragen. Ist der kawfmon, von dem thuest sagen.*

2. Von einem Akkusativ ist das in Sätzen der oben angedeuteten Art ersparte *es* vertreten z. B. FS. 1, 63—4: *Die letzt schwartz ich nicht nennen kan, Ist die ich auszgenummen han;* FS. 13, 68—71: *Es war ein traum vnd fantasey, Geleich als wol als mit den Weiben, Die solche schwartze kunst sind treiben. Ist doch lauter betrug vnd lůgen;* Fsp. 9, 45—7: *Darmit sol ich mein Pfarr verwesen Mit singen, Predigen vnd Lesen, Vnd ist vorhin ein arme Pfarr;* FS. 50, 9—10: *Sein vortrab schickt er vnterwegen; War nebel, wint vnd kalter regen.* Nur scheinbar (vgl. oben § 27) ist vielleicht das Fehlen des *es* in einem Falle wie FS. 86, 204—5: *Ey, legt etwas auf den sewmarck; Sey leylach, schlayer odèr stawchen.* Ausser in Sätzen dieser Art findet sich noch ein Akkusativ als Vertreter des ersparten *es* FS. 318, 176—8: *Das reich gottes das kůmet nicht Mit auf mercken, das man es sech Vnd durch vil gleissnerey geschech* (das *es* bezieht sich auf den Inhalt des Hauptsatzes, auf das Kommen; der Akkusativ *es* vertritt den Nominativ; ähnliche Fälle kommen auch bei Luther vor, s. Wunderlich, a. a. O. S. 31; ein hierher gehöriges, Goethe entnommenes Beispiel steht bei Matthias S. 277).

3. Auch ein von einer Präposition abhängiger obliquer Kasus kann das ersparte *es* vertreten. In einem Satze von der oben unter *1.* angegebenen Art ist dies der Fall FS. 342, 31—5: *(Iohann Paůli) Duet hernach von aim kaiser sagen, . . ., Das er hab gehabt ein efrawen, Der hab er auch nit wol thůn trawen. Ist vileicht Iulůs gewesen.* Ausserdem z. B. 362,

123—6: *Das die ersten mit Kunst, Die andern mit ernst — war vmbsonst! — Nicht mochten von dem Ritter bringen, Das thet durch sein einfalt gelingen,* wohl auch 259, 129—30: *Das aus keim schimpff kein ernst erwachs, Sünder schimpf pleib, so spricht Hans Sachs,* wenn nicht vielleicht das scheinbar fehlende *es,* das sich auf den allgemeinen Begriff *Schimpf* bezieht, in dem Anlaute von *schimpf* steckt. Dieselbe Funktion wie ein obliquer Kasus kann das Pronominaladverb *da* haben; vgl. z. B. FS. 196, 185—9: *Welch herschaft nicht gern essen sicht, Der selben dest wuerser geschicht; Knecht vnd maid wern vertrosn darfon; . . .;* (es) *Dúet die ehalten auch vertreiben;* FS. 147, 21—2: *Darzw der fuerst sach durch die prillen. Vnd* (es) *ging gancz nach des dewffels willen;* Fsp. 43, 235—8: (Leonetta:) *verzeycht mir, dasz Ich euch hie vberlauffen was; Die grosse not mich darzu trieb.* (Landolph:) *Du hast recht than, vnd* (es) *ist mir lieb.*

4. Aus einem ganzen Satze ist das ersparte *es* zu entnehmen in einem Falle wie FS. 351, 28—30: *(er) pat da seinen jüngen gfatern, Solt im seinen grimen zorn geben. Der gfater sprach: „Ist mir nit eben"!* (das zum vollen Ausdruck gehörige *es* würde sich hier auf den Inhalt des Satzes *Solt — geben* beziehen); vgl. FS. 119, 8—10: *(Er) pat seinen gefatern, Sein zoren im zw geben. Der sprach: „Ist mir nit eben".*

§ 29. In Verbindungen von Hauptsatz und Subjektnebensatz kann bei Hans Sachs, ebenso wie im Ahd. und Mhd. (s. Erdmann § 6) und bei Luther (s. Wunderlich a. a. O.), ein auf den Subjektsatz hinweisendes *es* vor dem Verbum des Hauptsatzes erspart werden, ohne dass es durch ein Wort vertreten wäre. Der Nebensatz kann entweder ein *dass*-Satz sein oder ein Nebensatz anderer Art, der die Rolle eines Subjektsatzes übernommen hat. Er kann dem Verbum, bei dem *es* erspart ist, vorangehen, z B. FS. 153, 122—3: *Ob dw gleich einen drúnck nachlast, Ist dir kain schant;* Fsp. 8, 144: *Leszt* (= du läsest) *in der Iugent, wer das best;* Fsp. 24, 50: *Liesz wirs ansthen, deucht mich am besten;* Fsp. 27, 56: *Erdapp wir jn, ist euch on schaden;* oder er folgt dem Verbum nach, z. B. FS. 35, 45: *Schatt nicht, ob sies auff dich vertriesz;* 242, 62—3: *Vnd sich pegab, Das im die alt thet aber streln* (vgl. unten § 30, *2.*), ähnlich z. B. Fsp. 39, 12—14; — 315, 106—9: *Weil dw . . . Hast das nachtmal vom húnd genúmen, Ist auch pillig, das er ist kúmen . . . in ain sanft . . . pet* (vgl. unten § 30, *1.*); 331, 130—131: *(die lewt) die* (es) *hoch erfrewt, So sie was news hórn;* Fsp. 8, 397: *Iung Mann, not thet, du werest weyser;* ib. 229: *Besser wer, du lebst nach vernunfft,* ähnlich z. B. FS.

370, 7—8; vgl. noch Fsp. 39, 48: *Von nôten sey dir nun zu wandern* etc.; FS. 20, 15: *Nútzer wer uns gar vngeboren.*

§ 30. Zahlreicher als die Fälle der ersten Gruppe sind die der zweiten, die Fälle wo ein ohne bestimmte Beziehung als formales Subjekt fungierendes *es* erspart ist.

1. Wie im Mhd. (s. Paul, Gr. § 197) wird das formale Subjekt auch bei Hans Sachs sehr oft erspart, wenn irgend eine Bestimmung dem Verbum vorangeht, bei dem es stehen sollte. Die Bestimmung kan entweder eine nominale sein oder eine adverbiale. Das *es* fehlt dann nicht nur, wie vielfach auch heutzutage, bei den mit einem obliquen Kasus verbundenen Impersonalien, z. B. FS. 3, 37: *Ietzt thut mir selber misselingen;* FS. 5, 106: *Doch ist mir sicher layd für dich;* FS. 70, 34: *wie wirt mir den sein so wol;* FS. 86, 59: *Wie ist euch den;* Fsp. 75, 363: *Ey, ey, so dawert mich die trawt;* sondern auch bei den übrigen kann es entbehrt werden, vgl. FS. 147, 46: *Da oft erging vnrechter pon,* hierher gehört wohl auch FS. 306, 86—7: *Die all pawen waicz, kern vnd korn, Dinckl vnd habern, wie thůet gepürn.* Die vorangehende Bestimmung kann auch die Form eines Satzes annehmen, z. B. FS. 205, 109—10: *Weil vnůecz seint sein mawl vnd hent, Nimpt auch mit im oft poses ent.* Doch ist bei vorangehender adverbialer Bestimmung das *es* nicht ausgeschlossen vgl. z. B. FS. 77, 94: *Sůnst wirt es in gerewen;* FS. 6, 137: *Dann würdt es basser stehn auff erdt;* ib. 145: *Derhalb geht es, wie es dann geht;* ib. 151: *So geht es auch als lang es mag.* Es ist wohl anzunehmen, dass hier das metrische Bedürfnis bei der Setzung oder Auslassung des formalen Subjektes eine wichtige Rolle spielte.

2. In Übereinstimmung mit dem Sprachgebrauch im Mhd. (s. Paul, a. a. O.) und bei Luther [s. Wunderlich, a. a. O. S. 31 und Franke § 265, 4. c)] fehlt *es* auch sehr häufig in dem letzteren von zwei koordinierten Sätzen nach *und,* sowohl als Vorläufer des eigentlichen Subjektes, z. B. FS. 2, 86—7: *Sie werden an ein ander Strelen Vnd wirt ein grosses schlahen draus,* als in unpersönlichen Sätzen, z. B. FS. 236, 31—2: *Als nůn verging der hal vnd stil wart aller ding,* ähnlich 239, 38—9; vgl. Fsp. 4, 210—11: *(zu letzt) Haben wir auch herwider bissen Vnd* (es) *hat sich also eingerissen.*

3. Aber auch an der Spitze des Satzes wird bei Hans Sachs das formale Subjekt nicht selten erspart. — Dies ist zunächst in vielen unpersönlichen Ausdrücken der Fall, z. B. FS. 258, 100: *(Ich) Dacht: Ist noch vmb ain stůnd zv thon,* dieselbe Wendung noch Fsp. 54, 93 und 59, 207; — vgl. Fsp. 73, 26: *Ist wol ein stůnt ueber die zeit;* ib. 42: *Ist vast ein stund ueber mi-*

tag; FS. 292, 67: *Ist jr doch nicht gar vmb das hertz.* In diesen Fällen ist das verbale Element des Satzes von der Kopula repräsentiert; vor unpersönlichen Verben fehlt das satzeröffnende *es* z. B. Fsp. 32, 132, wo die Frau auf die Frage ihres Mannes: *Wie würs mit vnser Seelen sthen?* die Antwort giebt: *Wirt vns gleych wie den andern gehn;* hierher stellen wir auch FS. 259, 57—60: (Ich sagt) „*Hans, ich wais die milch grůeben wol. Drin stent zwen . . . hefen vol Milch; ich wil gen ainen pringen*“, *Schlich hin also; thet mir gelingen* (vgl. die Interpunktion bei Goetze). Endlich sind hier noch zu erwähnen unpersönliche passivische Ausdrücke wie z. B. FS. 310, 114—15: *Wirt so lang getürniert von allen, Pis . . . .* — Als Vorläufer des eigentlichen Subjektes fehlt das formale Subjekt an der Spitze des Satzes z. B. Fsp. 13, 176: *Ist sunst im closter angst vnd not;* Fsp. 24, 154: *War als* (= alles) *auf heuchlerey geriht;* FS. 198, 109: *Ist gar ein hoher půchel worn* (vgl. z. B. FS. 83, 1: *Es was eins mals ein karger abt*; 87, 1—2: *Es ging ein camel thier In des waldes refier*).

B. Ersparungen eines Objektpronomens.

Unter ähnlichen Verhältnissen wie ein als Subjekt fungierendes Pronomen wird bei Hans Sachs sehr oft auch ein Objektpronomen erspart.

§ 31. Ehe wir zu den eigentlichen Ersparungen dieser Art übergehen, wollen wir auch hier eine Anzahl von Fällen aussondern, in denen, wie wir glauben, das Fehlen des Pron. nur scheinbar und die Ersparung phonetischen Einflüssen zuzuschreiben ist. Was wir über ähnliche Ersparungen des Subjektpronomens § 1 gesagt haben, gilt auch hier.

1. Als schwachbetont kann der Akkusativ *ihn* bei Hans Sachs, wie oft in der heutigen Umgangssprache, seinen Vokal verlieren und in so abgekürzter Form einem Worte angehängt werden. So z. B. FS. 271, 70: *Dern* (= der ihn) *in seiner paurn kappen kent;* vgl. Fsp. 85, 49. Bei auslautendem *-n* kann das Pron. daher mit diesem zusammenschmelzen und unbezeichnet bleiben. Die Fälle, in denen Hans Sachs dieses Mittel eine Silbe im Verse zu ersparen benutzt zu haben scheint, sind recht zahlreich. Wir citieren nur einige: Fs. 180, 30: *Die muecken irrten an der dillen;* 183, 111: *Was man wil vnterweisen lang,* nach *man* noch z. B. 218, 201; 326, 61, 64; 352, 110; — 200, 62: *Vnd stiessen oben vnters dach;* 279, 88: *Hencken den an ein langen strick;*

ib. 90: *Vnd lassen die Nacht hencken dausz*, vgl. noch 218, 196; 254, 65; 330, 68; Fsp. 74, 257. Dass das Pron. in einem anlautenden *n* mitenthalten ist, scheint uns nur an einer Stelle anzunehmen zu sein: Fsp. 74, 377: *Můeter, hilff nider drueckn mit gwalt.*

2. Die Akkusative *sie* und *es* können, wie die entsprechenden Nominative [s. § 1, *2), 3);* § 27], bei metrischem Bedürfnis zu *s* abgekürzt werden und mit einem auslautenden *-s* zusammenfallen. Bei der Singularform *sie* scheint dies geschehen zu sein z. B. FS. 242, 37: *Lies im haus vmgen frue vnd spat;* 245, 48: *Als der man sach mit vngedüld;* 267, 72: *Man můes int schelmen grueben graben;* Fsp. 4, 429: *Lasz in ein finster kammer sperren.* Bei der Pluralform *sie* z. B. FS. 7, 138: *Gůnt yn kaum, dasz die Sonn bescheint;* 200, 13: *Das den nimant versůnen kon;* 320, 112: *Sint fro, das sein dot hat erledigt*, nach *dass* noch z. B. 364, 68. Der Akkusativ *es* scheint in einem auslautenden *-s* zu stecken z. B. FS. 293, 53: *Gib vns, wir dürffen sein am basten;* Fsp. 39, 41: . . . *Als sein Eltern hôrten*, nach *als* noch z. B. FS. 251, 79; — vgl. Fsp. 58, 181: *Peicht was dw wilt, ich mus verschweigen;* Fsp. 85, 581: *Sag, was sie wôll, ich las geschehen:* Fsp. 1, 277: *wo es* (= es 's, es es) *zu wegen bringen kan*, ähnlich z. B. FS. 329, 73; 364, 17; in einem anlautenden *s-* FS. 251, 82: *Als der sach . . ., Schlueg er* etc.

§ 32. In den eigentlichen Ersparungen eines Objektpronomens, bei denen keine phonetischen Faktoren in Betracht kommen, unterscheiden wir nun wieder zwei Hauptgruppen, je nachdem das ersparte Pronomen im Vorhergehenden irgendwie vertreten ist oder nicht. Die erste Hauptgruppe zerfällt wieder in zwei kleinere. Das Wort, von dem das ersparte Pronomen vertreten wird, kann nämlich in seinem Satze entweder Objekt sein, oder eine andere Funktion haben.

1. Erste Hauptgruppe.

§ 33. Sehr oft begegnet man bei Hans Sachs der Erscheinung, dass ein zu zwei (oder mehreren) Verben gehöriges Objekt nur bei dem ersten gesetzt, bei den übrigen dagegen erspart, nicht wiederaufgenommen wird. Unter ganz bestimmten Umständen ist eine derartige einfache Setzung des Objektes allgemein sprachüblich und auch in der heutigen Sprache gebräuchlich. So z. B. in zwei gleichgebauten Gliedern eines Nebensatzes (z. B. als er sein Geld verlor und trotz aller Bemühungen nicht wiederfand, war er untröstlich); namentlich wird das Relativpronomen als Objekt nur einfach gesetzt (z. B. das

Geld, welches er gestern bekam und heute verlor, . . .). Ferner wird (doch nicht ohne Ausnahme, s. unten *3.*) das Objekt in zwei Gliedern nicht nur eines Nebensatzes sondern auch eines Hauptsatzes in der angegebenen Weise einfach gesetzt, wenn die zwei Glieder auch das Verbum finitum unter sich gemein haben (vgl.: er hat das Geld gestern bekommen und heute verlorn; das Geld will er heute verdienen und morgen verbrauchen; nachdem er mich bemerkt und freundlich begrüsst hatte, . . .). Auf Fälle dieser Art ist aber bei Hans Sachs jene einfache Setzung des Objektes keineswegs beschränkt, sondern sie kommt vielfach auch in Fällen vor, wo sie heutzutage nicht mehr möglich wäre. Am häufigsten findet sie sich in zwei koordinierten Gliedern eines Hauptsatzes, in denen zwei verschiedene Verba finita auftreten.

1. So bei asyndetischer Nebeneinanderstellung der Glieder z. B. FS. 67, 151—3: *Als ich nůn war geflossen gnůeg, Mich wider int werckstůeben zůeg Der ledrer, aůf sein zůegpaum warff;* hierher gehört auch FS. 282, 205—6: *Darumb ich mich auffs gnewst einzeuch, In mein schlosz wie ein schneck verkreuch*, denn das Verbum *verkriechen* wird nur reflexiv gebraucht (s. DWb.; vgl. z. B. Fsp. 25, 70); vgl. ferner FS. 223, 115—16: (der scorpion) *hecht den menschen mit dem schwancz, Pis in den dot vergiftet gancz;* FS. 94, 93—4: *Dem er ein wůrm samen gab, In ainer milch im flőczt hinab;* 334, 130—132: *Darob erzůernet sich der schneider Vnd des herren fueschemel růecket, Mit paiden henden hoch auf zůecket;* vgl. 303, 58—60: *Das erben aller massen Dein Freund, mit vndanck nemen, Verprassen vnd verschlemmen;* 266, 19—20: *Die selben er mit fleis auf hůeb, In půesen in sein kittel schůeb*, ähnlich *sie* erspart z. B. Fsp. 76, 82—5.

2. Nicht selten finden sich derartige Ersparungen eines Objektpronomens auch bei Verknüpfung der Sätze durch *und*, z. B. FS. 69, 23—4: *Frw sie dem han sein hals abschnit, Peraittet in vnd darnach prit;* 119, 31—2: *Nichs minder in der schlueg Vnd pey dem har vmb zueg*, ähnlich noch Fsp. 56, 87—8; vgl. FS. 277, 51—3: *Den* (= den Mönch) *růfft er weynent an den enden Vnd bat mit auffgehaben henden, Barmhertzigkeyt jhm zu erzeygen;* 126, 18—19: *Das krawt er nam vnd warff zw dem fenster hin aůs*, ähnlich 240, 81—2; vgl. 201, 96—8: *Wen die hůnd zv weit von in* (den Schafen) *pleiben, . . . Zv reissen sis* (= sie sie = die Wölfe die Schafe) *vnd grimig fressen.*

Ob ähnliche Fälle wie die hier unter *1.* und *2.* verzeichneten z. B. bei Luther vorkommen, geht aus Wunderlich Luther Pr. und Franke nicht hervor; auch aus dem Mhd. weiss ich keinen Beleg anzuführen.

3. Für das moderne Sprachgefühl anstössig ist auch die einfache Setzung eines Reflexivpronomens, wie sie z. B. in folgenden Fällen vorkommt, obwohl die Glieder des Satzes, denen das Pronomen gemeinsam ist, dasselbe Verbum finitum haben: Fsp. 58, 133—4: *Ich wil mich legen auf die panck Vnd stelen, sam sey ich dot kranck* [vgl. Fsp. 60, 120: (ich wil) *Mich sam dot stelen aller mas*]; Fsp. 71, 345—6: *Des dw dich můst dein lebtag schemen, Vmb in haimlich fressen vnd gremen;* FS. 4, 5—6: *Der musz sich grosser ding vermessen Vnd durch ein Berg mit Hirszbrey essn;* hierher ist wahrscheinlich auch zu stellen Fsp. 63, 271—2: *ich wil mich pücken, Haimlich in diesen pusch nein schmücken*, da das Verbum *schmücken* nach dem DWb. nur sehr selten intransitiv, im Sinne von *sich schmücken* steht (im DWb. sind die citierten Verse als Beleg für das Reflexivum angeführt).

In der modernen Sprache kommt es bei dem Gebrauche eines mehreren Verben gemeinsamen Objektes auch auf die Wortstellung an. Das gemeinsame Glied muss vor den nichtgemeinsamen stehen. Weil diese Forderung nicht erfüllt ist, wäre eine Nichtwiederholung des Objektes wie FS. 153, 13—14: *Er würd mirs nit nemen zv gůet, Sůnder aufahen in vnmůet* heutzutage wohl eine unerlaubte Inkorrektheit (nach dem heutigen Sprachgebrauche müsste es korrekt heissen: er würde es mir nicht . . .). Aus demselben Grunde wäre heutzutage das Objekt beim zweiten Verbum durch ein Pronomen wieder aufzunehmen in einem Falle wie FS. 251, 56—8: *Der lanczknecht dacht im . . . Ein dűeck, wie er wider pekem die wuerffel vnd dem pawren nőm.*

4. Eine noch kühnere Ersparung eines Objektpronomens, als es die bisher besprochenen waren, findet sich FS. 159, 152—4: *Las den glauben dein herze stillen, Das got on vrsach nichsen thw, Sůnder aufs pest, vnd sey zv rw.* Hier ist in auffallender Weise das Objekt in dem letzteren von zwei koordinierten Gliedern des *Dass*-Satzes unausgedrückt geblieben, obgleich das Objekt des ersteren *(nichts)* zu dem letzteren nicht passt, sondern sein Gegensatz *alles* hätte gesetzt werden müssen. Einen ähnlichen Fall bringt aus Luthers Sprache Franke § 331, *5.*

5. Auch ein Infinitiv + *zu* kann bei Hans Sachs mit seinem übergeordneten Verbum das Objekt gemein haben, z. B. FS. 244, 17—18: *Den fasset er aüf seinen rűeck, Haim zv tragen, zv seim vnglűeck*, ähnlich z. B. 352, 42—44; vgl. 218, 112—13: *(Rinűczo) Den dotten aűf sein achsel schwűng, Seiner liebsten frawen zv pringen.* Ähnliche Fälle bei Luther, s. Franke, § 331, *6.* Bei Luther kommt nach Franke § 338, *2.* b) einfache Setzung eines persönlichen Objektpronomens auch in Verbindungen von Hauptsatz und Konjunktionsnebensatz vor. Derartige Fälle haben wir bei Hans Sachs nicht

bemerkt. Aber vergleichen liesse sich vielleicht folgende Stelle: FS. 180, 114—17: *Kan ich mich mit aim krueg allein Vertragen nit in meiner klawsen, Wie het ich den in der cartawsen Mit soůil můnchn kůnen vertragen*, wo die Sätze zwar grammatisch als zwei selbständige Fragen gefasst werden können, logisch aber im Verhältnis von Voraussetzung und Folge zu einander stehen.

§ 34. Wir kommen jetzt zu denjenigen Ersparungen der ersten Hauptgruppe, bei denen der Vertreter des ersparten Objektpron. in seinem Satze nicht Objekt ist, sondern eine andere Funktion hat. Paul Pr. S. 268 führt aus dem Lateinischen ein Beispiel dafür an, dass ein Subjektsnominativ einen Objektsakkusativ bei einem folgenden Verb. mitvertreten kann. Ebenda S. 267 steht ein ähnliches, Lessing entnommenes Beispiel, in dem der Nominativ *(was)* mit dem Akkusativ lautlich zusammenfällt; noch ein Paar ähnliche moderne Beispiele giebt Matthias, S. 277. Vereinzelt kommen auch bei Hans Sachs Stellen vor, wo ein Nominativ als Vertreter eines ersparten Objektsakkusativs zu nehmen zu sein scheint. So vertritt der Nominativ *es* den gleichlautenden Akkusativ FS. 72, 8—9: *Das es gar můes verschwiegen pleiben, Nimant* (es) *wissen, den idermon* (vgl. den § 28, *2.* erwähnten Fall, wo das Verhältnis umgekehrt ist). Auffallender als diese ist folgende Stelle, wo die beiden Kasus lautlich verschieden sind: Fsp. 49, 226—7: *Bist vnsinn, so must an ein ketten, Vnd ins Narrn heuszlein* (dich) *lassen spern;* das fehlende *dich* ist wohl hier aus dem in *must* = mustu steckenden Nominativ *du* zu entnehmen. Noch sei hier eine Stelle angeführt, wo ein einfach gesetztes Substantiv, dessen Nominativ und Akkusativ die gleiche Lautgestalt haben, die doppelte Rolle von Subjekt (im Nebensatze) und Objekt (im Hauptsatze) spielt: FS. 13, 30—31: *Vnd wo beschrirne Kinder legen, Kan ich machen wider gesundt.*

§ 35. Viel öfter als ein Nominativ findet sich bei Hans Sachs ein Dativ als Vertreter eines ersparten Objektpronomens.

1. So bei asyndetisch nebeneinander stehenden Sätzen z. B. FS. 84, 129—30: *Vnd důt mir selb locken vnd hayen, Mit starcker kost vnd tranck erfrayen;* Fsp. 74, 391—2: *Ob wir im der gleich possen reisen, Mit schmaichel hafting lůegen speissen*, ähnlich FS. 190, 74—5; — vgl. FS. 132, 140—142: *Der halb musz ich jn allensammen Solch milde gab widerumb nemen, Mit hunger, schwerdt vnnd sterben zemen.* Aus Luther und dem Mhd. finde ich bei Franke, Wunderlich und Paul keine ähnlichen Beispiele.

2. Bei Koordination durch *und* z. B. Fsp. 52, 209—11: *. . . auff das jr Mich fürcht und bleibet ghorsam mir, Mir glaubet, Liebt vnd ehrt allein,* durch *sondern* Fsp. 24, 61—62: *So würst mir kein herberg zusagen, Sonder wie ander Leut ausz jagen;* vgl. FS. 138, 4: *Ein schneider im zw sprach vnd seczt* [= stellte an, gab Anstellung, s. Sanders Wb. unter *setzen 21)*], ähnlich *ihn* erspart noch z. B. 197, 74—5; — vgl. 123, 53—4: *Ich wil ir geben iren lon Vnd lassen an den galgen gan,* ähnlich 221, 108—109 [ähnliche Ersparungen auch bei Luther, s. Franke § 331, *4.* b)]. Bei Verknüpfung durch *weder — noch* 206, 37—40: *Das kains dem andern mer zv sol seczen, Weder peschedigen noch leczen.*

3. Bei einem den regierenden Satz bestimmenden Infinitiv mit *zu* Fsp. 62, 289: *Er drot mir sunst* (mich) *zu rawffn vnd schlagn;* Fsp. 3, 297—8: *Die dir gar heymelich zu setzen, An ehren, leyb vnd gut zu letzen,* ähnlich Fsp. 44, 191—2, bei derselben Wendung ist FS. 233, 85—6 *ihn* erspart, 345, 65—6 *sie* (Plur.); vgl. 268, 87—8: *Die ich im gueticlich wolt geben,* (ihn) *Anzwrichten, erlich zv leben,* ähnlich Fsp. 23, 98—9; — vgl. Fsp. 22, 262: *Ich troet jr vor,* (sie) *hart zu schlagen.* Der Infinitiv ist in den regierenden Satz hineingeschoben FS. 295, 77—80: *Aber durch deinen vngelauben, Desz waren glaubens* (dich) *zu berauben . . . Der segn dir hilfflich worden ist,* vgl. FS. 345, 73—4: (sie sollen) *Schreyen vnd pellen auf zv wecken Der herschaft, den dieb ab zv schrecken* (= bellen der Herrschaft, sie aufzuwecken, etc.). Franke § 331, *6.* b) bringt aus Luthers Sprache ein den obigen Fällen ähnliches Beispiel.

§ 36. Nur selten kommt es vor, dass ein erspartes Objektpron. von einem Genitiv vertreten ist. Wir können nur folgende Beispiele anführen: bei Asyndese FS. 35, 171—2: *Das eins des andern gern entper,* (es) *Vertauscht, wann es gewonheyt wer;* bei Syndese FS. 197, 76: *Mit hönworten sein spot vnd faczt* (*fatzen* ist bei Hans Sachs und im 16. Jh. allgemein transitiv, s. DWb.); 381, 59—60: *Künd doch der zwen mit seinem wüetten Nit ledig wern, noch von im schüetten.* Ein ähnliches Beispiel aus Luther bei Franke § 331, *4.* b). — Noch ist zu erwähnen FS. 80, 18—19, wo eine ähnliche Vertretung in der Wechselrede erscheint; der Pfaff sagt da: *Doch hab des gelcz ich pey mir nicht* und die Bäuerin antwortet: *Get hin vnd pringet mir.* Das Objekt zu *pringet* wird von dem Genitiv *des gelcz* vertreten.

§ 37. Nicht ganz selten tritt bei Hans Sachs ein von einer Präposition abhängiger Kasus als Vertreter des ersparten Pron. auf. [Ein Bei-

spiel dieser Art aus Luthers Sprache bei Franke § 331, *4.* a)]. — So bei Asyndese FS. 162, 47—8: *(Wilt) An dich haltn mit zimlicher sparúng,* (dich) *Vernúegen lassn an ringer narúng,* ferner 236, 47—8: *Vnd obn auf iren kúnig sasen, Mit fúesen vnter dretten wasen* (wenn nicht etwa das ersparte *ihn* im Auslaut von *fúesen* steckt); Fsp. 32, 291—2: *Des hab ich zu euch mein zuflucht,* (euch) *Als den fúrnembsten ausz gesucht.* — Bei Syndese 195, 62—3: *Nach dem er thw von herzen streben Vnd* (das er) *auf erden am maisten liebet;* 198, 64—5: *Gros wúnder het er ab den sachen Vnd peschawt eben aller ding;* dagegen FS. 214, 77—8: *Zv diesem kampff die knechte kamen, Schieden vnd fried des haders namen* liegt wohl keine Ersparung vor, da das Verb. *scheiden* in der älteren Sprache auch ohne Obj. im Sinne von *einen Streit, Kampf scheiden* gebraucht wurde, s. DWb. unter *scheiden* A. *2)* b). — Bei einem Infinitiv mit *zu* 316, 70: *Schwind loffen sie im nach zv fahen;* 97, 4—5; *Vnd auf die wolff det wueten, Von der hert ab zw weisen,* ähnlich 341, 4—5; — vgl. 370, 31—2: *Vnd vmb das Ey gar ernstlich schwirmen, Vor dem Mucken geschmeisz zu schirmen.* — Hierher gehört wohl auch Fsp. 39, 48—50: *Von nôten sey dir nun zu wandern . . . Dein Handtwerck nach, basz zu erfarn,* wo *Dein* offenbar ein Schreibfehler für *deim* ist, vgl. das erste Beispiel FS. 316, 70. — Dagegen Fsp. 84, 356—8: *Der tregt die kleinat vnd das gelt, Von dem dw mir icz hast gemelt, Das er dem jůden hat genúmen* scheint es uns nicht notwendig, in dem letzten Gliede des Satzes eine Ersparung von *es* anzunehmen, wozu man allerdings auf den ersten Blick geneigt ist, indem man *Das* als Konjunktion fasst. Die so herauskommende Konstruktion ist unseres Wissens Hans Sachs nicht geläufig, und wir glauben daher, dass man in *Das* vielmehr das Relativpron. zu sehen hat, und dass das letzte Glied des Satzes, mit dem vorangehenden parallel stehend, das Wort *gelt* im Hauptsatze bestimmt.

§ 38. Von dem Pronominaladverb *da* in relativer Bedeutung wird das ersparte Pron. vertreten FS. 307, 156—7: *(vmb hendel) Da* (= in denen) *man wol rechtens múesig ging,* (sie) *Sůnst wol vertrúeg durch piderlewt* [vertragen = zum gütlichen Austrag bringen, s. Heyne, Wb. unter vertragen, *3)*]. Wie angedeutet, nehmen wir hier zugleich einen Übergang aus relat. in demonstrat. resp. persönl. Konstruktion an, wie sie bei Hans Sachs sehr häufig vorkommen. — Das demonstrative Pronominaladverb *darein* erscheint als Vertreter des Objektpron. FS. 239, 110—112: *(wir wôln) Dem gueten man zalen sein haůs Vnd wôllen darein stossn ein fewr,* (es) *Verprennen sambt dem kalb vngehewr.*

§ 39. In den bisher angeführten Belegen hat sich das auf zwei Verba gemeinsam zu beziehende Satzglied, von dem das ersparte Objektpron. vertreten war, formell nach dem Verbum gerichtet, welchem es am nächsten stand. Bei Hans Sachs ist aber auch das umgekehrte Verhältnis möglich, dass nämlich jenes gemeinsame Glied sich nach dem entfernteren Verbum richtet. Allerdings kennen wir nur ein Beispiel dieser Erscheinung: FS. 345, 80—81: *(Der truegner) wird im auch nach diesen tagen Verachten vnd nichs guecz vertrawen*, denn Fsp. 72, 200: *Die auf mein wort glauben vnd pawen* gehört wahrscheinlich nicht hierher; zu beachten ist nämlich, dass bei *glauben* statt der Präpos. *an* in der Sprache der Theologie früher auch *auf* stehen konnte [s. Sanders, Wb. unter *glauben 6)* b)], und möglicherweise zeigt unsere Stelle eine Einwirkung dieses Gebrauches auf Hans Sachs.

2. Zweite Hauptgruppe.

§ 40. Es erübrigt uns noch die Fälle zu betrachten, in denen das Objektpron. ohne Vertretung erspart ist. Zunächst ist hier zu erwähnen Fsp. 3, 332: *Mein kindt lern ich mit arbayt nehren;* der Sinn kann hier kein anderer sein als: ich lehre meine Kinder, sich mit Arbeit nähren; das ersparte *sich* hat in der Rede keinen Vertreter. Ein reflexiv gebrauchtes Pron. vermisst man, ohne dass es vertreten wäre, auch Fsp. 65, 121: *Nún hüet vnd weicht!* ebenso FS. 387, 52: *Hüt, hüt vnd weicht.* Hier verweisen wir auf das DWb., wo es unter *hüten 6)* a) heisst: „ausruf der warnung und drohung war *hüet dich*, gekürzt auch nur *hütt!*“ Doch lässt Hans Sachs beim selben Verb. das Reflexivum einmal unausgedrückt in einem Falle, wo die Freiheit durch die dem Befehle eigene Kürze nicht entschuldigt wird: FS. 380, 101—2: *Vnd lebten fort in lieb vnd güeten, Detten vor zanck vnd rechten hüeten* (vgl. dagegen FS. 24, 126: *So hüdt jch mich vor euch gar billig*). Ferner ist hier zu besprechen die Ersparung des Objektpron. Fsp. 74, 372—3: *Weicht, weicht von mir vnd last mich rechen An dem lecker vnden im garten* (man erwartet: lasst mich mich rächen); die uns wahrscheinlichste Erklärung dieser Stelle ist, dass wir es hier mit einer Art Konstruktion *ἀπὸ κοινοῦ* zu thun haben, d. h. das zu den beiden Verben *last* und *rechen* gemeinsam gehörige Pronomen *mich* ist nur einmal, in der Mitte zwischen den beiden Verben gesetzt, wo es sich zu beiden gleich bequem ziehen lässt (vgl. Paul Pr. S. 266). Ähnlich scheint uns folgende Stelle aufzufassen zu sein: Fsp. 84, 322—23: *Kraczhans, hie las vns paid verstecken In dise . . . ecken* [= lass uns uns verstecken; zwei ähn-

liche Beispiele bringt aus Luthers Sprache Franke § 331, *6. a)*]. Dagegen Fsp. 82, 190: *Ich pit euch, nit an mir vergecht* ist wohl nur das Komma der Ausgabe vor *euch* vorzurücken, um alles in Ordnung zu bringen. Es finden sich aber noch einige den eben angeführten nahe stehende Stellen, wo die Erklärung der Ersparungen aus einer Konstruktion *ἀπὸ κοινοῦ* nicht möglich ist; vgl. Fsp. 75, 299—300: *Ir lieben nachpaurn, wie sol wir rechen Am Neidhart, dem listigen, frechen* (= wie sollen wir uns rächen), dagegen regelmässig Fsp. 75, 291: *(wir habn) Redlich an pawren vns gerochen;* vgl. ferner Fsp. 70, 159—60: *Kúmbt! lat den alten kueten pueben Im holcz dort werffen in ain grueben* (= lasst uns werfen); ib. 271—2: *Kúmb! las den veretrischen pueben Zumb alten werffen in die grueben* (= lass uns), dagegen regelmässig ib. 179: *Lat vns pald lóssen*, 275: *las vns drincken vnd essen.* Jene Verstösse gegen den Sprachgebrauch hat sich der Dichter wohl dem Versmaass zu Liebe erlaubt. Dasselbe gilt wohl auch von der Ersparung Fsp. 82, 319—20: *Das ir fort hin pey eurem leben Wolt in kein zwitracht mer pegeben*, denn an eine Vertretung des ersparten *euch* durch den im selben Satze stehenden Nominativ *ir* ist wohl nicht zu denken.

C. Ersparung einer pronominalen Dativbestimmung.

Seltener als ein Objektpron., aber unter analogen Umständen, wird bei Hans Sachs ein als Dativbestimmung fungierendes alleinstehendes, substantivisches Pronomen erspart. Auch diese Ersparung beruht auf einfacher Setzung eines Satzgliedes mit mehrfacher Beziehung, und zwar kann jenes Satzglied, von dem das ersparte Dativpron. vertreten wird, entweder selbst eine Dativbestimmung sein, oder als Bestimmung anderer Art fungieren.

§ 41. Für die Erscheinung, dass eine in dem letzteren von zwei koordinierten Satzgliedern ersparte Dativbestimmung durch eine im ersten gesetzte mitvertreten wird, können wir nur folgendes Beispiel anführen: FS. 206, 37—40: *Das kains dem andern mer zv sol seczen, Weder peschedigen noch leczen, Weder an er, guet, leib noch leben, Sůnder gůet freůntlich gsellschaft geben;* zu beachten ist hier, dass die Satzglieder, welche die Dativbestimmung mit einander gemein haben, durch ein drittes von einander getrennt sind, dessen Verba transitiv sind. — Häufiger kommt es vor, dass ein Infinitiv mit *zu* die Dativbestimmung mit seinem Hauptverbum gemein hat.

So z. B. FS. 258, 97: *Pot mir an, ain zwelffer zv geben;* vgl. 345, 67—68: *Ob in der schalck mit falschen rencken Schon anpewt, etlich gab zv schencken;* ferner FS. 77, 55—6: *Der arczt ein drost im gab, Des kinds zw helffen ab;* 204, 97—8: *Auch stelt man reichtům nach dem leben, Geferlich mit gift zv vergeben.*

§ 42. Wir haben oben § 35 gesehen, dass bei Hans Sachs oft ein zu einem Verb. gefügter Dativ bei einem folgenden Verb. einen Akkusativ mitvertreten kann. Hier haben wir einige Fälle zu verzeichnen, in denen umgekehrt ein Akkusativ einen Dativ vertritt. In asyndetisch aneinander gereihten Sätzen kommt dies vor z. B. FS. 345, 32—4: *Sag, wolstw mich in meim elent Auch also guetwilliclich speysen, Fuer vnd fuer solch guetat peweissen?* ähnlich Fsp. 71, 98—9; vgl. FS. 169, 114—15: *Die clagt, wie sie der pawr het zawst, Ein zopff mit har het ausgerissen*, ähnlich Fsp. 57, 47—9; vgl. Fsp. 22, 172—3: *(ich wil) mein Weib wol mit feusten bern, Des ploben geben vmb die augen;* Fsp. 39, 181—2: *Die euch doch vbel richten ausz, Sambt ewr Tochter vbel nach reden* (zu diesem Beispiel vgl. Matthias, S. 275 Fussnote und Paul, Pr. S. 267). Bei Verknüpfung der Sätze durch *und* z. B. Fsp. 52, 404—6: *(er begert) das Menschlich gschlecht . . . Thu jn fürchten und gehorsam sein*, ähnlich FS. 210, 9—10 [ein Paar ähnliche Beispiele aus Luthers Sprache bei Franke § 331, *4.* b) und Wunderlich, Luther Pr. S. 21]; durch *sondern* Fsp. 23, 81—2: *Da wil ich jn nit eintzing zupffen, Sunder die schwingfedern auszrupffen;* durch *oder* FS. 54, 91—2: *Wen eůch ein weib nůr krům ansicht, Oder nach ewrem sin zw spricht* (vgl. das oben zu Fsp. 39, 181—2 bemerkte).

§ 43. Ein von einer Präposition abhängiger Kasus vertritt den ersparten Dativ z. B. FS. 313, 19—20: *Dieser můnich . . . Zum pfarher drat, verhies zv schenck, Was er verthienet halb zv lon;* Fsp. 39, 88—9: *Zu der wil ich gleich heindt spacirn, Mit seitenspiel lassen hoffiern;* Fsp. 50, 117—118: *Weil er an jn thut nichtsen sparn Mit kleidung, Ring vnd ketten schencken.*

D. Ersparung eines Verbums.

§ 44. Auch diese Art von Sparsamkeit im Ausdruck beruht auf derselben Grundlage, wie die bisher besprochenen Ersparungen: auf einfacher

Setzung eines Satzgliedes mit mehrfacher Beziehung. Als solches kann nämlich auch ein Verbum auftreten.

1. Normal und allgemein üblich ist es immer gewesen, zu zwei oder mehreren Gliedern eines zusammengezogenen Satzes, welche eine und dieselbe Verbalform erfordern, das Verbum nur einmal zu setzen, bei Nebensatzwortstellung zum letzten, sonst zum ersten Gliede; seine Wiederholung dient hier besonderen rhetorischen Zwecken. Das Gesagte gilt doch, wohl gemerkt, nur von solchen koordinierten Satzgliedern, welche sich eng und unmittelbar an einander anschliessen. Als eine Abnormität muss es bezeichnet werden, dass in dem letzteren von zwei Satzgliedern, die durch ein drittes Satzglied mit fremdem Verbum von einander getrennt sind, das Verbum des ersteren nicht wiederholt wird. Auch diese Anomalie findet sich ein Paar Mal bei Hans Sachs. So Fsp. 22, 47—9, wo der fahrende Schüler der Bäuerin den Zustand ihres verstorbenen Mannes im Paradiese folgendermaassen beschreibt: *Er geht dort vmb ohn hossen vnd schuch Vnd hat ahn weder hem noch bruch, Sonder* (geht um) *wie man in legt ins grab.* Ausserdem in der Wechselrede Fsp. 30, 345 ff., wo Apollo von Valerius Publicola sagt: *Das war ein Burger reich vnd frum*, worauf Fabius entgegnet: *Hat er doch nie gehabt Reychthum, Sonder* (war) *so arm in seiner hab, Das* etc. Aus sonstigen Quellen kennen wir keine ähnlichen Freiheiten.

2. Wenn in den verschiedenen Gliedern des Satzes eine verschiedene Form des Verbums nötig ist, so verlangt, streng genommen, der vollständige Ausdruck die Wiederholung des Verbums, jedesmal in der vom Gedanken erforderten Form. Aber sehr häufig kommt es in der modernen wie in der älteren Sprache vor, dass der Ausdruck unvollständig bleibt, indem das Verb, trotzdem es der Form nach nur zu dem einen Gliede passt, in einem anderen Gliede doch nicht wiederholt, sondern erspart wird. Bei Hans Sachs nun gehen die Ersparungen dieser Art nicht oft und nicht weit über das hinaus, was allgemein sprachüblich ist.

a) Am häufigsten wird eine Form erspart, die nur dem Numerus nach von der gesetzten verschieden ist. Da die Beispiele nichts speziell für Hans Sachs Charakteristisches bieten, mögen nur wenige hier Platz finden: FS. 22, 65—6: *Die wort sind süsz, . . ., Yedoch das hertz vntrew;* 241, 119—121: *solichs muelners trueg vnd list Offenlich an tag kůmen ist Vnd sůnderlich die zway diebstůeck;* Fsp. 25, 321—2: *Es ist der wirt gleych wie die gest, Es sint die Vögel wie das nest;* FS. 32, 117—18: *So soln sie auch eintrechtig leben, Keines das ander vbergeben;* 180, 139—140: *So kem der gůet prueder zv rw, Vnd auch all sein prueder darzv.* Ähnliche Fälle zahlreich im modernen

Sprachgebrauch, vgl. Matthias, S. 274; ebenso bei Luther, s. Franke § 331, *8.* a); 337, *3.* a).

b) Dasselbe gilt von den Ersparungen bei Nichtübereinstimmung in der Person (s. Matthias und Franke a. a. O.), die bei Hans Sachs nicht selten sind, z. B. Fsp. 12, 262: *Sie geit mir vnd ich ir die schuldt*, ähnlich ib. 287; vgl. FS. 13, 46: *Ich bin sein fraw vnd er mein Man.* Aus einer derartigen Ersparung erklärt sich auch die auf den ersten Blick etwas unklare Stelle FS. 135, 59—60, wo der Pfaff mit Bezug auf seine im Schwanck beschriebene unglückliche Reiterfahrt und all die schlimmen Folgen derselben ausruft: *Zw diesen zeiten Det ich vnd mich das vngluecк reiten*, d. h. ich that reiten und mich that das Unglück reiten, ich ritt und mich ritt das Unglück. Die zum Subjekt *ich* gesetzte 1. Pers. Sing. *(Det)* vertritt also beim Subjekt *vngluecк* die von ihr lautlich nicht verschiedene 3. Pers. Sing. Dieselbe Redewendung kehrt wieder 328, 146. Bei diesen Ersparungen kommt es auch einmal vor, dass das einfach gesetzte Verbum im letzteren Satzgliede und in der von diesem verlangten Form steht: Fsp. 34, 192—4: *so deut doch her, ob du vielleicht durch zauberey Bezaubert, oder wie jm sey* (ein ähnliches Beispiel aus Luthers Sprache bei Paul, Pr. S. 266, vgl. auch Matthias, a. a. O.). Endlich sind hier noch ein Paar Stellen anzuführen, die dadurch bemerkenswert sind, dass in dem letzteren von zwei Sätzen, die durch einen dritten getrennt sind, das Hilfsverbum erspart ist, obgleich der Satz eine andere Person verlangt als die im ersteren Satze gesetzte. Einmal kommt diese Ersparung in der Wechselrede vor, Fsp. 82, 61—5, wo der Mann seinem Weibe sagt: *Das ich mit schiesen hab gewůnen*, und das Weib antwortet: *Peyn flaischpenckn gewůnstůs In aines kandelgiesers kram, Darmit* (hast du) *etwan verthůn ain daler.* Dieselbe Anomalie Fsp. 82, 279—82: *Der gfater hat ghrett vnpedacht, . . ., Vnd dw sachst sein mainung nit on, Sůnder* (hast) *nach seinen worten thon.* Regelmässig dagegen ist der Ausdruck FS. 351, 111 ff., wo dieselben Verse wiederkehren; es heisst da: *dw sachst sein mainůng nit on, Sůnder hast nach sein worten thon.*

c) Seltener als bei Verschiedenheit des Numerus oder der Person wird bei Hans Sachs ein Verbum trotz Verschiedenheit der Tempusform erspart. Abgesehen von Komparativsätzen, — z. B. FS. 146, 71—2: *Das prillenmachen werder ist Den vor jaren zv kainer frist;* Fsp. 35, 7—8: *Vnd wo du weiter folgest mir, Wie bisz her, so wil ich dir . . . geben auch ein Man* —, in denen ja auch heutzutage derartige Ersparungen allgemein gebräuchlich sind (s. Matthias, S. 288), kennen wir nur folgende Beispiele dieser Freiheit: Fsp. 3, 267—8: *Sag an! wer hat all kůnst erfunden, Vnd noch*

zu den hewtigen stunden (wo bei vollständigem Ausdruck mit der neuen Verbalform auch das dazu gehörige Objektpronomen hätte gesetzt werden müssen: und erfindet sie noch); vgl. FS. 70, 141—4: *den eweibern allen Das hŏnig ist vermüscht mit gallen, Der ich hernach wol hab entpfúnden, Vnd noch zw den hewtigen stúnden* (empfinde).

d) Noch seltener als die oben besprochene Erscheinung ist bei den Ersparungen eines Verbums die Nichtberücksichtigung der Verschiedenheit im Modus. Fälle wie Fsp. 53, 340—341: *Ich glaub es sey kaum so vngehewr, Als das Closter mit seiner pein* (ist) und Fsp. 43, 201—2: . . . *Gnad, Fraw, verberget mich! Wo nicht, so wird erwúrget ich* sind auch dem modernen Sprachgefühle nicht anstössig, und sonst haben wir keine Beispiele anzuführen.

e) In Fällen, wo bei vollständigem Ausdruck das letztere Glied des Satzes eine Verbalform verlangen würde, die von der des ersteren in mehrfacher Beziehung verschieden ist, wird das Verbum bei Hans Sachs nicht oft erspart, meist wie auch heutzutage in Komparativsätzen oder in der Wechselrede. So ist eine der Person und dem Numerus nach verschiedene Verbalform ausser in Fällen wie Fsp. 13, 144: *Er hat mer gelz wan ir vnd der* unseres Wissens nur noch erspart FS. 164, 44—5: *Da solt dw haben vnd sie paid Ider in seinr hant ein plos schwert* und 196, 30: *Haincz sprach: Ich pin hŭnd vnd ir has;* eine dem Tempus und dem Modus nach verschiedene Form z. B. FS. 365, 36—7: *So het ichs verloren dermassen, Wie* (ich) *das Kŭsz, Bolster vnd Deckbeth* (verloren habe) und so oft in Komparativsätzen, vgl. ausserdem FS. 70, 79—80: *Mit der ich zway vnd zwaynzig jar Gehawst hab, got geb* (ich hause) *lenger zwar;* Fsp. 40, 24—5: *Ir aber seyt nur wol gesessen, Gott geb* (ihr sitzet) *lang, beyd in Ehr vnd Gut.* Nur im Komparativsatze haben wir eine Ersparung des Verbums bei Verschiedenheit des Tempus und des Numerus beobachtet FS. 188, 98—9: *Dieser han gwint mit schweigen mer Den die andern zwen mit irm kreen* (gewonnen haben). Ebenso bei Verschiedenheit der Person, des Numerus und des Tempus: Fsp. 14, 264—6: *Den gwinst mit groser er den sieg, Wie Cirus, Xerxes vnd all ander, Pirrus vnd der gros Alexander* (gewonnen haben). Ebenso bei Differenz von Person, Tempus und Modus FS. 25, 61: *West mancher drumb so vil als ich* (weiss), denn streng genommen gehört nicht hierher FS. 74, 54—5: *(der eyfferer fragt) Wer doch der pfaff ir pŭlschaft wer. Sie sprach: Gleich dw, mein lieber mon* (bist es), wo sich die Antwort nach der direkten Form der Frage richtet, in der das Verbum *ist* stand. Endlich sei noch erwähnt eine Ersparung bei verschiedenem Numerus, Tem-

pus und Modus, auch sie im Komparativsatze: FS. 86, 97: *Sie frist als vil als meiner drey* (frässen).

f) Dass ein Infinitiv aus einem Verbum finitum zu entnehmen ist, kommt bei Hans Sachs zuweilen vor; die Belege bieten nichts von dem modernen Sprachgebrauche Abweichendes, vgl. z. B. Fsp. 8, 41: *Vnd folg jm, wo ich mag vnd kan*, ähnlich Fsp. 17, 257; — Fsp. 60, 18—19: *Vnd alles, was ich kan vnd weis, Das thw ich dir zw wolgefallen;* mhd. Beispiele dieser Erscheinung bei Paul Gr. § 381, s. auch Pr. a. a. O. Die entgegengesetzte Erscheinung, dass ein erspartes Verbum finitum aus einem Infinitiv zu entnehmen ist, findet sich dann und wann in Komparativsätzen, z. B. FS. 91, 31—2: *Darpey gar clerlich ich pewer, Mein esel gscheider sein, wan er;* 145, 140—141: *Ich wolt ie auch kain awg ausz wainen, Noch laidtragen als weng als dw;* vgl. ausserdem Fsp. 69, 39—40: *Ey, hôrstw nit, ich wil es wissen. Wo nit, so wirst von mir gerissen.*

§ 45. Bisher war die Rede von einmaliger Setzung eines zu zwei Gliedern des Satzes gemeinsam gehörigen Verbums in Fällen, wo die verschiedenen Glieder bei vollständigem Ausdruck eine verschiedene Form des Verbums erfordern würden. Die Bedeutung des Verbums in den verschiedenen Gliedern war in den obigen Belegen dieselbe. Nun kommt es aber, obwohl selten, bei Hans Sachs auch vor, dass dieselbe Verbalform für mehrere Glieder des Satzes nur einmal gesetzt wird, trotzdem sie in den verschiedenen Gliedern verschiedene Bedeutung hat.

Dies ist z. B. bei dem Verbum *sehen* ein Paar Mal der Fall. Wenn es z. B. FS. 330, 28—30 heisst: *Der gůet man wart herzlich pekůemert Vnd in dem schrecken sich vmb sach Vnd die welff traben auch hernach,* so hat das den beiden letzten Sätzen gemeinsame *sach* in dem ersteren die Bedeutung: die Blicke irgendwohin richten, in dem letzteren ist es synonym mit gewahr werden, erblicken. Hier sind die Sätze durch *und* koordiniert. In asyndetisch aneinandergereihten Sätzen findet sich dieselbe Erscheinung FS. 248, 87—8: *Der pot sach sich vmb an dem ent, Des herrn fischmesser in der hent* und 176, 41—2: *Der stieg ab, sach in paum* (= in den p.) *einwartz, Den koler so rusig vnd schwartz.* Ebenso vereinigt das Verbum *schauen* in sich die beiden Bedeutungen: irgendwohin sehen und etwa beobachten Fsp. 5, 339—41: *Schaw jetzt inn alle Kônigreich Vnd Fürstenhôff des Teutschen Lands, Des zutrinckens kunst vnd wohlstands;* ferner hat das Verbum *machen* die Bedeutungen: an etwas arbeiten und aus etwas herstellen, verfertigen FS. 199, 100—101: *(Die Lappenhaůser) machten dron* (am *nebel schieff*) *pey zwayen jarn Aus lauter gens federn vnd haberstro.*

In diesem Zusammenhange haben wir noch einige Stellen zu erwähnen, in denen eine einfach gesetzte, zu zwei Gliedern des Satzes gehörige Form von *werden* einerseits als selbständiges, den Übergang in einen Zustand bezeichnendes Verbum, andererseits als Hilfsverbum zur Bildung des Futurs oder des Konditionals gebraucht ist. So bei Verbindung der Glieder durch *und* FS. 358, 18—20. *Wir müssen schneiden lon, Das Korn ist reiff in Beten allen; Sonst würd es zu dürr vnd auszfallen;* häufiger bei asyndetischer Nebeneinanderstellung der Glieder: FS. 129, 40—43: *so wirstw . . . ein merterer Dag vnde nacht mit arbeit schwer, Dich ring klaiden, trencken vnd speissen;* Fsp. 42, 97—8: *Denn würdt er der frümbst Man auff erden, Vmb dich nimmer mehr eiffern werden;* Fsp. 63, 242—3: *So wirt euer man senft vnd güet, Euch peweissen freüntschaft vnd gunst*, ähnlich ib. 342—3; vgl. noch FS. 70, 147—8: *So wirt ers auch gewislich innen, Honig vermischt mit gallen finnen.* Derselbe Gebrauch noch FS. 51, 95—6: *Den würt es pas sten in der welt, All ding wolfail vmb ringes gelt,* wo im letzten Gliede bei vollem Ausdruck ausserdem eine andere Form des Verbums nötig wäre. Von einer Verschiedenheit der Bedeutung des Verbums in den verschiedenen Gliedern des Satzes kann allerdings in diesen Fällen eigentlich nicht die Rede sein. Mag nun *werden* als selbständiges Verbum oder zur Umschreibung von Tempusformen anderer Verba gebraucht sein, in beiden Fällen hat es im Grunde dieselbe inchoative Bedeutung und bezeichnet den Eintritt eines Zustandes oder einer Handlung (s. Erdmann § 142, *6*. Paul Gr. § 298, Anm.). Aber sein Funktionswert ist verschieden, und seine nur einmalige Setzung in Fällen wie die oben verzeichneten muss wohl als eine ziemlich seltene Freiheit bezeichnet werden, die zwar gelegentlich auch in der modernen Sprache Analogien hat (verwandte Beispiele bei Matthias S. 275), über deren Berechtigung aber die Meinungen der Grammatiker auseinandergehen (s. ebda, Fussnote). Als Belege dieser Freiheit werden die angeführten Stellen wohl ihren Platz hier behaupten.

Eine Äusserung derselben Freiheit ist es, wenn ein und dieselbe Form von *haben* zugleich als transit. Verb. und als Hilfsverbum zur Bildung des Perfektums gebraucht wird, oder eine Form von *sein* zugleich als Verbum essentiae und als Kopula dient. Auch solche Fälle kommen bei Hans Sachs vor. So bei *haben* wenn es FS. 174, a. 7 ff. von einem Brunnen heisst, er heile jeden Kranken, der darin bade: *Er hab fawls flaisch oder den stein, Die plab hüestn oder den zipperlein, Den mewchler oder drüncken zv vil Odern grim gwünen ob dem spil, Die eyffersucht oder das senen;* dieselben Verse kehren wieder Fsp. 11, 7—14; vgl. ausserdem Fsp. 35, 87—8, wo gesagt wird, man solle nicht auf die Worte der Freier trauen, sondern darauf, *Wie*

sie sich vorher haben ghalten, Was eltern, gschlechts von jren alten (sie haben). Matthias a. a. O. bringt ein Paar moderne Beispiele eines ähnlichen Gebrauches von *haben*. — Stellen, wo eine Form von *sein* in der oben bezeichneten Weise funktioniert, sind FS. 267, 88—9: *Nún war eben den selben zeitten Regen wetter vnd der weg dieff;* vgl. 369, 49—52: *Im Kram waren die pfenwert hin, In der Stubn wedr Silber noch Zin, Kein Bethgwand war mehr in der kamer, All Truhen ler, vol angst vnd jamer* und 384, 39—41: *Die hel war zv Vlisis zeit Gleich einem ganczen lande weit, Doch weng haidnischer sel darinnen*, wo das Verbum in den verschiedenen Gliedern nicht nur eine verschiedene Funktion hat, sondern bei vollem Ausdruck auch in verschiedener Form stehen müsste. In den von Matthias S. 276 gegebenen Beispielen ist *sein*, soviel ich sehe, nicht als Verbum essentiae gebraucht, weshalb sie auch nicht das veranschaulichen, was sie veranschaulichen sollen.

§ 46. In den bis jetzt besprochenen Fällen war aus dem Verbum eines früheren Gliedes entweder eine andere Form desselben Verbums für ein späteres Glied zu entnehmen, oder dieselbe Form in einer anderen Bedeutung oder Funktion. Auch konnte zuweilen sowohl Form als Funktion im zweiten Gliede verschieden sein, aber immer handelte es sich doch um die Entnahme desselben Verbums. Im Folgenden haben wir nun noch eine Anzahl von Fällen zu betrachten, wo zu zwei Gliedern eines Satzes das Verbum nur einfach gesetzt ist, obwohl das gesetzte Verbum nur zu dem früheren Gliede passt, und daraus für das spätere Glied die entsprechende Form eines ganz anderen Verbums zu entnehmen ist.

Das ersparte Verbum kann demjenigen, aus welchem es zu entnehmen ist, der Bedeutung nach gerade entgegengesetzt sein. So scheint z. B. aus *bleiben* die entsprechende Form von *werden* zu entnehmen zu sein FS. 175, 70—71: *Der im nit lang pleibt vnterthenig, Sünder* (wird) *vnghorsam, wider spenig;* umgekehrt aus *werden* die entsprechende Form von *bleiben* Fsp. 52, 35—7: *Derhalb mag ich auff dieser Erden, Weil ich leb, nit mer frölich werden, Sonder in Weinen, Rew vnd klag* (bleiben). Eine verwandte Erscheinung ist es, wenn von einem *schauen* ein *hören* mitvertreten wird, wie Fsp. 2, 202 ff.: *Da wert jr grosse wunder schawen Von einem Thurnieren vnd Stechen, . . . , An meinem Hoff fechten vnd Ringen, Dantzen, Hoffieren vnde Singen, Auch manig süsses Seiten spiel* (ähnliche Fälle bei Luther, s. Franke § 335), oder von einem transitiven *haben* die Kopula *sein*, z. B. Fsp. 84, 441—2: *(Das er merck) Das er kein eppelein an ir hab, Sunder austhan* (= ausgejagt) *vnd gar schabab* (sey). In einem Komparativsatze kann (wie heutzutage, s. Matthias,

S. 288) eine Form von *sein* erspart werden, obgleich im regierenden Satze nicht dieses, sondern ein anderes Verbum steht, vgl. Fsp. 76, 168—9: (ich will dich schlagen) *Das dir dein rueck mûs werden awch Eben gleich als waich als der pawch* (ist).

Ferner kann ein erspartes Verbum allgemeiner Bedeutung aus einem oder mehreren vorangehenden Verben spezieller Bedeutung entnommen werden. Dies ist die einzige „Erklärung" die wir für die Ersparung des Verbums an folgenden Stellen geben können: Fsp. 15, 277—8: *Eins tails die karten in die nûes, Eins tails* (spielen) *des rûepfleins auf dem kûes (karten in die nûes* = um Nüsse, statt Geldes, Karten spielen, s. DWb. unter *Karten)*; Fsp. 3, 240—43: *ich die handtwercker bezwing, Das sie dir weben, schneyden, neen, Mawren, zymren, schmyden, dreen, Vnd was du mûst zu notturfft han;* Fsp. 47, 125—8: *auch wirt man vor dir springen, Kempffen, stechen, fechten vnd ringen Vnd alles was dir in der zeyt Mag dien zu aller frôligkeyt;* FS. 299, 37—8: (er) *must auch ziehen in dem Pflug Vnd was der arbeit sich zu trug;* Fsp. 25, 173—6: *Hab auch etlich Pferdt hin ghritten Vnd etlich beutel abgeschnitten, Dergleichen ander bôse stûck, Die ich hab braucht durch meine dûck;* Fsp. 78, 159—62: *Auch wirt mir ser vil schueld entragen; Dergleich mir oft vil war verlagen; Auch stocken etwan gar die hendel, Vnd der gleich solcher vngluecks drendel.* Wenn überhaupt gesagt werden kann, dass an den letzten Stellen ein bestimmtes Verbum zu ergänzen ist, so kann es wohl nur ein allgemeines, abstraktes sein, an den ersteren *thun*, an der letzten etwa *geschehen.*

Endlich gehört hierher noch die bei Hans Sachs häufig vorkommende Erscheinung, dass eine Form des Hilfsverbums *haben* durch die entsprechende Form des Hilfsverbums *sein* mitvertreten ist, oder umgekehrt eine Form von *sein* durch eine von *haben.* Zahlreicher sind die Fälle ersterer Art, deren wir hier zuerst einige anführen: FS. 70, 67—9: *Pistw auf lawter roszen gangen, Kein sawers nie von ir entpfangen;* ib. 82, 45—6 = 260, 65—6: *Sint sie nicht aber zam gesessen, Haimlich gesûeffen vnd gefressen,* ähnlich Fsp. 21, 166—8; — FS. 334, 45—6: (sagen) *Wie im der dewffl erschienen wer Vnd im getroet scharpff vnd schwer;* Fsp. 28, 26—7: *Ist sie dardurch worden gesterckt, Der Herrschaft sich genommen an;* Fsp. 46, 124—5: *Ich bin nur gangen zu dem Rocken Zu vnser Gfattern vnd gespunnen;* vgl. ausserdem FS. 379, 57—9; Fsp. 23, 3—7; 50, 200—202; 56, 346—8; 63, 349—50; 67, 291—2; 75, 128—9. Von Beispielen letzterer Art mögen hier folgen FS. 47, 17—18: *Ich war frôlich vnd hab gesungen, Hin vnd her durch die zeun gesprungen;* 266, 121—4: *Wen ainr ein schaden hat erlitten, Sich selb ge-*

stochen oder gschnitten, Sich gstossen oder hart gefallen; 288, 69—70: *der mit jr ghrungen Hat, gfochten, gloffen oder gsprungen;* vgl. noch FS. 324, 43—4: Fsp, 25, 70—71; 67, 197—8; sogar bei Nichtübereinstimmung der Person erfolgt eine ähnliche Ersparung FS. 331, 27—8: *Weil dw kain kauffhandel hast trieben, Nit gros erb von dein eltern* (ist) *plieben.* Derartige Ersparungen eines Hilfsverbums waren auch vor und nach Hans Sachs sehr gebräuchlich. Zahlreiche Beispiele aus dem 15. bis 17. Jh. bringt Kehrein § 51, mehrere aus Luthers Sprache stehen ausserdem bei Franke § 331, *8.* b) und § 337, *3.* b), vgl. auch c). Dem modernen Sprachgebrauch sind sie fremd geworden, s. Matthias, S. 273.

§ 47. Wohl aber gestattet die heutige Sprache in Nebensätzen die Ersparung von *haben* und *sein* ohne vorhergehende Vertretung. Auch diese Erscheinung kommt seit dem 15. Jh. vor (Beispiele bei Kehrein a. a. O.), und Sätze wie FS. 176, 58—60: *Der Koler hertiglich entschlieff Auf den vnmut, den er erlitten, Von wegen der spulweck erstritten,* die bei Hans Sachs dann und wann sich finden, sind nichts für ihn Eigentümliches. Wenn aber Hans Sachs Fsp. 40, 286 sagt: *Der Iuncker aufft bulschaft meint gangen,* statt: gegangen zu sein, so ist das eine Ersparung des Hilfsverbums, zu der sich wohl schwerlich anderswo ein Gegenstück wird finden lassen. Ebenso, wenn es Fsp. 70, 102—4 heisst: *Scharpff . . . ist gottes gericht, Darfor all menschen müessn erscheinen, Geúrteilt zv frewd oder peinen,* statt: geurteilt werden. Wir haben es hier mit sprachwidrigen Freiheiten, mit Abnormitäten zu thun, die sich der Dichter aus Reimnot und dem Metrum zu Liebe erlaubt hat.

E. Ersparung eines adjektivischen Bestimmungswortes.

Wenn eine adjektivische Bestimmung zu mehreren koordinierten Substantiven gehört, deren jedes eine selbständige Substanz bezeichnet, verlangt die Regel des korrekten Sprachgebrauches, dass das Bestimmungswort vor den einzelnen Substantiven wiederholt werden soll. Verstösse gegen diese Regel, heutzutage verhältnismässig selten (s. Matthias, S. 93 ff.), kommen bei Hans Sachs, wie im Allgemeinen in der Übergangszeit vom Mhd. ins Nhd. und in der frühnhd. Periode (viele Belege bei Kehrein §§ 113 und 126, vgl. auch Paul, Pr. S. 267), sehr häufig vor. Gewöhnlich bestehen sie darin, dass die

zu den Substantiven gemeinsam gehörige Bestimmung nur beim ersten ausgedrückt, bei den übrigen dagegen erspart wird.

§ 48. Ehe wir die Ersparungen dieser Art näher ins Auge fassen, müssen wir auf ein phonetisches Moment aufmerksam machen, das in einigen Fällen möglicherweise in Betracht zu ziehen ist und die Ersparung nur scheinbar macht. Die Artikelform *die* wird von Hans Sachs nicht selten nach der mundartlichen Aussprache zu *t'* abgekürzt und einem Worte angehängt, z. B. 217, 41: *Schlichen die zwen int herwerg nein*, ähnlich ib. 60; vgl. ib. 58: *Prüeder Zwiffel macht sich aüft pon.* Es scheint uns daher möglich, dass sie mit einem auslautenden *t* verschmelzen konnte. Am häufigsten bot sich dazu die Gelegenheit bei vorangehendem *und*, z. B. FS. 58, 97: *Der zipperlein vnd wassersúecht;* FS. 66, 98: *Das zu drincken* (= Zutrincken) *vnd füellerey;* 235, 168: *Vil pitrer, den der dot vnd hel*, ähnlich 384, 257; vgl. Fsp. 45, Bühnenbemerkung nach V. 165: *Die Fraw vnd Meyd kommen;* Fsp. 80, nach V. 54: *Der pawer vnd pewerin kommen;* aber auch sonst bei vorangehendem *t*, z. B. FS. 157, 153: *Wan es ist hauptsúm vnd der gwin.* An diesen und ähnlichen Stellen ist die Ersparung des Artikels allerdings nicht auffallender, als in zahlreichen anderen Fällen, wo an phonetische Einflüsse nicht zu denken ist. Sie kann daher auch ohne diese Einflüsse erfolgt sein und erklärt werden; aber andererseits dürfte wohl die Möglichkeit dieser Einflüsse auch nicht bestritten werden, und wir haben sie deshalb hier nicht unberücksichtigt lassen können.

§ 49. Von den Ersparungen, bei denen keine phonetischen Faktoren mit im Spiele sind, führen wir zunächst diejenigen vor, welche bei gleichem Numerus, Genus und Kasus der Substantiva stattfinden. In diesem Falle passt ein und dieselbe Form des Attributs zu den verschiedenen Substantiven, seine Wiederholung wird aber von der Grammatik im Interesse der Logik gefordert, wenn die Substantiva jedes einen selbständigen Gegenstand bezeichnen. Diese Wiederholung unterbleibt nun oft bei Hans Sachs.

1. Am häufigsten sind die Fälle, wo der bestimmte Artikel als Attribut mehrerer Substantiva nur einmal gesetzt wird. Nicht selten findet dies bei zwei Substantiven statt, obgleich sie von gerade entgegengesetzter Bedeutung sind, oder vielleicht gerade deshalb, z. B. FS. 53, Überschrift: *Der karg vnd milt,* dieselbe Überschrift noch Fsp. 7; — FS. 204, Überschrift: *Fabel der haus vnd feltmaws;* FS. 267, 127: *Den weissen vnd thoren auf erden;* bei Koordination durch *weder — noch* FS. 263, 63—4: *es hilft mich diese zeit Weder die luegen noch warheit.* Ebenso wenn eins von den Sub-

stantiven oder sie beide ausser dem Artikel noch ein Adjektiv als Attribut bei sich haben, z. B. FS. 221, Überschrift: *Der schmaichler vnd warhaft gesel;* 270, ebda: *Der guet vnd pos wirt;* 275, 101—2: *Den grossen Gott vnd Teuffel bed Nennst dein Brůder.* Sonstige Fälle einfacher Setzung des Artikels sind z. B. FS. 165, 49—51: *Das . . . ewerschwein Ist gwaffnet mit den zenen sein, Der per vnd leb mit scharpfen klaen;* Fsp. 6, Bühnenbemerkung nach V. 16: *Der Narr vnd Son gehen ein* (dagegen regelmässig ib. nach V. 342: *Der Narr vnd der Son lauffen zu der Stuben ausz*), vgl. noch Fsp. 27, Bühnenbemerkung nach V. 322; — FS. 214, 49: *(es sint) Die fraw vnd hawsfőgtin zam gsessen,* ähnlich Fsp. 74, Bühnenbemerkung nach V. 17: *Die fraw vnd schwieger gent ein* (wenn nicht an diesen Stellen *vnd* = und die); FS. 139, Überschrift: *Der můnich mit dem lanczknecht vnd petler,* vgl. Fsp. 85, Bühnenbemerkung vor V. 147; — FS. 162, 62: *Hin zv dem wein vnd pratfisch siczen,* vgl. ib. 124; — FS. 324, 125—6: *Dieweil ir kaine ist gesůnd . . . dem pawch noch můnd* (hier könnte vielleicht die Artikelform *dem* im Anlaut von *můnd* stecken, wie sie wahrscheinlich in der nachlässigen Aussprache des täglichen Lebens, zu *'m* verkürzt, mit dem folgenden *m* zusammenschmolz: *noch můnd* = noch 'm mund = noch dem mund); FS. 170, Überschrift: *Sant Petter mit dem hern vnd fawlen pawren knecht;* 228, Überschrift: *Fabel von dem eren* (= ehernen) *vnd yrden hafen;* FS. 8, 3: *Von der Kelnerin vnd Hauszmaidt,* vgl. 201, 116; — Fsp. 41, 108: *Kumb, nimb den flegl vnd holtzschlegel.* Bei mehreren koordinierten Substantiven ist der Artikel einfach gesetzt FS. 202, Überschrift: *Die fabel von dem pawren, wolff vnd fűechs,* vgl. 203, ebda: *Ein fabel von dem mawl, fűechs vnd dem wolff.*

Ähnliche Ersparungen wie die oben verzeichneten bringt aus Luthers Sprache Franke § 331, *1.* a), ein Paar moderne Beispiele giebt Matthias S. 94, mehrere stehen nach Paul, Pr. S. 118 bei Andresen, Sprachgebr. u. Sprachricht. S. 125 ff.

2. Weit seltener findet sich bei Hans Sachs die einfache Setzung des unbestimmten Artikels unter den oben angegebenen Umständen. Wir haben nur folgende Belege: FS. 80, 12: (Wilt) *Ein par schűech oder gűertelein?* 229, 109—110: *Wo den ein herschaft vnd gemein So ainig mit einander sein;* Fsp. 15, Überschrift: *Ein fasnacht spil mit 3 person: ein purger, pauer vnd edelman,* vgl. die Überschrift von Fsp. 13: *Ein fasnacht spiel mit sechs personen: Ein wirt, kerner, kremer, petelmůnich, rewter vnd ein ziegeuner.*

3. Von sonstigen adjektivischen Formwörtern haben wir nur das Possessivum *sein* unter ähnlichen Verhältnissen einfach gesetzt gefunden, und zwar FS. 189, 71: *Nam er sein pferd, weib und sein hünd;* 218, 169—170: *geb weder stat, raûm noch placz Dem pûeler vnd seinr cûplerey, Schenck, gab, noch seiner schmaichlerey.*

§ 50. Seltener als bei gleichem Numerus, Genus und Kasus unterlässt Hans Sachs die Wiederholung eines adjektivischen Attributes, wenn die koordinierten Substantiva von verschiedenem Numerus sind.

1. Die Wiederholung des bestimmten Artikels ist unterblieben FS. 224, 55—6: *Wan der geizhûnger manchem ent Das hercz vertûnckelt, aûgen plent* (wenn das scheinbar fehlende *die* hier nicht im Auslaut von *vertûnckelt* mitenthalten ist, vgl. § 48); 293, 20—21: *Hett kundtschafft zu dem Gardian Vnd Brûdern zu den Parfusern;* Fsp. 85, 428—9: *Es sint gros vngestûem Im meer vnd wassern vmondûem;* möglich ist es, dass an der letzteren Stelle *Im* keinen Artikel enthält, sondern für *in* steht, indem sich das *n* auch in der Schrift mit dem folgenden *m* assimiliert hat, wie es zweifelsohne bei der Aussprache der Fall war; eine derartige Assimilation liegt sicher vor Fsp. 9, 271—2: *Lasz sie haben ein guten mut! Wer weis, wanns jm mehr wirdt so gut!* (*jm mehr* = jn mehr = ihnen mehr).

Unter den von Kehrein § 126, *3)* gegebenen Belegen finden sich einige den obigen ähnliche Fälle, ebenso ein Paar aus Luthers Sprache bei Franke § 331, *1.* b).

2. Die einfache Setzung sonstiger adjektivischer Bestimmungswörter wurde bei Hans Sachs vielfach dadurch begünstigt, dass ihre mundartlichen Plural- und Singularformen lautlich zusammenfielen. So z. B. FS. 58, 29—30: *kenst nicht mein weiten paûch, Mein starcke zen vnd grosen schlaûch;* 237, 77: *Das sein kreft vnd sterck schwinden hin,* ähnlich 330, 74—5. Aber auch wo dieselbe Form nicht zu den beiden Substantiven passt, ist das Attribut bisweilen einfach gesetzt, z. B. FS. 210, 39: *Mit solchen schwenckn vnd gûeten mûet;* 250, 56: *Sambt seinem weib vnd kinden;* 345, 59—61: *Das sie verwarn . . . Ires herren leib, er vnd gûet, Der gleich auch seiner kind vnd weib* (*weib* steht aus Reimnot für Weibs, vgl. unten § 61).

Ein Paar ähnliche Beispiele bei Kehrein § 113 und bei Franke § 331, *2.* a).

§ 51. Eine sowohl in der älteren Sprache im Allgemeinen, als auch bei Hans Sachs ausserordentlich häufig vorkommende Freiheit, die sich auch heut-

zutage nicht selten findet, ist es, dass zu mehreren koordinierten Substantiven verschiedenen Geschlechtes ein adjektivisches Attribut nur einmal gesetzt wird.

1. So der bestimmte Artikel FS. 41, 52: *Frisz ich das haubtgut vnd gewin* (regelrecht dagegen 213, 44: *Paide, das hauptgůet vnd den gwin*); FS. 86, 195—6: *schicket . . . ein statknecht Vurn purgermeister oder recht;* 177, 13: *In der ainôd vnd wildem wald;* Fsp. 54, 49: *Zur Kirchweyh oder newem Iar* (über die starke Form trotz des bestimmten Artikels s. Paul, Gr. § 226, *1.*, Kehrein § 150); 237, 67—8: *Zv kirchen oder in der schüel, Pfarhoff vnd auf dem predigstůel;* 268, 11: *Von der kuchenspeis vnd hoffprot;* 287, 75—6: *eh das anbricht Die Morgenrôt vnd Tagesliecht;* 381, Überschrift: *Ain fabel: der pock, wolff vnd pfert.* Zahlreiche ähnliche Belege bei Kehrein § 126, einige bei Franke § 331, *1.* b), c), s. auch Matthias S. 95.

2. Ebenso der unbestimmte Artikel, nicht nur in Fällen wo die verschiedenen Genera lautlich zusammenfallen, wie z. B. FS. 13, 68: *Es war ein traum vnd fantasey*, vgl. 237, 89; 302, 86—7; — FS. 39, 32—3: *Sach ich drey schôner kleynat hangen, Ein Nasenfůter, brůch vnd krantz*, vgl. Fsp. 20, 6—7, sondern auch wo dies nicht der Fall ist, z. B. FS. 237, 60: *In ainem haůs, lant oder stat.* Ähnlich bei Luther, s. Franke a. a. O. c).

3. Das eben gesagte gilt auch von der Nichtwiederholung der adjektivischen Pronomina. Beispiele: Fsp. 45, 2: *Geängstet wird mein seel vnd Leib,* ähnlich FS. 369, 69; vgl. 148, 232: *An meinem handel, gůet vnd hab;* 268, 85—6: *(ob) Mir dieser sůn wolt folgen nicht Der meinen ler vnd vntericht;* — 162, 148: *(Wart) Deins handels, gewerbs vnd werckstat;* 265, 113: *Mit dir, deim fürstn vnd ganczer stat* (wegen der starken Adjektivform nach Possessivis s. Paul, Gr. § 226, *4.*, Kehrein § 155, *2.*); — FS. 20, 64—6: *Ain yedes mensch hab sein beschwerd, Sein angst, wee, armůt vnd trůbsal, Sein schand, anfechtung vnd vnfal*, ähnlich 181, 138—9; 189, 78; 190, 58 und sehr oft; vgl. 213, 35: *Paide an seinem gůet vnd hab;* — FS. 65, 202: *Ir mürrn vnd widerspenikeit;* vgl. ib. 327: *Irn vnwiln vnd rachselig hercz;* 239, 86: *Mit irer wer vnd harnisch rostig*, ähnlich FS. 165, 124; 300, 9; — 313, 77: *Phalt eůch eur predig vnd ablas;* — 208, 61: *Hat von im kain warnůng noch schůecz;* vgl. 367, 19: *Zu keiner arbeit, Gwerb noch Handel;* Fsp. 9, 235: *Du achst dich keins gewalts noch Ehr;* — FS. 291, 103—5: *Aller Mainayd, vntrew vnd liegen, Alle falsch Heuchley vnd betriegen, All schmeichlerey, schenden vnd schmehen*, ähnlich 205, 87; — 235, 56: *In solchem gezenck, not vnd jamer.* Ähnlich

verhält es sich, wenn mehrere Pronomina den Substantiven vorangehn, z. B. 242, 116: *All sein freud, rue vnd gueten muet.* — Belege ähnlicher Erscheinungen bieten Kehrein § 113, Franke § 331, *2.*, Matthias S. 95.

4. Ein zu mehreren Substantiven verschiedenen Geschlechtes gehöriges Adjektivum ist einfach gesetzt FS. 84, 130: *Mit starcker kost vnd tranck erfrayen;* 238, 33: *Mit rostigem harnisch vnd wer;* 339, 109: *Ich sag ein fleissig lob vnd danck;* 385, 13—14: *Het ser grossen lust vnd begir;* Fsp. 11, 344: *folgen guter leer vnd rath;* 39, 380: *Mein lieber Herr vnd Fraw;* 63, 280: *Vor groser forcht vnd schrecken gar.* Dieselbe Erscheinung auch vor und nach Hans Sachs gewöhnlich, s. Kehrein § 144, Franke a. a. O., Matthias, S. 95 f., vgl. auch Paul, Pr. S. 267, H. Schrader, Zeitschr. f. deutsche Spr. IX, S. 361—3.

§ 52. Auch bei verschiedenem Numerus und Genus der koordinierten Substantiva setzt Hans Sachs oft das ihnen gemeinsame Attribut nur einmal, und zwar nicht nur wenn dieselbe Form zu beiden passt, sondern auch im entgegengesetzten Falle.

1. So den bestimmten Artikel z. B. FS. 143, 40: *(löst) Auf die pant der sin vnd vernúnft*, vgl. FS. 37, 16: *Ausz dem gebirg vnnd wálden*, ähnlich FS. 41, 18; — 357, 5: *Von der Burgerschafft vnd Kauffleuten.*

2. Adjektivische Pronomina: 282, 159—60: *Denn hab ich, mein Kinder vnd Fraw kein Geldt*, vgl. 359, 66—7: *Thet mich . . . rhúmen Desz meinen Barts, schenckel vnd Horn* [über die alte Pluralform *Horn* s. DWb. unter *Horn* 17)]; — 217, 80: *Hueb sein augen vnd hant aúfwercz*, ähnlich 205, 109; 208, 57 u. oft; — 249, 66—7: *Zw straffen irn groben verstant Vnd vnhófflich pewrischen sachen;* — 233, 67—8: *solch reichtúm vnd hab Sint auch des plinden glueckes gab* (*reichtúm* hier wahrscheinlich Plur. wie sicher in V. 79 u. 82), vgl. 294, 78: *Mit solchen fatzworten vnd spot.* Unsicher sind folgende Stellen: FS. 23, 62—3: *Ob er schon allen fleys für kehr, All renck, list, vortayl vnd anschlag* (wahrscheinlich ist *anschlag* ein wegen des Reimes unumgelauteter Plural); 208, 59: *Sie lobet all sein wort vnd that* [hier kann *aller* im Sinne von *jeder* gebraucht sein (s. Paul Pr. S. 226), wie nicht selten sonst bei Hans Sachs, oder *that* kann die alte starke Pluralform sein, die in frühnhd. Zeit noch vereinzelt vorkommt; Beispiele aus Aventin, Frank, Ulenberg im DWb. unter *That*, Anf.]; 209, 39: *Sicher sint alle weg vnd stras* (möglicherweise haben wir auch hier in *stras* die alte starke Pluralform zu sehen).

3. Ebenso Adjektiva: 190, 102—3: *Das im der schneider solt . . . new hosn und vamas machen;* 245, 105: *(dencken) Der vnfreůntlichen wort vnd that* (vgl. das vorhin über *that* gesagte), ähnlich 292, 68: *Sie denckt Ehlicher freud vnd schertz* (hier kann vielleicht *schertz* als Genit. Sing. genommen werden, wo das *s* der Endung mit dem auslautenden *s* des Stammes verschmolzen ist, *schertz* = schertzs = schertzes; dann gehört das Beispiel unter § 51, 4.); — vgl. Fsp. 7, 349: *Ich komm zu hohem ampt vnd stenden.*

§ 53. Zu den bis jetzt verzeichneten Beispielen einfacher Setzung eines auf mehrere Substantiva zu beziehenden Attributes haben wir noch eine Anzahl von Belegen derselben Erscheinung hinzuzufügen, in denen das Attribut nicht wie in den bisher besprochenen Fällen mit dem ersten, sondern mit dem letzten Substantivum kongruiert.

Bei Koordination von zwei Substantiven verschiedenen Geschlechts ist dies der Fall: FS. 84, 167: *Mit starkem speise vnd getranck*, bei denselben Substantiven noch 310, 141; 352, 12; Fsp. 5, 170 (dagegen gehört nicht hierher FS. 260, 18: *Vnd ruepft in auf ir dranck vnd speis*, denn *dranck* ist frühnhd. öfters Neutrum, s. Sanders, Wb. unter *Trank*, Anm.); FS. 144, 105: *(stelt) Im krieg nach grosem hab vnd gůet*, bei denselben Substantiven 204, 86; 244, 101; — 144, 241: *Ir leib vnd leben wagen drob;* 200, 30: *(Pewachten) Getrewlichen ir hoff vnd haůs;* Fsp. 61, 159: *Durch meinen trewen hilff vnd rat;* FS. 382, 19: *Als der frosch merckt ir hon vnd schmach.* Unsicher bleibt FS. 75, 53: *Als der man sach ir zopf vnd har* (*zopf* vielleicht Plur. ohne Umlaut; mhd. Plur. zopfe oder zöphe), ferner Fsp. 19, 304: *pey vnsern er vnd aid* (wahrscheinlich *vnsern* Schreibfehler des Dichters für *vnserm* oder *vnserr* = unserer). Nach Paul, Pr. S. 279 f. (vgl. auch Matthias, S. 98, wo ähnliche moderne Fälle besprochen werden) erklärt sich hier die Kongruenz des Attributs mit dem zweiten Substantivum daraus, dass die kopulative Verbindung der Substantiva als eine Einheit gefasst ist, sich einem Kompositum nähert; wie in einem Kompositum bestimmt hier das letzte Glied der Verbindung die Form des Attributes. Bei Paul wie bei Matthias ist nur von zweigliedrigen Verbindungen die Rede. Ähnlich wie solche Fälle sind wohl folgende aufzufassen, in denen die kopulative Verbindung aus mehr als zwei Gliedern besteht, und das Attribut sich nach dem letzten richtet: FS. 374, 30: *Vnd ir leib, er vnd gůet drob wagen;* Fsp. 74, 335—6: *Notten so nem ich deglich ab An meiner Reichtum, gut vnd hab.* Die verbundenen Substantiva bezeichnen im ersteren Falle verschiedene, sich gegenseitig ergänzende Teile eines Ganzen, im letzteren sind sie synonyme Bezeichnungen der-

selben Sache, und eine Zusammenfassung der verbundenen Glieder zu einem einen einheitlichen Begriff darstellenden Kompositum lässt sich somit auch hier wohl denken.

Auf einen ähnlichen Vorgang hat man endlich vielleicht die Kongruenz des Attributes mit dem entfernteren Subst. zurückzuführen auch FS. 265, Überschrift: *Der pauern knecht fras seine aigen federpuesch vnd hentschüech*, wo die zwei Glieder der kopulativen Verbindung nicht dem Genus, sondern dem Numerus nach verschieden sind (nur von einem Federbusch ist in dem Schwanke die Rede); ein ähnlicher Fall wäre ferner Fsp. 20, 229: *Mit vrlauff vor den wirt vnd gesten*, wenn hier nicht *den* vielmehr als Schreibfehler des Dichters für *dem* zu erklären ist, in welchem Falle die Stelle unter § 50, *1.* zu stellen wäre (vgl. das dort citierte Beispiel 293, 20—21).

F. Ersparung einer Partikel.

Wir haben hier einige Fälle zu besprechen, in denen die Wiederholung einer Präposition, einer Negationspartikel, oder einer Konjunktion von Hans Sachs gegen den gewöhnlichen Sprachgebrauch unterlassen wird.

§ 54. Dieselbe zu mehreren koordinierten Substantiven gehörige Präposition braucht im Allgemeinen nicht wiederholt zu werden, wenn die Substantiva ohne besonderen Nachdruck in engem Zusammenhange aneinandergereiht werden.

1. Dagegen in nachdrucksvoller Rede erhalten die Subst. gewöhnlich jedes seine Präposition. Dies ist z. B. bei der Anapher der Fall, u. eine Nichtwiederholung der Präposition wie z. B. FS. 272, 10—12: *Her ausz allr Sprach vnd Nation, Geistlich und Weltlich, allen Stenden, Ausz allerley Herrschafft vnd Lânden* hat daher etwas Auffallendes, um so mehr als hier die zwei ersten Glieder der Anapher durch dazwischen eingeschobene Worte von einander getrennt sind. Das Versmaass ist es wohl, das hier die Wiederholung nicht gestattet hat.

2. Die Wiederholung der Präposition erfolgt in der Regel auch wenn die Substantiva zu zwei verschiedenen, z. B. durch die Konjunktionen *weder — noch, sowohl — als auch* einander gegenübergestellten Teilen des Satzes gehören. Einfache Setzung der Präposition findet jedoch in solchen Fällen bei Hans Sachs nicht selten statt, z. B. FS. 320, 63: *Spant sie weder in karn, noch*

wagen; Fsp. 26, 387: *Weder mit bösn noch guten worten;* vgl. FS. 222, 96: *Weder mit worten oder that,* vgl. ausserdem FS. 32, 119; 294, 82; Fsp. 26, 282; 45, 9 f.; — Fsp. 62, 277: *Schir pede pey tag vnd auch nacht:* vgl. FS. 364, 55—6: *Vnd bey dem vierbleterten Kle, Darzu auch der Zigeuner Eh.* Auch in diesen Fällen ist wohl die Nichtwiederholung auf Rechnung des Versmaasses zu stellen.

3. In einigen von den eben angeführten Beispielen wird die Wiederholung der Präposition nicht nur durch die Zweiteilung des Satzes, also durch die Form, sondern auch dadurch erfordert, dass die Substantiva der Bedeutung nach einander gerade entgegengesetzt sind. Auch allein kann dieser letztere Umstand in vielen Fällen genügen, um die Wiederholung der Präposition nötig zu machen und Nichtwiederholungen wie z. B. FS. 238, 64—5: *(die pawern) Das statfolck auf sich sahen dringen Mit gwerter hant zv fues vnd ros;* Fsp. 9, 162—3: *So musz ich in der Welt vmbwaten Zu Wasser, Land ein arm Lantzknecht* als Verstösse gegen den Usus erscheinen zu lassen, die sich der Dichter aus metrischen Gründen erlaubt hat.

4. Zu den letzterwähnten Fällen könnte auch noch gezogen werden Fsp. 7, 173 (= Fsp. 78, 240): *Auffs wölfeilst kauffen vnd thewrst geben.* Hier kommt aber ausser der entgegengesetzten Bedeutung der präpositionalen Bestimmungen noch der Umstand in Betracht, dass dieselben zu zwei verschiedenen Verben gehören, deren jedes seine Bestimmung in ihrer vollen Form bei sich haben sollte. Aus diesem letzteren Grunde hätte die Wiederholung der Präposition auch an folgender Stelle nicht unterbleiben sollen: FS. 208, 103—4: *Lest dich in armůt, kranckheit kleben, Schant, spot vnd aller hartsel leben.*

5. Eine einfache Setzung der Präposition, wie sie z. B. in folgenden Fällen vorkommt: FS. 318, 5—6: *Vom glauben vnd gaistlichen dingen Deten sie auf die pan auch pringen;* FS. 78, 10—11: *Da sagtens im ain fabel her Vom Venus perg vnd schönen frawen* muss wohl, genau genommen, auch als inkorrekt bezeichnet werden, da die mit dem Artikel verschmolzene Form zu dem letzteren Substantivum nicht passt (einige ähnliche Fälle aus der heutigen Sprache führt Matthias S. 96 an und vertheidigt die Fügung gegen den Tadel von Sanders, s. die Fussnote). Wieder in einem Falle wie Fsp. 7, 418—19: *Im leben vnd todt . . . Bin ich viel ehrlicher denn du* passt allerdings jene Form zu beiden Substantiven, ihre einfache Setzung scheint aber doch anstössig, wohl weil die Sprache in solchen Gegenüberstellungen zweier Substantiva von entgegengesetzter Bedeutung die Symmetrie gern hat, und diese hier durch das Fehlen der Bestimmung beim zweiten Substantivum verletzt

wird. Mit dem letzten Beispiele vgl. FS. 320, 51—2: *Das virde thier das ist nit gůet Im lebn noch dot* (s. auch das oben unter *2.* gesagte), ähnlich noch 320, 118—19.

6. Endlich wäre die Wiederholung der Präposition auch an folgenden Stellen dem korrekt sein wollenden Sprachgebrauch nicht gestattet: FS. 244, 6—7: *(ein waidman) auf allerley wild sich thieret, Als hinden, hirsen, schwein vnd pern;* 295, 85—9: *der Teufl . . . richtet an sein Zauberey Durch alte Weiber mit gferling sachen: Auff dem Bock fahren vnd wetter machen, Mit Warsagen vnd Dieberey;* Fsp. 47, 262—3: *Also das glůck gantz wunderbar Spilt mit mir, wie im lufft dem pallen.* Hier sind zu demselben Verbum zwei oder mehrere einander korrespondierende Bestimmungen getreten, die auch zu dem Verbum im gleichen grammatischen Verhältnisse stehen. Zum vollen und deutlichen Ausdruck dieses Parallelismus würde auch die Wiederholung der Präposition gehören, die jedoch metrisch nicht möglich war.

§ 55. In Anschluss an die oben besprochenen Ersparungen ist hier noch die einfache Setzung eines *zu* bei zwei oder mehreren koordinierten Infinitiven zu erwähnen. Die Erscheinung findet sich wie bei Luther (Beispiele bei Franke § 331, *9.*) so auch bei Hans Sachs recht häufig. Bei Verknüpfung der Infinitive durch *und* z. B. FS. 13, 14—16: *Wir thetten her einander ziln, Ide jr kunst frey zu bewern Vnd eine von der andern lern;* FS. 65, 454—7: *Got verleich vns allen genad, . . . Von allen sůnden vns zw keren, Vnd wuercken rechte frůcht der pues,* vgl. noch 132, 153—4, 229, 18—20; 234, 38; 386, 3—5 und oft; 165, 35—6: *Tag vnde nacht sie vns nach stelen, Vns zv jagen, fahen vnd felen;* 182, 102—3: *Vnd fecht an wie ain hůnd zv pellen, Zw hadern, zancken, grein vnd gron,* vgl. 165, 100 ff., wo jedoch wahrscheinlich ein Übergang aus abhängiger Konstruktion in unabhängige anzunehmen ist, sodass die Verba nicht Infinitive, sondern Praesentia sind und mit dem Verbum des V. 98 parallel stehen. Bei Verknüpfung durch *oder* 236, 6: *(macht) Sie zw zuechtigen oder straffen;* 248, 36—8: *Hoft etwan ein auszred zv finden, . . ., Oder ain ander fabel sagen;* durch *sondern* FS. 51, 93—4: *Nicht vnsern diebstal vns zw schencken, Sůnder die grosen zw vns hencken.* Bei asyndetischer Nebeneinanderstellung z. B. FS. 54, 100—102: *Paulus . . . geit ein ler, Die weibr mit vernůnft zv regiren Nicht pollern, grob tiranisiren;* 147, 64 ff.: *wer des pischoffz Ambt, zv predigen vnd zv schreiben, Vnd alle menschen fůnd auszwtreiben, Phalten seine schaffhert gesůnd,* vgl. noch 175, 84—7; 232, 101—2; 356, 85—6.

§ 56. Die Wiederholung der Negationspartikel in zwei gleichartigen Gliedern eines Satzes ist im Allgemeinen nicht notwendig, wenn die Glieder in engstem Zusammenhange durch die Konjunktion *und* aneinandergeknüpft sind (s. Matthias S. 279). Trotzdem hätte z. B. in einem Falle wie FS. 15, 46—7: *Auff das dir nimmer* (= nicht mehr) *misseling Vnd dich aber* (= wieder) *ein stercker zwing* die Wiederholung der Negation im zweiten Gliede wesentlich zur Klarheit des Sinnes beigetragen. In noch höherem Grade gilt dies von folgenden Stellen: FS. 148, 240—41: *(Nún wil ich) Weib, maid vnd knechten nit mer drawen So weit vnd mich auf sie verlasen;* 374, 70—71: *(vns wúndert) Das die narren von vns nit lasen, Vnd vnser gros vntrew versten.* Dass hier die Klarheit des Sinnes die Wiederholung des *nicht* erfordert, kommt wohl daher, dass die Partikel nicht durch ihre Stellung als den beiden Gliedern des Satzes gemeinsam bezeichnet ist. Um als gemeinsames Glied empfunden zu werden und nicht wiederholt werden zu müssen, hätte sie vor den nichtgemeinsamen Satzgliedern stehen sollen. Es hätte z. B. heissen sollen: dass die Narren nicht von uns lassen und unsere Untreue verstehen.

Sind die Glieder des Satzes asyndetisch aneinandergereiht, so entsteht durch die Nichtwiederholung der Negation oft Unklarheit. So z. B. in Fällen wie Fsp. 7, 201—2: *Sag, wenn du deins handels nit achtst, Dem gwin fúrsichtiglich nachtrachst*, etc.; FS. 222, 73—4: *Dem sol ich fort nicht mer vertrawen, Auf sein wort vnd zv sagen pawen.* Hier ist es zunächst nicht klar, ob man das zweite Glied als mit dem ersten gleichartig, oder als ihm entgegengesetzt zu fassen hat. Formell ist beides möglich, da ja Asyndese auch zum Ausdruck eines adversativen Satzverhältnisses dienen kann (vgl. Matthias, a. a. O.). Da nun hier, wie der Zusammenhang lehrt, die Glieder der Sätze nicht in adversativem, sondern in kopulativem Verhältnisse zu einander stehen, beide negativ sind, so hätte der Unklarheit durch Wiederholung der Negation vorgebeugt werden müssen, was aber wegen des Metrums nicht geschehen konnte.

§ 57. Durch die Nichtwiederholung der Konjunktion entsteht Undeutlichkeit FS. 23, 45—50: *(saget on) wie der mensch so hefftig nyd, Das er selb willig schaden lyd, Auff das der nechst auch het zu paden Vnd kem noch ynn eynn grôssern schaden, Ein aug gantz willigklich verlúr, Das sein nechster gar plendet wúr.* Hier wird man auf den ersten Blick das Glied *Ein aug — verlúer* als zu dem nächstvorangehenden Finalsatze gehörig fassen, während es, wie der Zusammenhang lehrt, mit dem entfernteren Modalsatze zu koordinieren ist.

In auffallender Weise unterbleibt die Wiederholung der Konjunktion Fsp. 85, 82—3: *(Dw pist) Wie ein sewstal gelidmasirt Vnd ein schuessel korp proporzenirt.* Zu demselben Subjekt treten hier zwei koordinierte Prädikate, deren jedes von einem verkürzten Komparativsatz bestimmt ist. Diese parallelen Sätze stehen zu einander im Verhältnisse der Beziehung, aber sind nicht mit einander koordiniert. Daher müsste, dem korrekten Sprachgebrauch gemäss, die Konjunktion in jedem wiederholt sein. Derselbe Parallelismus wie in dem eben angeführten Beispiele herrscht zwischen den Bestimmungen der Prädikate (hier Verba) FS. 81, 43—4: *Gleich ainem alten pferd sie kraist Vnd ainer sew grolszet vnd faist*, und die Bestimmungen sollten auch hier bei jedem Verbum in ihrer vollen Form stehen.

Nicht die Wiederholung derselben Konjunktion, sondern die Setzung einer ganz anderen wäre an der folgenden Stelle erforderlich gewesen, wenn der grammatische Ausdruck dem logischen Verhältnisse der Sätze genau angepasst wäre: FS. 26, 22—6: *Bald jch die sach thet vbersummen, Das es war ein solch Fasznacht spil, Vnd* (da) *mir der schwanck auch wol gefil, Stundt ich hinfür auff ein gemewr, Zu sehen recht die Abenthewr.*

G. Ersparung einer Flexionsendung.

Wir haben es hier mit einer bei Hans Sachs überaus häufig vorkommenden Erscheinung zu thun, die in mannigfacher Form und unter vielerlei Umständen auftritt. Mehrere verschiedene Fälle sind deshalb zu sondern.

§ 58. Zunächst besprechen wir den Fall, dass in kopulativen Verbindungen von Substantiven eins oder mehrere von den Gliedern unflektiert bleiben.

1. Sehr oft kommt es bei Hans Sachs vor, dass von zwei durch *und* verbundenen Substantiven nur das letztere die Flexionsendung erhält, welche dann zugleich auch für das erstere gilt. Beispiele: FS. 201, 85: *mit werck vnd worten*, dieselbe Verbindung noch z. B. 209, 117; 220, 96; 249, 125; — 249, 128: *Mit wort vnd wercken;* FS. 6, 99: *in wordt vnd gebern;* 242, 113: *mit wort vnd gedancken;* FS. 5, 64: *In schlőssern, dőrffern, mårck vnd stedten,* dieselbe Verbindung noch z. B. 124, 23; 262, 39; — vgl. FS. 9, 145: *Auff mesz vnd merckten;* FS. 37, 54: *Bey stetten,*

schlôssern, dorff vnd mercken; 130, 29: *Mit magd vnd knechten*, dieselbe Verbindung z. B. 259, 14; — 206, 93: *Mit lûeg vnd listen;* 302, 81: *Mit list vnd lûgen;* 330, 54: *Mit hendt vnd fûesen;* 360, 99: *an fûsz vnd henden;* FS. 68, 20: *Die jûngen, alten, arm vnd reichen;* 291, 120: *Bey Reich vnd Armen, alt vnd jungen;* Fsp. 47, 95: *Die er Freundt vnd Feinden beweyst;* ib. 268: *von feindt vnd freunden mein*; FS. 16, 142: *Mit stûl vnd pencken;* 21, 12: *Yhn flohen hasen, hind vnd hirschen;* FS. 29, 68: *Mit gensz vnd schaffen;* 115, 20: *auf steig vnd strasen;* 164, 118: *auf gabel vnd pesen;* 200, 6: *zwischen katzen, mews vnd raczen;* 209, 69: *ist leût vnd landen geferlich;* 220, 73: *in hecken, streûch vnd stawden;* 272, 12: *Ausz allerley Herrschaft vnd Lânden;* 310, 18: *(Mit) Dencz vnd kurczweilen mancherleyen;* 325, 93: *mit crewter vnd wûerczen;* 357, 61: *Von Khû vnd Kâlbern;* Fsp. 14, 133—4: *Thun vnde lasens, schimpf vnd scherzens So ist er gancz meins gmûet vnd herzens;* 23, 362: *Ach meines grossen leidt vnd schmertzen;* 15, 203: *vnter sew vnd rindern;* 25, 274: *von Dieb vnd schelcken;* 44, 103: *nach andern reich vnd landen;* 44, 193: *Wie gschehen ist vil Kông vnd Fûrsten;* 61, 287: *Vor etlichen monat vnd tagen;* 64, 154: *Ich steck zoren vnd vnmûecz vol;* 82, 322—3: *Vil neid vnd hases sich pegeit Vnd vngelûeck vnd vngemachs.* Hierher ist wohl auch zu stellen Fsp. 82, 276: *Hat nicht verstandn dein pit vnd sagen* (*pit* = bitten), womit vgl. Fsp. 63, 73: *Wo dw gleich ser thuest puchs vnd scharren.* Endlich sei in diesem Zusammenhange noch erwähnt Fsp. 34, 133: *Ich hab jn gschrien ob vnd vnden;* FS. 308, 9: *Ist stachlet, knopffet hind vnd vorn*, wo eine Ableitungssilbe ähnlich behandelt ist, wie in den obigen Beispielen die Flexionsendung.

Beispiele ähnlicher Unterlassung der Flexion beim ersten Gliede kopulativer Verbindungen von Substantiven finden sich häufig im älteren Nhd. (s. Kehrein § 140) und nicht selten auch in der späteren Sprache (s. Paul Pr. S. 280, vgl. auch Matthias, S. 98). Die Erscheinung ist wohl, nach Paul, als der grammatische Ausdruck einer Zusammenfassung der zwei kopulativ verbundenen Glieder zu einem einheitlichen Begriffe aufzufassen, also aus demselben Vorgange zu erklären, welcher auch in der Kongruenz eines Adjektivums mit dem zweiten Gliede einer kopulativen Substantivverbindung zum Vorschein kommt (vgl. § 53).

Der entgegengesetzte Fall, Flexion am ersten Gliede und Flexionslosigkeit des zweiten, kommt unseres Wissens nur an folgenden Stellen vor: FS. 249, 45: *Vnkûnent mit worten vnd werck;* 260, 28: *Paide mit worten vnd*

geper, und wir haben wohl darin nichts als eine Folge des Reimzwanges zu sehen.

2. Bei Verbindung der Glieder durch andere Konjunktionen ist die Unterlassung der Flexion des ersten Gliedes ebenso selten, wie sie bei Verbindung durch *und* häufig ist. Wir haben nur folgende Beispiele: FS. 112, 8: *An kirchweich oder denczen;* 229, 108: *Mit wort noch wercken.*

3. Häufiger findet sich die Erscheinung wieder in Fällen, wo die Glieder, denen die Flexion gemeinsam ist, sich ohne Verbindungswort aneinander reihen: FS. 10, 97—8: *Mit schurtzbeltzen, röcken vnd schauben, Mit porten, stauchen, goller, hauben;* FS. 37, 64: (ich stosse) *Die milt, gabreichen inn versagung* (möglicherweise könnte hier *milt* als Adverb genommen werden); 228, 59: (welch armer) *Den reich, gwaltigen ist anhangen;* 341, 93: *Wider die starcken, mechtig, reichen.* Hierher stellen wir auch die Fälle, wo in Verbindungen, die aus mehr als zwei Gliedern bestehen und das Verbindungswort nur vor dem letzten haben, das erste Glied flexionslos bleibt: FS. 94, 53: *Mit schweinspis, drischeln vnd mistgabeln;* 164, 118—119: *Auf schauffel, rechen vnd offen kruckn;* 219, 19: *sambt gleser, flaschen vnd wein* (vgl. 221, 51: *Sambt dieser Schar*); 291, 13—14: *allerley zungen . . . von Kelber, Ochssen, Schafn vnd schwein;* 358, 79—80: *Mit den Blutfreunden vnd Gesipten, Nachbawr, verwandten vnd geliebten;* 376, 15: *Mit fogel, mewsen vnd mit raczen;* Fsp. 76, 312: *Vol wuecher, rawbes vnd diebstal (: vberal).*

4. Dass mehrere Glieder einer kopulativen Verbindung flexionslos bleiben und die Flexionsendung mit dem letzten Gliede gemein haben, kommt nur selten vor. Wir haben nur folgende Fälle beobachtet: FS. 37, 55: *Inn königreich, prouintz vnd lendern;* 94, 9: *Mit gürtel, pewtel, nestl vnd daschen;* 180, 154: *Pey vnter, ober, jung vnd alten;* 318, 99: *Mit kandel, glesser vnd mit krawsen.* Inwiefern ähnliche Fälle wie die hier unter *3.* und 4. verzeichneten auch sonst in der frühnhd. oder der späteren Sprache sich belegen lassen, geht aus der uns zu Gebote stehenden syntaktischen Litteratur nicht hervor, und bleibt zu untersuchen.

§ 59. Ebenso gewöhnlich wie in Substantivverbindungen ist die Unterlassung der Flexion des ersten Gliedes bei Hans Sachs auch in kopulativen Verbindungen von Adjektiven.

1. Von zwei durch *und* verbundenen Adjektiven bleibt das erste regelrecht aus logischen Gründen flexionslos nur wenn die beiden Adjektiva zusammengefasst einen einheitlichen Begriff, eine einheitliche Eigenschaft be-

zeichnen. Wenn also Hans Sachs FS. 5, 7 sagt, dass er bei einem Spaziergang die Auen und Wälder *lustig mit rot vnd weyser plůt* fand, so bedeutet das, dass jede einzelne Blüthe zugleich rot und weiss war. Da er jedoch wohl nicht dies hat sagen wollen, sondern gemeint hat, dass auf den Auen rote und weisse Blumen prangten, so hätte er auch beide Adjektiva flektieren sollen. Dies gilt aus analogen Gründen auch FS. 50, 12 (= 108, 8): *Krawt, payrisch, gelb vnd weisse růeben*, wo jedoch *gelb* die mundartliche apokopierte Form für *gelbe* sein kann. An den sonstigen Stellen, wo er das erste Adjektiv flexionslos lässt, entsteht dadurch kein ähnlicher Verstoss gegen den Sinn, wie in den obigen Belegen. Wir ordnen die Stellen nach den Kasus: Fsp. 71, 85: *Mein auserwelt vnd lieber gast;* Fsp. 85, 433: *ein zornig vnd pôses weib;* unsicher ist Fsp. 56, 173: *Du heylosz vnd verfluchtes Weyb*, wo *heylosz* wahrscheinlich die mundartliche Form für *heilloses* ist; FS. 312, 11: *Diser zůechtig vnd erbern frawen* (Dat.); 359, 82: *Mit still vnd eingezogner Hand;* 210, 110: *Ain messig vnd zuechtigen wandel;* wahrscheinlich gehört nicht hierher FS. 19, 67: *Es kostet mein vnd deinen leyb*, wo *mein* die mundartliche Form für *meinen* ist; FS. 7, 153: *(Mit) Hinderlistig vnd bôsen tůcken;* 153, 126: *Mit hofflich vnd freůntlichen worten;* 206, 27: *von thieren jůng vnd alten;* bemerkenswert wegen der Wiederholung der Präposition 221, 91: *In ober vnd in vndern stenten*, ebenso wegen des Artikels beim letzten Gliede Fsp. 83, 14: *Paide pey nahet vnd den ferren.*

Die hier belegte Erscheinung findet sich auch vor und nach Hans Sachs in der Sprache sehr häufig. Ein paar Beispiele aus dem Mhd. giebt Erdmann § 56, viele aus frühnhd. Zeit Kehrein § 145, aus dem 17. Jh. Erdmann § 57, vgl. auch Paul, Pr. S. 280. Im modernen Sprachgebrauche ist diese Art von Unterlassung der Adjektivflexion nach Erdmann nicht mehr nachweisbar.

Den obigen Belegen reihen wir hier an FS. 250, 126—7: *Da die lewt nit so zerlich warn, Sůnder anhebig vnd aufrichtiger,* wo das Komparativsuffix wahrscheinlich beiden Adjektiven gemeinsam ist (die Möglichkeit *anhebig* als Positiv zu fassen ist allerdings nicht ausgeschlossen). Dasselbe ist wohl von dem Suffix anzunehmen auch 290, 7—8: *(Von den Affen) Hab ich von eim Zygeuner ghort Gar wunder vnd seltzame wort*, denn *wunder* als Substantiv zu nehmen verbietet das vorangehende *gar*, welches wohl kein Substantiv bestimmen kann.

2. Bei Verbindung der Adjektiva durch *weder — noch* fehlt die Flexionsendung des ersten FS. 242, 92: *Het weder grab noch schwarczes har;* Fsp. 26, 282: *Weder mit bôsz noch guten dingen.*

3. Am häufigsten kommt bei Hans Sachs Flexionslosigkeit des ersten Gliedes einer Adjektivverbindung vor, wenn die Glieder asyndetisch nebeneinandergestellt sind. Zwar ist es hier manchmal schwer festzustellen, ob man in dem unflektierten Worte das Adjektivum, oder das entsprechende Adverb zu sehen hat. In den meisten von den folgenden Belegen scheint uns die erstere Auffassung wegen des Sinnes die einzige mögliche; auch in den übrigen scheint sie uns einen besseren Sinn zu geben und ist uns daher wahrscheinlicher als die letztere; in Fällen, wo man zweifelhaft sein kann, setzen wir nach dem unflektierten Gliede ein Komma, um anzudeuten, dass wir es nicht als Adverb fassen. Goetze scheint hier in der Interpunktion keiner bestimmten Regel gefolgt zu sein. Unsere Belegstellen nun sind folgende: FS. 67, 100: *wûrt ein alt vnwerder gaûl*, ähnlich 151, 82; — 149, 67: *Ein fûechslistig, gescheider mon;* 315, 8: *Ein schwarcz zottender fogel hund;* 373, 99: *kein weis gelerter mon;* Fsp. 32, 285: *Ach standthafft, frummer, Erbar Herr;* Fsp. 53, 130: *Ein geitzig grosser Munch;* FS. 210, 116: *ain leichtfertig, rohes leben;* 315, 109: *ain sanft, weiches pet;* Fsp. 45, 54: *ein schôn, junges Weib*, ähnlich ib. 64; — FS. 353, 93—4: *fleise dich ... Aufrichtig pstendiger warheit;* — 207, 45: *Mir ainfeltig, künstlosen armen;* 276, 123: *Mit einem gut vnschuldigen gwissen;* 343, 51: *Aim erber weissen rat;* Fsp. 30, 223: *In solchem sicher, friedling leben;* FS. 234, 89: *Vor der falsch, schnoden geitczikeit;* 293, 6: *In seiner erst, blûhenden Iugendt;* — FS. 41, 3—4: *Daruor sach ich ein ... Eineugig zerhaderten alten;* 153, 149: *Fuer ain erber messigen wandel;* 305, 77: *hab ein frôlich guten mut;* Fsp. 26, 368: *Für ein grob, vnuerstanden stock;* FS. 51, 58: *(Wir suchen) Die war, strengen gerechtikait;* — FS. 65, 106: *Ein vnzelich sûm Gelb duerrer sel;* 111, 39: *Vil schwind selczamer possen;* 355, 40: *Ein gros plat klain gesotner fisch;* — 315, 122: *(mit) feintselig, arglistigen dûecken.* Beispiele dieser Art finde ich bei Kehrein keine; ein paar mhd. und einige nhd. bringt Erdmann §§ 56—57.

Flexion des ersten, Flexionslosigkeit des zweiten Gliedes zeigt Fsp. 50, 297: *jr vhnwirses, schnôd ahnschnauffen.*

4. Zwei asyndetisch nebeneinander stehende Adjektiva bleiben unflektiert und erhalten ihre Flexionsendung aus dem dritten FS. 77, 1—3: *Als Calandrin, dem kargen, Vnhôfflich geiczig argen, Ein erb war zw gestorben.*

§ 60. Die Ersparung einer Flexionsendung beschränkt sich bei Hans Sachs nicht auf kopulative Verbindungen und asyndetische Zusammenstellungen

von Substantiven und Adjektiven. Es ist eine bei ihm sehr oft vorkommende Freiheit, dass bei Verbindung von attributivem Adjektiv mit einem Substantiv eins von beiden unflektiert bleibt. Wir besprechen hier zuerst den Fall, dass die Flexionsendung am Substantiv erspart wird.

1. Für diese Erscheinung haben wir folgende Belegstellen: FS. 2, 31: *Wan du wolst meines Dantzen lachen*, bei substantivierten Infinitiven noch 306, 114: *Das ich meins wundern gar abkúmb;* 361, 20: *Desz liegens vnd auch desz falsch schwern (: wern);* Fsp. 42, 86: *Helfft mir doch dieses Eyffern ab;* 45, 45: *Seins eyfern je nit ab wil lassen;* 71, 139: *Von wegen des kinder gepern (: wern);* bei sonstigen Substantiven FS. 6, 116: *Der dôrfft sichs* (= des) *Narrenbad nit schemen;* 48, 126—7: *Vnsers Fenlein . . . Faulkeyt;* 101, 51: *klopfet an des thúmprobst pforten;* 186, 7: *aines abent spat* (hier könnte vielleicht das *s* der Endung vor dem folgenden anlautenden *s*-Laut unbezeichnet geblieben sein, wie es wohl in der Aussprache damit verschmolz; 342, 11: *(geziegen) Ains epruechs oder ains diebstal (: zv mal);* 380, 58: *aus des wasser qûal;* Fsp. 26, 289: *Ich weysz des Maul natur;* 32, 86: *Kains gulden der zal manglen wirt;* Fsp. 39, Bühnenbemerkung nach V. 213: *Des júngling Vatter* (regelmässig dagegen ebda Bühnenbem. nach V. 216); 42, 351: *Herr Vlrich, des schimpff ist genung;* 62, 107: *Nun wil ich in als laid ergeczen:* 67, 42: *Peschleûs . . . des himel thor;* 67, 54: *des most vberflûessig menig;* 72, 118: *meins handel ich genews;* 76, 355: *(das der arzet) Sich meins vetter Mosse anôm;* 82, 157: *Mein weib darff meins zoren;* hierher gehört aber nicht Fsp. 25, 207: *Man hat mir des Iar drey gehangen*, denn hier ist *des* wohl die mundartliche Form für *das* = dieses. In den obigen Beispielen hat das Substantiv eine einfache attributive Bestimmung; in den folgenden eine zweifache: FS. 225, Überschrift: *Fabel des arbeitsamen ochsen vnd mûesigen wolff;* 372, Überschrift: *Ein lobspruech ains raysing knechtel;* 380, 59: *Des doten esel pauch;* Fsp. 31, 335: *Von wegen meines frommen Vatter (: Wohlthatter);* ib. 368: *Von wegn des liebsten Vatter mein*, ähnlich ib. 372; — 70, 317: *aus lieb des zeitling gûet (: thûet).* Beispiele ähnlicher Unterlassung der Kasusbezeichnung bei Substantiven kommen nicht nur bei Hans Sachs, sondern auch sonst in der älteren Sprache vor, s. Kehrein § 136; sogar noch heutzutage findet sich diese Erscheinung, besonders bei Fremdwörtern, Namen und Titeln, aber auch bei substantivierten Infinitiven, s. Matthias, S. 47.

In allen von uns bisher verzeichneten Belegen, wie auch in den von Kehrein und Matthias gegebenen Beispielen fehlt am Substantiv die starke Endung des Genit. Sing. Fehlen anderer Kasusendungen kommt bei Hans

Sachs zwar auch vor, ist aber viel seltener, als das Fehlen der Genitivendung. Wir kennen nur folgende Fälle: Fsp. 19, 295: *Auch pit wir den herr sambt alln gesten;* Fsp. 82, 90: *mit der gleichen hendel arck;* ferner im Reime FS. 322, 19—20: *Pis er den haffen dürch die menig Ausfüelt mit den ersparten pfenig;* der letzteren Stelle ist vielleicht analog FS. 2, 13—14: *In dem Wirtzhausz an allen ort Sein aygen wort jr keyner hort;* dass hier *ort* wegen des Reimes für *orten* steht, wie im vorhergehenden Falle *pfenig* für *pfennigen*, ist uns wahrscheinlicher, als die Annahme, dass *allen* als schwach flektierter Dat. Sing. im Sinne von *jedem* zu fassen sei, was jedoch wohl auch nicht unmöglich wäre. Ein ganz ähnlicher Fall findet sich noch Fsp. 83, 210: *Es felet mir in allen stücck* (Reim auf *glücck*); vgl. ausserdem Fsp. 77, 111: *Mit der geleichen puebenstücck* (Reim auf *glücck*).

Was nun die Ursache des Fehlens der Flexionsendung am Substantiv, die Erklärung der Erscheinung betrifft, so liegt sie wohl schon in der Bezeichnung: Ersparung. Das Kasuszeichen fehlt am Substantiv, weil der Kasus durch das Attribut schon hinlänglich bezeichnet, eine nochmalige Setzung der Flexion am Substantiv daher unnötig schien. Der Genit. Sing. hob sich am schärfsten von allen übrigen Kasus ab und war an dem stark flektierten Attribut am leichtesten kenntlich; daran liegt es vielleicht, dass seine Endung besonders häufig am Substantiv erspart wird. Eine ähnliche Ersparung ist es, wenn heutzutage nur *des Cäsar*, *des Klopstock* etc. gesagt wird, wo es früher auch *des Cäsars*, *des Klopstocks* etc. heissen konnte, s. Erdmann § 36.

In allen oben angeführten Beispielen stand das Attribut vor dem Substantiv. Bei nachgestelltem Attribut ist das Kasuszeichen am Substantiv erspart unseres Wissens nur FS. 125, 23—4: *Wo dw in kranckheit herben Waist lewt, so wöllen sterben;* dieselbe Verbindung kehrt 312, 49—50 wieder.

2. Nicht seltener als die unter *1.* besprochene Erscheinung kommt bei Hans Sachs der ihr entgegengesetzte Fall vor, dass nämlich in Verbindungen von attributivem Adjektiv mit einem Substantiv die Flexionsendung am ersteren erspart wird.

Am öftesten geschieht dies, wenn ein einfaches Adjektivattribut dem Substantiv vorangeht. Der Kasus ist am Substantiv deutlich ausgeprägt FS. 163, 38: *Mein pirsens hab ich kain glueck* (vgl. unter *1.* die Fälle, wo das Attribut flektiert, der substantivierte Inf. unflektiert ist); Fsp. 53, 321—2: *Der Münch gert . . . dein geltes vnde guts;* Fsp. 13, 339—40: *So gieb ich . . . herberg . . . Ellend wandrern in meinr dafern;* FS. 180, 127: *Hab ander lewten gebn die schueld.* Auffallender als in diesen Belegen ist die Ersparung in Fällen, wo der Kasus nur an der ersparten Adjektivendung zu erkennen gewesen

wäre, wie FS. 67, 62: *Můst ich gros arbeit mich erniten* (*sich ernieten* wird sowohl bei Hans Sachs als sonst nur mit Genit. konstruiert, s. DWb.); Fsp. 9, 122: (ihr) *treibt darmit doch grosz betrug;* Fsp. 30, 26: *Das zu Rom hat grosz preisz vnd rum,* ähnlich noch Fsp. 36, 166: *Weyl er am Vieh vns thut grosz schaden;* Fsp. 85, 437: *Schaw, wie dreipt so gros spot und dant.* [Sollte in diesen Fällen *gross* adverbial gebraucht sein, im Sinne von *sehr* oder gar von *viel?* Die Beispiele, welche Sanders, Wb. unter *Gross* 1), für den Gebrauch von *gross* als Adverb anführt, stimmen nicht zu den hier verzeichneten Fällen]; vgl. ferner Fsp. 14, 73—4: *Wer kostlich wein, wilpret vnd fisch Allein duet essen* (möglicherweise ist hier *kostlich* Adverb); hierher wäre auch zu stellen Fsp. 8, 361—3: *thu dich befleissen mehr, Täglich daheim ob deinem Tisch Gut schleckerbiszlein, Vögel vnd Fisch,* wenn nicht vielmehr irgend eine Kontamination vorliegt, indem bei *gut* ein den Akkusativ regierendes Verb dem Dichter vorgeschwebt hat; unsicher ist auch Fsp. 49, 285—6: *(Ich wil) vol klauben den busen mein Grosz wacken vnd der kisselstein,* wo vielleicht ein Konstruktionswechsel anzunehmen ist, sodass nach *voll* erst die unflektierte Pluralform, dann der Genit. folgt. — In folgenden Fällen ist das Substantiv ausser von dem Attribut noch von einer Präposition bestimmt: FS. 6, 143—4: *Inn vntern vnd in öbern stenden, Inn geystlich, weldtlich Regimenten,* ähnliche Verbindung noch 221, 92; 224, 108; — FS. 21, 40: *Allain mit ander lewten gůt,* ähnlich FS. 87, 52—3; 258, 19, 21; 333, 17; — FS. 42, 37: *(Ich bin) Hefftig, verwegen an all ortn* (vgl. unter *1. an allen ort:* FS. 2, 13—14); 147, 96: *Mit vnzälich listen vnd rencken;* 190, 113: *Aus grobem schimpf vnd neidig dücck:* Fsp. 5, 258: *Mit kopffwee vnd vnördig wesen;* Fsp. 23, 10: *Mit geschenck, köstlich tranck vnd speysz;* Fsp. 85, 284: *Ich kan auf gancz ertpoden nichs* hat man wohl die Flexionslosigkeit von *gancz* aus der Analogie des Gebrauches bei Länder- und Städtenamen zu erklären; nur scheinbar ist vielleicht die Flexionslosigkeit des Adj. Fsp. 85, 557: *Vur irs vaters, euer schwehers, haůs,* wo das auslautende *s,* da es in der Aussprache mit dem folgenden Zischlaute verschmolz, wahrscheinlich aus diesem Grunde auch in der Schreibung unbezeichnet geblieben ist. — Ein zwischen die Präposition und das Adj. eingeschobener Genit. scheint den Dichter in folgenden Fällen irregeführt und über den Kasus des Adj. getäuscht zu haben, was um so leichter geschehen konnte, als der Kasus auch am Subst. nicht gekennzeichnet ist: FS. 65, 26: *Von der sel ůeber grose meng;* vgl. Fsp. 67, 54: *Zw des most vberflůessig menig;* FS. 144, 45: *(sicher) Vor des veindes grewlich geschos.*

Von zwei dem Subst. vorangehenden attributiven Bestimmungswörtern, die zu einander im Verhältnisse der Einschliessung stehen, bleibt öfters das letztere unflektiert. So z. B. FS. 183, 101: *Zw dem gronat, wünderlich alten;* 344, 83: *Mit irem aigen sinnig kind dragen;* Fsp. 7, 339: *Thuts an eim ander ort ausztragen;* 14, 202: *Suech dir ein schalckhaftig juristen;* 18, 71: *Mit mein listig gespenst vnd lügen;* 18, 176: *Ich will heim zu meim fallent vbel;* 18, 259: *Mit deinr verlognen gifftig zungen;* 26, 365: *nach meim vnfreuntlich brauch;* 64, 254: *Hat ain losz gselln an sich gehangen;* 82, 307: *(pegern) ains ainig mannes zorn* (vielleicht hier *ainig mannes* = ainigm mannes = ainign mannes). Seltener wird die Flexionsendung am ersteren Bestimmungsworte erspart. So FS. 350, 132, trotzdem der Ausdruck durch die Ersparung einen anderen Sinn erhält als der Dichter gewollt hat: *Vns, dem gancz gaistlichen geschlecht* (gemeint ist: dem ganzen geistl. Geschl.); ausserdem Fsp. 32, 71: *Mit ander mein geferten allen;* 35, 57: *(Mit) ander Adelichen dingen;* FS. 258, 34: *mit ander erlichen gesten;* Fsp. 76, 123—4: *Darmit ich . . . helffen thw Al anderen gespilen mein.*

Ob Ersparungen von der in diesem Paragraphen besprochenen Art auch anderswo als bei Hans Sachs in der Sprache vorkommen, können wir nicht angeben. Beispiele wären erst zu sammeln.

§ 61. In Anschluss an die in den vorhergehenden Paragraphen behandelten Erscheinungen werden wir am zweckmässigsten auch folgende Fälle von Unterlassung der Kasusbezeichnung betrachten, in denen für die am Substantivum fehlende Flexionsendung kein Ersatz in einem anderen, flektierten Worte da ist.

Wir meinen zunächst einige Fälle, wo das Subst. nach Präpositionen ohne Kasuszeichen bleibt. Die Stellen, wo man neben der Abhängigkeit des Subst. von der Präposition keine sonstigen Umstände zu berücksichtigen hat, sind bei Hans Sachs sehr selten; wir kennen nur FS. 65, 313: *Die sich mit diebsnegl haben krawet;* FS. 84, 34: *Mit scheltwort dettens den aufwecken.* Einige moderne Belege derselben Anomalie bringt Matthias, S. 141 f. — In Fällen wie FS. 85, 1—2: *Ein frawen kloster war In Lampartten vor jar;* Fsp. 69, 114: *Hüet sich vor pfaffen vnd vor taüber* (: *saüber*) kommt beim Fehlen der Flexionsendung auch die Reimnot als Grund mit in Betracht. — Ein zwischen die Präposition und das Subst. eingeschobener Genitiv hat wohl die Anomalie mit veranlasst FS. 341, 4—5: *War aüf die wolff ser zornig wueten, Von seins herren schaff ab zw weissen* (es ist von vielen Schafen die Rede), neben dem Reimbedürfnis wohl auch Fsp. 5, 82—3: *Vil tausent*

man verlorn den leib Von wegen des Leuiten Weib. Moderne Beispiele derselben Erscheinung bei Matthias, S. 142.

Auch an folgenden Stellen, wo das Subst. von keiner Präposition abhängig ist, hat wohl der ihm vorangehende Genitiv zur Verwirrung der Konstruktion beigetragen und mit dem Reimzwang zusammen die Unterlassung der Kasusbezeichnung verursacht: FS. 22, 73—4: *Leydlicher sey des freůndes wundt, Dann der kus eines veindes mundt* (= vom Munde eines F.); Fsp. 16, 153: *O wee mir meines hertzen leid* (: *all beid*).

Was die folgenden Beispiele betrifft, müssen wir uns darauf beschränken, die Flexionslosigkeit des Subst. darin zu konstatieren, ohne irgendwelche sichere Erklärung der Erscheinung geben zu können. Nur soviel sei gesagt, dass man sich als Veranlassung der Anomalie vielleicht am ehesten eine Art von falscher Analogie oder irgend eine Assimilation oder Attraktion denken könnte. So wäre z. B. FS. 58, 33—4: *Mit wiltpret, fǒgel, fisch vnd gmůes*, das Wort *fǒgel* ohne Endung geblieben nach Analogie der danebenstehenden kollektiven Speisenamen, die keine Endung aufweisen; einen ähnlichen Fall hätte man 211, 16: *(ain disch) Mit fǒgel, hůner, wilpret frisch*, vielleicht auch 251, 74: *Von wiltpret, fǒgel vnd von fischen*, wo jedoch auch die Flexion des letzten Subst. vielleicht zugleich für das zweite gelten kann. Ferner hätte sich FS. 37, 59: *(ich) Stos die gwalting von leut vnd lant* das Wort *leut* in der Form nach *lant* gerichtet, und 317, 104: *Weder pey fiech oder pey lewt* nach *fiech* (wenn nicht die Anomalie an der letzteren Stelle schon durch die Reimnot genug erklärt ist); aber über einen Fall wie 153, 95: *Er thůet im vnd ander lewt schaden* kommt man mit einer ähnlichen Annahme wohl kaum hinweg. Wieder in Fällen wie 345, 42: *Aus lawter petrueg, renck vnd list;* 138, 20: *(ein wolff) Mit schenckel* (= Schenckeln), *leib, schwancz vnd dem haubet;* 161, 24: *In hefen vnd in kesel* (= Kesseln) *průedeln* wäre es vielleicht nicht unmöglich anzunehmen, dass die endungslosen Worte ohne Endung geblieben sind, weil die koordinierten Subst. keine Endung zeigen. Mit diesen Fällen liessen sich vergleichen 343, 24: *(gedicht) Allerley art vnd gsang* (= Gesanges); 345, 61: *Der gleich auch seiner kind vnd weib* (statt: seines Weibes); Fsp. 63, 97—8: *Hab mich verwegen Als glůecks, frides, wolfart vnd segen*, nur dass hier auch der Einfluss des Reimes mit im Spiele ist. Auf eine Attraktion an das unflektierte Bestimmungswort wäre die Endungslosigkeit des Subst. zurückzuführen Fsp. 68, 431—3: *Aus solchn vnd der gleich laster springen . . . Armůt, kranckheit, schant vnd schaden;* FS. 167, 20: *(narren) Von allerley stent, jung vnd alt;* FS. 43, 20—21: *Der schlueg die trummel . . . Mit zwey kochlǒffel;* Fsp. 5, 298—9: *Benedab . . . Mit zwey vnd dreissig Kǒnig ver-*

darb; Fsp. 26, 138: *Der war Kŏng David Vattr;* der Einfluss des Reimes ist mit zu berücksichtigen FS. 385, 5—6: *Die hat jr neigung vnd begir Auff Erd nach viererley Thier.* Nur scheinbar ist das Fehlen der Endung FS. 181, 163—4: *(sich hůeten) Vor des deuffels gspenst allerley, Warsagen, treům vnd zawberey,* wo *treům* die der Umgangssprache eigene nachlässige Aussprache von *Träumn* wiedergiebt, mit Verschmelzung der beiden Nasalkonsonanten zu einem. — Wie schon oben gesagt, wir bilden uns nicht ein, mit den oben gegebenen Andeutungen die Erscheinung sicher und genügend erklärt zu haben. Faktum bleibt nur, dass in all diesen Fällen das Substantiv ohne Kasuszeichen erscheint. Für möglich würden wir die angedeutete Auffassungsweise dieses Faktums doch immerhin halten. Vielleicht ist es aber ebensogut möglich, dass hier keine weit hergeholten Erklärungen nötig sind, sondern dass wir die erwähnten Anomalien einfach als — Schusterdeutsch hinzunehmen haben, verwandt mit dem heutigen „Kauderwelsch der groszstädtischen Massen", von dem Matthias, S. 142 a E. spricht. — Aus andern, früheren oder gleichzeitigen Schriftstellern stehen uns Beispiele ähnlicher Erscheinungen, wie die hier behandelten, nicht zu Verfügung, es ist aber nicht unwahrscheinlich, dass solche in der Übergangszeit aus dem Mhd. ins Nhd. und im 16. Jh. vorkommen. Die Litteratur ist unseres Wissens daraufhin noch nicht untersucht.

§ 62. Eine Eigenheit, welche die Sprache des Hans Sachs mit dem Mhd. (s. Paul, Gr. § 212, Anm. 1) gemein hat, und die wir hier noch kurz zu betrachten haben, ist der Gebrauch des unflektierten *vil* statt eines Genitivs oder eines Dativs.

Selten ist der erstere Fall. Beispiele wie FS. 16, 213: *(er) niet sich als dann nicht vil gutzs* bieten nichts vom mhd. Gebrauche Abweichendes. Auffallend ist aber 362, 27—8: *Er solt sich im Kloster der armen Vil Brůder miltiglich erbarmen.* Die Stelle wäre allerdings ganz einfach durch die Annahme erklärt, dass *vil* hier, wie allgemein im Mhd., im Sinne von *gar, sehr* verstärkend zum Adverbium *miltiglich* gefügt ist. Aber Hans Sachs scheint *vil* in diesem Sinne nicht mehr zu gebrauchen; wenigstens haben wir keine Stelle bemerkt, wo es so gesetzt wäre. Der Genitiv *der armen Brůder* kann auch nicht als von *vil* abhängig gedacht werden. Sollte der Dichter mit den Worten *der armen vil Brůder* vielleicht der vielen armen Brüder gemeint haben?

Sehr gewöhnlich ist der Gebrauch von *vil* statt des Dativs. Verhältnismässig selten behält das Pron. in solchen Fällen seine gewöhnliche Rektion bei. Dies geschieht meistens in formelhaften Wendungen wie FS. 60, 61: *So*

entrinst vil vngemachs, in denen durch den Genitiv der Reim auf *Hans Sachs* hergestellt werden musste; so noch durch dieselbe Verbindung z. B. 103, 61; 124, 61; 195, 119; 316, 129 und oft[1]); doch steht der Genitiv nach dem einen Dativ vertretenden *vil* auch ein Paar Mal im Inneren des Verses, z. B. 195, 10: *Das er vil vngluecks pleibt entladen;* 328, 144—5: *Hab auch mein kellerin verlorn Sambt vil hausracz.* Weitaus am häufigsten tritt aber an die Stelle des Genitivs ein Dativ, z. B. FS. 5, 71—2: *Also ich vmb gezogen bin In sehr vil landen her vnd hin;* 7, 154: *Mit vil hie vngenanten stücken*, vgl. noch z. B. 69, 7; 126, 17; 156, 62; 192, 62—3; 195, 32; 197, 88. Unsicher bleibt der Kasus in Fällen wie FS. 58, 143—4: *Mit klaidung . . . Vnd ander der gleich vnkost vil;* 78, 26: *Nach vil pit dettens in gewern.*

H. Ersparung mehrerer Satzglieder.

§ 63. Allgemein sprachüblich ist es, dass in der Wechselrede die Wiederholung mehrerer Worte unterbleibt, auch wenn diese in der Gegenrede nicht dieselbe Form haben würden, die sie in der Rede haben. Fälle wie Fsp. 4, 288—9: (Der Mann:) *So wil ich dir dein maul zerschlagen.* (Die Frau:) *Wem? mir?* finden sich ja überall in der Sprache und bieten nichts für Hans Sachs Eigenthümliches. Bemerkenswert und für die Sprache unseres Dichters charakteristisch ist es dagegen, dass er auch ausserhalb der Wechselrede, in fortlaufender Erzählung, bisweilen mehrere Satzglieder desselben Satzes erspart.

Diese Freiheit gestattet er sich in der Regel nur in dem letzteren von zwei koordinierten Sätzen. Gewöhnlich sind die ersparten Satzglieder Subjekt und Verbum finitum. So ist z. B. 238, 106—7: *Mainten, in wer was widerfarn*, (sie wären) *in dem scharmützeczel gar vmbkúmen* das Subjekt des letzten Satzes durch einen Dativ (vgl. oben § 13, *1.*) und zugleich das plurale Hilfsverb durch das singulare des vorhergehenden Satzes vertreten (vgl. oben § 44, *1.*). Ähnlich verhält es sich mit dem Verbum Fsp. 85, 13—15, wo von den Erzählungen des Äsop gesagt wird: *Wie schimpflich war all ir ansehen, Doch* (waren sie) *durch klaren verstand geschehen Vnd raichten zv aim gueten ent*, das ersparte Subj. aber ist von einem Possessivum vertreten (vgl. oben § 15); ferner Fsp. 80, 347—9: *(dann) Wil ich . . . ain kuechel hoff halten Paide mit jungen vnd mit alten*, (wir wollen) *Die fasnacht pey einander ver-*

[1]) Mit diesen Fällen vgl. FS. 256, 34: *mit weng geschrais* (Reim auf *krais*).

zern, wo das ersparte plurale Subj. von zwei verschiedenartigen Gliedern (ich — mit jungen etc.) des vorhergehenden Satzes vertreten wird (vgl. oben § 18, *1.*). Leichter als in den obigen Fällen konnte die Wiederholung des Verbums an folgender Stelle unterbleiben, wo die vom zweiten Satze verlangte Person formell mit der im ersten gesetzten zusammenfällt: 234, 73—5: *Solt mich auch forcht vnd sorg vexieren, . . .*, (sollte ich) *Mein zeit in solchr vnrw vertreiben.* Zugleich mit der Setzung eines neuen Subjektes wäre auch die Wiederholung derselben Verbalperson nach dem heutigen Sprachgebrauch notwendig in einem Falle wie Fsp. 43, 254—5: *Oder jm ist sonst was geschehen, Oder* (er ist) *von seinen sinnen kummen;* ebenso FS. 286, 55—7: *zu ehren euch gemein Sol jhm das leben gschencket sein*, (er soll sein) *Gantz quitledig all seiner band*, wenn die Stelle überhaupt in der bezeichneten Weise aufgefasst werden kann, was uns nicht unmöglich, aber auch keineswegs sicher scheint; vielleicht stehen die Worte *gantz quitledig* im Sinne von *sodass er gantz q. wird;* dann wäre die Stelle zu den unten § 73 erwähnten scheinbar eingliedrigen Sätzen zu führen.

Nur eine Stelle haben wir beobachtet, wo Subjekt und Verbum finitum in dem letzteren von zwei nicht gleichwertigen Sätzen, die nicht in direkter Beziehung zu einander stehen, erspart sind: 345, 44—7: *Der halb sol mir dein prot mein kelen Verstopfen nicht, das ich thw schweigen, Sünder* (ich thu) *mit lawtem pelln anzeigen, Ein dieb der ste in gener ecken.* Übrigens ist es nicht ganz sicher, dass die Stelle so zu nehmen ist, wie wir angedeutet haben. Möglich wäre auch, dass der Dat. *mir* in dem ersten Satze, mit welchem der von *Sünder* eingeleitete Satz parallel steht, das ersparte Subj. *ich* vertritt, zu dem als Verbum *sol* aus demselben Satze zu entnehmen ist. Die im Citate angegebene Erklärung scheint uns jedoch die am nächsten liegende zu sein.

Nur eine Stelle können wir endlich anführen, wo in dem letzteren von zwei koordinierten Sätzen Subjekt und Objekt erspart sind: Fsp. 21, 100—101: *Beschert Gott eim was vnd thät* (einer was) *finden, Will man, er soll es wider geben.* Zur Nichtwiederholung des Objekts vgl. § 33, *2.*

J. Konstruktion ἀπὸ κοινοῦ.

Während wir bis jetzt mit wenigen Ausnahmen nur solche Arten von Sparsamkeit im Ausdruck betrachtet haben, in denen das einfach gesetzte Satzglied vor denjenigen Gliedern steht, denen es gemeinsam ist, werden wir im

Folgenden solche Fälle zu besprechen haben in denen das gemeinsame Glied zwischen den nichtgemeinsamen seine Stelle hat.

§ 64. Wir müssen dabei von Fällen ausgehen, die sich mit der asyndetischen Aneinanderreihung von Sätzen sehr nahe berühren, und es empfiehlt sich daher, hier zuerst ein kurzes Wort über diese Asyndese bei Hans Sachs vorauszuschicken.

Wunderlich, Sb. S. 237, hat die asyndetische Nebeneinanderstellung von Sätzen als für den Satzbau Luthers besonders charakteristisch und in seiner Sprache sehr häufig hervorgehoben [einige Beispiele der Asyndese zwischen Sätzen auch bei Franke § 334, *1.* b)]. Gerade dasselbe gilt von dem Asyndeton auch bei Hans Sachs. Auch bei ihm kann man zugreifen wo man will, um Belege dieser Redeweise in Fülle zu finden. Wir haben deren schon oben bei verschiedenen Gelegenheiten eine Menge angeführt (s. z. B. §§ 5 a. E., 12—16; 18; 33, *1.*; 35, *1.*; 37; 42), verzeichnen aber hier noch eine Reihe von Fällen. Zwischen zwei Gliedern eines Hauptsatzes findet sich Asyndese z. B. FS. 3, 8—9: *Der was vntrewer liste vol, Sprach*, ähnlich 14, 22—4; 30, 77—8; 210, 97—8; — 75, 34—5: *Klopft pald an seiner schwieger haus, Sagt, was ir dochter het pegangen*, ähnlich 214, 26—8; 240, 41—2; — 62, 35—6: *Die fraw erschrack, der mon hört klopfen, Fregt;* 21, 8—9: *Mit freuden ein gen holtz er loff, Gedacht*, ähnlich 211, 21—2, 72—3; — FS. 7, 20: *Ich hub an, thet yn weytter fragen;* 16, 129—30: *du leugst Als was du redest, mich betreugst* (so scheint uns die Interpunktion von Goetze zu ändern zu sein); 209, 112—117: *Denn thůet in wendig heraůs prechen Sein . . . neid und has, . . ., Lest sechen sich mit werck vnd worten* (vor *Lest* scheint uns der Sinn ein Komma zu fordern). Mehrere Glieder eines Hauptsatzes stehen asyndetisch neben einander z. B. 15, 15—16: *Das hört ein Fuchs, kam bald zu jr, Sprach;* 103, 16—18: *Da kam ein wolff, . . ., Loff zv der enten, fiel hinein;* 118, 14—15: *Die wart des in, kam zw ir dar, Fragt*, vgl. noch z. B. 218, 9—11; 251, 24—5; 298, 9—11. Häufig kommt Asyndeton auch zwischen zwei Gliedern eines Nebensatzes vor, z. B. 240, 39—41: *Als der můelner das puech auf thet, Sach, das es zwayerlay schrift het, Da* etc. ähnlich bei Sätzen die durch *als* eingeleitet sind noch z. B. 155, 53—7; 160, 78—80; 223, 54—6 und oft; Fsp. 5, 271—3: *Sag! wenn dirs glůck denn wend den růck, Sitzest vnd all dein Gelt verlemerst, Wie du heimlich wunderst vnd gemerst,* bei ähnlichen Sätzen z. B. FS. 47, 31—3, 51—5; — 160, 131—2: *(So) das ich gar nichs ausrichten künd, Wie ein narr hinterm ofen stünd*, ähnlich FS. 6, 126—7; 227, 113—17; 374, 53—4; — 232, 94—5: *Vnd wer im den wil wol vnd recht,*

Warnt in, .., So dreibt er sein gespot daraûs, ähnlich 283, 105—6; mehrere Glieder eines Nebensatzes stehen asyndetisch neben einander z. B. FS. 54, 1—4: *Als ich eins abencz ging spaciren, Wart einer sach nach fantasiren, Ging auf vnd ab die Haller wisen, Da* etc. Auch Sätze die in adversativem Verhältnis zu einander stehen, werden nicht selten asyndetisch aneinandergereiht; so Hauptsätze z. B. 241, 85—6: *Der muellner hôrt den pawern wol,* (aber) *Schwieg vnd stack aller schalckheit vol;* Fsp. 59, 239—40: *Den het ich im abkauffet gern, Wir kundens kaufs nit ainig wern,* ähnlich noch FS. 84, 101—2; 323, 76—7; Fsp. 68, 335—6; 71, 296—7; 75, 470—71; vgl. FS. 7, 28: *Ich liesz nicht ab,* (sondern) *hielt an mit fragen;* 283, 33—4: *Die zwey aber nichts darumb gaben, Ye lenger mehr geschlemmet haben,* ähnlich FS. 93, 41—2; 117, 7—8; 180, 50—51; Fsp. 1, 35—6 und oft; Nebensätze z. B. 184, 101—104: *Die weil sie nit haben stûdirt, In medicina docterirt,* (sondern) *Etwan sûnst aus der arzeney Gelert ain stûecklein oder zwey,* ähnlich 175, 46—8; 333, 191—2. Die Vorliebe für die eben besprochene asyndetische Parataxe hat Hans Sachs übrigens nicht nur mit Luther gemein, sondern sie ist für die ältere Sprache im Allgemeinen bezeichnend. Eine reiche Sammlung von Belegen dieser Asyndese von ahd. Zeit bis ins 17. Jh. giebt Behaghel in Pfeiffers Germania, XXIV (1879), S. 167 ff., vgl. auch Wunderlich, Sb., S. 235 f.

§ 65. Mit dieser asyndetischen Parataxe berührt sich nun, wie schon oben angedeutet wurde und wie Behaghel a. a. O. S. 170 gezeigt hat, die Konstruktion *ἀπὸ κοινοῦ* sehr nahe. Unter dieser Bezeichnung verstehen wir eine Redeweise, die darin besteht, dass zwei ohne Bindemittel aneinandergereihte Sätze oder Glieder eines Satzes einen ihnen gemeinsam zugehörigen Satzteil zwischen sich in die Mitte nehmen, so dass er zu beiden gleich bequem gezogen werden kann (vgl. Paul Pr. S. 112 u. Gr. § 382). Nach dem grammatischen und logischen Verhältnis der Sätze zu einander unterscheidet man verschiedene Arten dieser Konstruktion, die wir auch bei Hans Sachs zu sondern haben. Wir betrachten zuerst den Fall, dass die zwei Sätze einander sowohl logisch als grammatisch gleichwertig sind. Nach dem grammatischen Verhältnis des gemeinsamen Gliedes zu den nichtgemeinsamen lassen sich die hierher gehörigen Beispiele wieder in zwei Gruppen zerlegen.

1. Die erste Gruppe besteht aus Fällen, wo das Verhältnis des gemeinsamen Gliedes zu den nichtgemeinsamen nach den verschiedenen Richtungen das gleiche ist. Belege dieser Art finden sich bei Hans Sachs sehr häufig; wir ordnen sie nach der Art des *ἀπὸ κοινοῦ* stehenden Satzteiles. Das Subjekt steht *ἀπὸ κοινοῦ* z. B. in folgenden Fällen: FS. 161, 77: *Da kam ein knecht*

schray: Fried, fried, fried!; 211, 52—3: *Da klopft an seiner zellen thůer Ein můnich wolt zw im hinein*[1]); 90, 52—3: *Nach dem zům fůechsen kam der per Wolt auch mit im durch grose pit,* ähnlich ib. 72—3; vgl. noch 206, 29—30: *Darinen ist peschlossen worn Ain ewiger fried zamen gschworn;* 231, 108—10: *wo etwan zůecht vnd straff Nit leiden mag der kinder haůffen Muetwillig von den eltern lawffen.* Nur an folgender Stelle haben wir ein Verbum finitum ἀπὸ κοινοῦ gesetzt gefunden FS. 23, 21—3: *Als nun der neydig mercken thet, Warumb er* (der Geizige) *nicht gewůnschet het Darjnn gesůcht seynn eygen nutz* (nach dem modernen Sprachgebrauch müsste die Stelle so lauten: als der Neidige merkte, warum er nicht gewünscht und dass er darin seinen eigenen Nutzen gesucht hatte). Sehr zahlreich sind die Stellen, wo das Objekt ἀπὸ κοινοῦ steht; wir können hier nur einige ausführlich citieren: FS. 31, 71—2: *Also hab ich dir declarirt Der Vollen wappen plesinirt;* 67, 120—121: *Der schinter an ein stangen hing Mich hetten vor die hůnt zernagen;* 71, 7—8: *Der pfleger pald peschicket Den mesner schelch anplicket;* 78, 43—4: *Die zwen maler hetten erdicht Ein visirlich thier zw gericht;* 108, 3—4: *Wie er pekriegen wolt das lant Pezwingen mit gwaltiger hant;* 143, 59—60: *Also erschůet der wein das gmůet Des menschen auf-wegt vnd zerůet;* 150, 23—4: *Herr marschalck, ir solt zw hoff verwalten Die raysing in der růestung halten;* 153, 52—3: *So dw vnmessig drinckst dein wein Also mit hawffen in dich schůetest;* 179, 10—11: *Pald fůer er auff vnd thet awslasen Sew, kůe vnd kelber fůrn hirten trieb;* 236, 53—4: *Nach dem schickt Iůpiter herab Den storch in zv aim kůnig gab;* 275, 62—3: *Weil er het geschmecht an dem ort Das Marien bild sein Schwester gnennt*[2]); hier sei noch erwähnt Fsp. 65, 1: *Ich sol petten lůest mich nit wol,* wo der Infinitiv zu *sol* und, logisch genommen, auch zu *lůest* das Objekt bildet. Seltener findet sich eine Dativbestimmung ähnlich gesetzt: 159, 53—4: *Darmit reichet der herr sein stab Petro den in die hende gab;* 169, 69: *Flucht dem paurn rach wůnschen thet;* 228, 58—9: *Vnd sich zv gselet seiner zeit Den reich, gwaltigen ist anhangen;* 239, 81—2: *darob wůrt hais Dem schult-*

---

[1]) Die Interpunktion von Goetze steht in den meisten Fällen, wo das ἀπὸ κοινοῦ vorkommt, in Widerspruch gegen das Wesen der ganzen Konstruktion. Wird, wie bei Goetze, das gemeinsame Glied von denen, welchen es gemeinsam ist, durch die Interpunktion getrennt, so erscheint es als nur zu dem einen gesetzt, zu dem andern zu ergänzen, während bei dem ἀπὸ κοινοῦ von einer Ergänzung nicht die Rede sein kann (s. Paul, Pr. S. 264) und durch die Zwischenstellung eben die gleich nahe Zugehörigkeit des gemeinsamen Gliedes zu den beiden nichtgemeinsamen angedeutet ist.

[2]) Übrige hierher gehörige Stellen sind: 239, 21—2; 255, 29—30; 311, 95—6; 331, 25—6; 334, 171—2; Fsp. 20, 63—4; 40, 195—6; 71, 74—6.

heis ging aus der angstschwais. Ebenso eine sonstige adverbiale Bestimmung: FS. 95, 41—2: *Dw můest dich neren Im muesigang dein zeit verzeren;* 237, 8—9: *Als aber der hůnd ward peladen Mit jaren vnd alter peschwert;* 242, 103—4: *Das die glaczenden mender kůmen Von dem man vrsprůng haben gnůmen;* Fsp. 77, 105—6: *Auch so ist mir ain prueder gstorben An dieser henffen sůcht verdorben.* Mehrere Satzglieder stehen ἀπὸ κοινοῦ in folgenden Fällen: FS. 8, 149—50: *Da ward ich rumplen an der kuchen Mit eim fusz gar lautraisig puchen;* 46, 25—6: *der musz tragen Sein Kramschatz durch die rauber wagen;* 65, 245—6: *Die auf ert der gemein absogen Marck vnd plůet aus den painen sogen;* 69, 33—4: *es sey on schuld gestorben Sein gsel vmb die warheit verdorben,* ähnlich 188, 63—4; 229, 51—2. Hierher ist wohl auch zu stellen FS. 70, 156—8: *Der selbig vor petrachten sóll Den eling stant nach gottes ler Anfach in gottes forcht vnd er,* wo wir in dem Nebeneinander von *petrachten sóll* und *Anfach* einen Wechsel gleichbedeutender Konstruktionen haben, wie er bei Hans Sachs und im Mhd. (s. Paul Gr. § 392) häufig vorkommt; nach dem heutigen Sprachgebrauch würde die Stelle so lauten: Der soll den Ehestand nach Gottes Lehre betrachten und ihn in Gottesfurcht anfangen. Ferner gehört wohl hierher folgende Stelle, wo wahrscheinlich die Reimnot eine Stellung der Satzglieder verursacht hat, welche mit der beim ἀπὸ κοινοῦ normalen nicht übereinstimmt: 363, 53—4: *Daruon jr auch gewisz habt bracht Solch Sůnd habt zu vergeben macht* (= woher ihr die Macht solche Sünde zu vergeben gebracht habt und besitzt).

2. Weniger zahlreich als die zur ersten Gruppe gehörigen Fälle sind die der zweiten Gruppe, d. h. die Fälle, wo das Verhältnis des gemeinsamen Gliedes zu den nichtgemeinsamen nach den verschiedenen Richtungen ein verschiedenes ist. In folgenden Beispielen ist das gemeinsame Glied im ersten Satze Subj., im zweiten Obj.: FS. 15, 26—7: *Die Lówin sprach: Mein speisz die was Allein das fleisch der Thier ich asz* (Komma nach *asz*); 343, 89—91: *Auch stet in eüer hant Gancz regiment im lant Thůet ir teglich verwalten.* Umgekehrt ist das Verhältnis an folgenden Stellen: FS. 233, 63—4: *Sam ob er von im selber hab Sein reichtům sey kain gottes gab;* Fsp. 1, 250: *Vnd wissen nit jr widerfart Mag offt lang haben nit mehr fug;* Fsp. 41, 147—8: *Ich hab in dieser nacht verlorn Mein bachn ist mir gestolen worn;* vgl. noch FS. 100, 44: *Ich wil in stechen ist das pest.* Als Dativbestimmung zum ersten, als Objekt zum zweiten Verb fungiert das gemeinsame Glied FS. 333, 17—19: *fing an mit ander schwencken, Darmit das kůemawl an zv hencken Calandrino mit auf zv seczen* [die Nominativform des Namens

ist *Calandrino*, s. V. 4; *einen aufsetzen* = betrügen, zum Besten haben, s. DWb. unter *aufsetzen* 8)]. Als Dativ gehört das *ἀπὸ κοινοῦ* stehende Glied zum ersten Verbum, als Genitiv zum zweiten FS. 52, 13—14: *Das wir lesen selmessen Deiner sel nycht vergessen.* Ein im ersten Satze von einer Präposition abhängiges Substantivum ist zugleich Subjekt des zweiten Satzes FS. 85, 66—8: *Nach dem sie sich pegaben All aüf die pülerey wart in erlaübet frey.*

Im Mhd. ist die in diesem § besprochene Art von *ἀπὸ κοινοῦ* nach Paul Pr. und Gr. a. a. O. ziemlich gebräuchlich.

§ 66. Eine andere, in der älteren Sprache überhaupt weit verbreitete und auch bei Hans Sachs ausserordentlich häufig vorkommende Art der Konstruktion *ἀπὸ κοινοῦ* ist die, bei welcher der zweite Satz, wenn er auch grammatisch dem ersten beigeordnet ist, doch eine weniger wichtige Thatsache enthält, also als logisch untergeordnet empfunden wird, weshalb er für das moderne Sprachgefühl als mit einem Relativsatz ersetzbar und damit gleichwertig erscheint (vgl. Behaghel, a. a. O. S. 170 a. E., Paul Pr. S. 114). Auch die Fälle dieser Art zerfallen in zwei Gruppen, je nachdem die grammatische Funktion des *ἀπὸ κοινοῦ* gesetzten Gliedes in beiden Sätzen die gleiche, oder eine verschiedene ist.

1. Von den zur ersten Gruppe gehörenden Belegen sind die am zahlreichsten, in denen das gemeinsame Glied in beiden Sätzen Subj. ist: FS. 55, 38: *Den kümpt der drite schmack haist pitter*, ähnlich 176, 3—4; 265, 1—3; — FS. 26, 1—2: *Hie werden im Pflug getrieben Die Maydt vor Faszнacht sindt vberblieben* (vgl. ib. 19—20: *Im Pflug werden getrieben Die Hauszmaydt, welch sind vberblieben*); 176, 62—3: *Begegneten jm auff der stras Zwen Landsknecht waren doll vnd dumb*, ähnlich 292, 22—4; — 210, 2—3: *Da stet ain gueter schwanck mit glimpff Sagt, wie* etc., ähnlich 315, 117—18; Fsp. 5, 395—6; 66, 322—3; — 250, 17—18: *Es waren mender verliessn ir güet Vnd gingen willig in armüet;* 309, 23—4: (da schlich hinein) *Ein lantstreicher ein vralt mon Het vil zaichen und müeschel on;* Fsp. 17, 174—5: *Mein Freundt, es ist die schnödt neidsucht Ist ein kranckheit wider natur;* Fsp. 14, 102—3: *Dw pist gschicker zw der welt lauff, Wan ich pin gar dölpisch vnd pewrisch*, ähnlich Fsp. 5, 382—4. Nicht viel seltener sind die Fälle, wo das *ἀπὸ κοινοῦ* gebrauchte Glied das Obj. ist: FS. 65, 148—50: *Auch sach ich neben an den wenten Vil tawsent eittel alter frawen Det man mit scharpfen striglen krawen;* 102, 15—16: *Vnd sprach zům püeben: „Lawff vnd hol Zway andre prot zalt man dir wol"!;* 174,

b. 27—8: *Hie schick ich dir ain schalen vol Zipper weins magstw kosten wol;* 329, 77—8: *ich můes all tag hon Acht pfenning můes ich gwinnen thon;* Fsp. 13, 138—9: *Auch hat er verkauft ein alraun Hat er aus einem rettig gmacht,* vgl. 42, 357—8; 51, 90—92; — 81, 27: *Ich kan ain spil haist man das růempffen,* ähnlich ib. 29, 33, 39. Endlich sei hier erwähnt auch Fsp. 56, 337—40: *Mir ist vergangen . . . lust Zu . . . allen Mannen sust, Ausgenommen mein alten Mann Wil ich werth vnd in ehren han.* Eine sonstige adverbiale Bestimmung ist *ἀπὸ κοινοῦ* gesetzt 322, 71—2: *Fuer zv dem altn in nobis haůs Das fewer schlegt zům gibel aus* (= wo das Feuer ausschlägt); ähnlich ist wohl aufzufassen 176, 2—4: *Ein gschicht, die sich verlauffen thet Zwo meyl von der Stat Nůrnberg leyd Ein Dorff heist Nerrat* (= wo ein Dorf Namens N. liegt).

2. In der zweiten Gruppe kommt es nicht oft vor, dass das gemeinsame Glied im ersten Satze als Nominativ, im zweiten als Akkusativ fungiert: 199, 26: *Das ist ain kůnst durff wir nit kaůffen;* Fsp. 81, 31: *Auch ist ain spil haist man das puecken,* ähnlich ib. 37. Sehr zahlreich sind dagegen die Fälle, in denen das Verhältnis umgekehrt ist: FS. 62, 7—8: *Het vberaus eine schône frawen Hies Thessa,* ähnlich 62, 10; 255, 6—7; 355, 2; Fsp. 81, 45; — Fsp. 74, 10: *Hab wol ein weib geht sauber rein;* FS. 114, 2: *Der het ein weib was zart vnd schôn,* ähnlich FS. 88, 7—9; 135, 13—14; 177, 3—4; 349, 19; — 181, 151—2: *Aus der geschicht man mercken sol Zway stůeck sint zv pehalten wol,* ähnlich Fsp. 19, 93—4; 38, 225; 58, 179; — 281, 11—12: (ich) *solt auch fliehen das dritt stůck Wer der alten Weiber grosz glůck;* 361, 36—7: *ich kenn fůrwar Ein Bawren hat sein Mutter noch,* ähnlich 279, 34—6; Fsp. 10, 133—4; — FS. 131, 18—20: (er) *finge Ein grose faiste kaczen Sas peim fewer zw naczen;* 148, 129—30: *Sach da verschůet habern vnd hay Lag pey den rossen in der stray;* 239, 28—9: *Zv lecz er dan vmb herberg pat Ein pawern nam in an guet willig;* 354, 28—30: (Als der poet) *Sach Můlům den fisch gfiel im wol, Dacht er* etc. In folgenden Fällen wird von einer zum Verbum des ersten Satzes gefügten Präpositionsbestimmung zugleich das Subj. des folgenden logisch untergeordneten Satzes mitvertreten: FS. 59, 59—60: *Die kůnst wechst auf eim reis Haist vebůng, můe vnd fleis,* ähnlich FS. 61, 5; 187, 8—9; Fsp. 81, 41; — 199, 64—6: *zv pawen . . . ain malmůel An ainem pach war frisch vnd kůel;* 200, 44—6: *Das ir freyheit . . . verporgen Plieb pein menschen würn sich sůnst fleissen Vnd vmb ir freyheit sie peschaissen;* Fsp. 30, 165—6: *Hast mich gewissen auff frůmkeit Würt mich reych machen kurtzer zeyt;* 250, 2—3: *(ich stůnd) Pey ainer rot . . . Spotfôgel drieben ir gespay;* 360, 91—2: *Kamen sie an ein*

Wasser flosz Gar schnell mit Wellen breit vnd grosz; Fsp. 39, 229: *(geht) Zu einr Iungfraw hat ein bősz wort.*

Wie schon oben angedeutet wurde, ist die hier besprochene Art von ἀπο κοινοῦ in der älteren Sprache sehr gewöhnlich; mhd. Beispiele stehen bei Paul Gr. § 382, Anm. und Pr. S. 114 f., zahlreiche Fälle von ἀπὸ κοινοῦ bei *heizet, hiez* sind ausserdem verzeichnet von J. Grimm, Kleinere Schriften, Bd III, S. 341 f. Nach Paul wird die Konstruktion in der Periode des Überganges aus dem Mhd. ins Nhd. noch häufiger, als sie früher war.

§ 67. Bei dieser Art von ἀπὸ κοινοῦ trat oft der Fall ein, dass das gemeinsame Glied durch das demonstrative Pron. *der* oder ein demonstratives Adv. gebildet wurde. Diese Wörter gehörten ursprünglich dem übergeordneten Satze an und wiesen auf den folgenden logisch untergeordneten Satz hin (s. Paul Pr. S. 250 f., Erdmann, S. 50, a. E.). Wegen der Zwischenstellung, welche sie durch die Konstruktion ἀπὸ κοινοῦ erhielten, wurden sie aber vom Sprachgefühl als Einleitungswörter des abhängigen Satzes angesehen. Die Folge dieses Vorganges war, dass der logisch abhängige Satz nun auch grammatisch als abhängig bezeichnet wurde und die Demonstrativa, ohne zunächst ihre ursprüngliche hinweisende Bedeutung zu verlieren, in Relativa übergingen. Wie in der älteren Sprache überhaupt, so ist es auch bei Hans Sachs eine häufige Erscheinung, dass das Pronomen *der* oder ein Adv. desselben Stammes ἀπὸ κοινοῦ steht, gleichmässig zum Haupt- und zum Nebensatze gehört und in dem ersteren als Demonstrativum, im letzteren als Relativum fungiert. Wir verzeichnen hier zunächst eine Reihe von Stellen, wo das ἀπὸ κοινοῦ stehende Glied das Pron. ist. Zwei Gruppen sind zu unterscheiden.

1. Die erste wird von den Fällen gebildet, in denen die grammatische Funktion des Pron. in Haupt- und Nebensatz dieselbe ist, derselbe Kasus also für beide Sätze passt. Am zahlreichsten sind die Stellen, wo das Pron. als gemeinsames Subjekt der beiden Sätze auftritt. Meistens folgt der Nebensatz dem Hauptsatze nach, so FS. 65, 256—7: *Das sint die in armůt Gewuechert haben*, vgl. FS. 51, 74—6; — FS. 65, 310: *Ich fragt: Wer sint die also winseln?* ähnlich Fsp. 44, 29; 73, 257; — Fsp. 18, 78: *Ich bin die dise kunst wol kan*, ähnlich Fsp. 43, 239—40; 72, 30; 78, 197; — FS. 87, 39—40: *(scy) Plaicher vnd falber farb, Als der im neid verdarb;* 143, 121—2: *Also gschicht oft in trúnckenheit Das súnst nit gschech in núechterkeit.* Der Nebensatz geht dem Hauptsatze voran[1]) FS. 88, 17—18: *Der euch erwuerget vnde fras Ist fort*

[1]) Mit Rücksicht auf den Ursprung der Konstruktion müsste man eigentlich sagen, dass in diesen Fällen der logisch abhängige Satz in den übergeordneten hineingeschoben war. In einem

hin nichs den laub vnd gras, ebenso 113, 57—8; 191, 31—2; Fsp. 49, 3—4. Als gemeinsames Objekt steht das Pron. FS. 18, 40—41: *Ich sprach: „Kain anders spil ich kan, Dann die ich euch erzelet han“*, ausserdem 134, 38—40; Fsp. 49, 54. Als gemeinsame Dativbestimmung Fsp. 31, 389—390: *Wol dem auff Erd Ein trewer Freundt zu theile werd.* Als Objekt des Nebensatzes hängt das Pron. zugleich von einer nur zum Hauptsatz gehörigen Präposition ab FS. 30, 65: *On die ich selber gar erdicht*, ähnlich Fsp. 72, 221; hierher ist auch zu stellen FS. 7, 295: *Vnd das ich bey mir halt verborgen* (der Sinn kann kein anderer sein als: *ohne das was* ich verborgen halte; *ohne* tritt auch sonst bei Hans Sachs in der Form *Vn* auf, z. B. 106, 25—6: *Herdrúngen paúren vnd ir pasen Vn zal* und das dieser Form in unserem Beispiel angehängte *d* ist der Anlaut von *das*).

2. Die zweite Gruppe setzt sich aus den Fällen zusammen, wo die Funktion des Pron. im Hauptsatze eine andere ist als in dem Nebensatze, der erstere also einen anderen Kasus des Pron. erfordert, als der letztere. In vielen Fällen fallen die zwei Kasus der Form nach zusammen, z. B. FS. 1, 64: *(Die letzt) Ist die ich auszgenummen han;* 30, 157—8: *Ich lob jhn das nye lóblich ward, Vnd schend das nye het schendlich art*, ähnlich 54, 75—6, 119—20, 135—6; 300, 24—5; Fsp. 26, 76; 36, 186; 40, 271—2; 63, 313—14; — 223, 97—8: *Die in gar kaines argen trawen Sie felschlich zv der flaischpenck hawen.* Wo die Kasus der Form nach verschieden sind, gilt bei Hans Sachs ohne Ausnahme die mhd. Regel (Paul Gr. § 343), dass das Pron., wenn es sich auf Subj. oder Obj. des Hauptsatzes bezieht, in dem vom Nebensatze verlangten Kasus gesetzt wird, z. B. FS. 282, 273—4: *Niemand druckt der schuh, denn der jn an dem fusz versuch;* 354, 96—7: *Das er mit ist zv wegen pringen Des er vor haimlich hat pegert;* Fsp. 26, 317—18 (Melisso): *Wen sol ich liebn? das west ich gern.* (Salomon): *Von dem du wilt geliebet wern;* FS. 195, 60—62: *Also ider engel verspricht Sein menschen, wie er fúert sein leben, Nach dem er thw von herczen streben* (*Nach dem* = das, wonach), vgl. FS. 52, 17—18: *Als denn wil ich eúch schencken Darpey ir mein solt dencken*, ähnlich 348, 107—8; Fsp. 5, 371. Aber gegen den mhd. vorherrschenden Gebrauch entspricht bei Hans Sachs der Kasus des Pron. gewöhnlich den Forderungen des Nebensatzes auch dann, wenn dieser einen Nomin. oder Akk., der Hauptsatz dagegen einen Genit. oder Dat. verlangt (vgl. Paul ausser a. a. O. noch Pr. S. 253): FS. 84, 122: *Drücz* (sei dem geboten) *der mich da anrúeren thet;* 149, 78: *Weil er sich rúembt das er nit kon;* Fsp. 75, 249—50:

Falle wie FS. 88, 17—18 hat man sich das Verhältnis der Sätze ursprünglich wohl so zu denken: *Der — erwürgte und frass euch — isst forthin* etc.; vgl. Erdmann, a. a. O.

Was wôll wir von den dolppen sagn Vnd die die kelbren hosen antragn (*die* = von denen, die), ähnlich FS. 222, 119—122. Nur folgende Stellen kennen wir, wo unter ähnlichen Umständen das Pron., wie Mhd. gewöhnlich, in dem vom Hauptsatz verlangten Kasus steht: Fsp. 1, 318: *Mit all dem ich kan vnd vermag;* FS. 258, 121: *(ain junger mon) Zer, nach dem sein seckel vermag.*

3. Von den Fällen, wo das gemeinsame Glied durch ein Adverb gebildet wird, sind die am zahlreichsten, in denen *da*, wie mhd. häufig (Paul Gr. § 343, Anm. 4), im Sinne von *dahin wo* gesetzt ist, z. B. FS. 15, 7—8: *Inn dem da kam ein Ieger leisz Da er die Iungen wôlflin fund*, ähnlich 81, 1—2; 109, 57—8; 333, 50; — FS. 52, 27—8: *Der pfaff kam nach mitage Da Ewlenspiegel lage*, ausserdem 183, 108—9; 317, 100—101 (wo *dasz* = da es = dahin, wo es) und öfters; vgl. noch FS. 31, 38—9: *das er nicht für sich tracht Darhynter er blyb sicher fro* (= dahin, wohinter). Selten sind Fälle wie FS. 73, 1—2 (= 178, 3—4): *Eins dages ich zw gaste was Da man frisch waiche ayer as*, wo *da* = da wo, vgl. noch z. B. 293, 57—8. Ebenso Fälle wie 162, 75—6: *So můstw leiden, das ich ge An ent dahin ich nit ging ee (da hin* = dahin, wohin), vgl. Fsp. 2, 199—200: *Ich wil euch füren da ich han Vorhin gefürt manigen Man* (= vor hingeführt).

Ähnliche ahd. und mhd. Beispiele, wie die in diesem Paragraphen verzeichneten, finden sich bei Paul Pr. S. 252 f., Gr. a. a. O.; hierher gehören auch die meisten von den Fällen, welche Grimm a. a. O. S. 316 ff. als Belege einer Attraktion des Relativums in den Kasus des Demonstrativums angeführt hat; ferner einige von denen, die Franke § 338, *1.* a) und *6.* aus Luthers Sprache citiert.

§ 68. Eine ähnliche Gliederungsverschiebung wie die oben besprochene, durch welche das Demonstrativum ins Relativum übergegangen ist, war auch beim Übergange der Indefinita *wer, was, welcher* in Relativa wirksam (s. Erdmann, § 99). Wie das Demonstrativum bei dem Übergang seine ursprüngliche hinweisende Kraft zunächst nicht verlor, so haben auch die Indefinita in der älteren Sprache neben der neuen relativen Bedeutung ihre anfängliche indefinite, verallgemeinernde erhalten, die sie ja noch heute teilweise besitzen. In der älteren Sprache im Allgemeinen und so auch bei Hans Sachs werden diese Pron. ohne Korrelat, als gemeinsames Glied von Haupt- und Nebensatz gebraucht nicht nur, wie heutzutage, wenn beide Sätze denselben Kasus verlangen oder die verschiedenen, von Haupt- und Nebensatz verlangten Kasus lautlich zusammenfallen, sondern nach Analogie des aus dem Demonstrativum entstandenen Relativums auch im entgegengesetzten Falle. Ihr Kasus wird

immer durch den Nebensatz bestimmt. Beispiele: FS. 36, 9—10: *Was yedermon für gut erkent Wirdt von mir veracht vnd geschent*, ähnlich 104, 11—12; 221, 75—7; — 320, 127—8: *Wen man sol loben nach seim sterben Můes im leben das lob erwerben*, ähnlich 340, 45—50; 387, 6—7; — FS. 65, 111—13: *Ich fragt weiter, wer diese wern. Der dewffel sprach: Welche aúf ern Hat der feintselig neid pesessen* (wo der Hauptsatz, wie oft bei der Wechselrede, in der Antwort unausgedrückt bleibt und aus der Frage sich ergiebt); 281, 110—12: *Drumb wem in seines lebens frist Solch grossen glücks vil kommen thet Weng guter tag auff Erden hett*, ähnlich 383, 51—3; — 96, 9—10 (= 336, 35—6): *Wer hin vnd wider für ist gen Thůt sie auch plecken ire zen*, ähnlich 153, 60: *Man spricht: Wer lang pat* (= badet), *schirt man zwir;* — 211, 60—61: *(Dw solt) das pazem zv kuessen geben Wer heller oder pfenig geit*, ähnlich 297, 80—82, wahrscheinlich auch 174, a, 6—15: *Welich mensch darinen thůet paden . . .* (dem) *Ist der júnckprůn ein gůet arzney, Der geleichen den gar vralten;* FS. 51, 110: *Sie straft wer vnrecht hat gethan*, ähnlich 65, 313—14; 376, 16—17; — FS. 320, 11—13: *Welch mensch het gfürt ain schentlich leben . . . Pegrueb man auf den kirchoff nit;* FS. 23, 56—7: *Das er sich sol genůgen lan Was yhm Got hie bescherdt auff erd*, ähnlich 353, 155; 371, 83—4 (vgl. Fsp. 3, 133—4: *Ich . . . lasz mich genůgen An dem, das mir Got zu ist fügen*, ähnlich Fsp. 7, 213—14; 330, 104—6). Die hierher gehörigen Adv. werden gleichfalls nach Analogie der aus dem Demonstrativum entstandenen gebraucht, z. B. Fsp. 35, 312: *Ach, kumbt vnd fürt mich wo sie leit* (= dahin wo), ähnlich FS. 312, 48—9; — Fsp. 46, 111: *Geh widr von wann du kompst von weiten* (= dahin, von wo). — Einige ähnliche Fälle wie die oben angeführten finden sich unter den von Franke § 338, *6* aus Luthers Sprache citierten Beispielen.

§ 69. Die relativen Nebensätze sind nicht die einzigen, welche mit ihren Hauptsätzen die Konstruktion *ἀπὸ κοινοῦ* eingehen können. Auch in Verbindungen von Hauptsätzen mit Nebensätzen anderer Art kann bei Hans Sachs jene Konstruktion stattfinden, indem ein zu beiden Sätzen gemeinsam gehöriger Satzteil nur einmal zum Ausdruck kommt, und zwar in der Mitte zwischen beiden. Der *ἀπὸ κοινοῦ* stehende Satzteil kann z. B. das Subjekt sein; so in folgenden Fällen: FS. 71, 6—8: *Als solichs thet erfarn Der pfleger pald peschicket Den mesner;* Fsp. 85, 378—9: *Sehen* (= sähen) *in siczn auf ainr der sewln Die hůnd soltn sich zv dot wol pewln;* bei Verbindung von Hauptsatz und konjunktionslosem Objektsnebensatz FS. 222, 79—80: *Aus der fabel wol mercken mag Ein man versech sich all sein tag* (= dass er sich versehen

soll); 242, 105—107: *Doch sol hie mercken pey dem schwanck Ain man an jaren alt vnd kranck Nit liederlich hayratten sol;* 258, 120—121: *Pey dem schwanck ler ain junger mon Zer nach dem sein seckel vermag* (= dass er zehren soll). Das Prädikatsverbum, oder vielmehr der finite Teil desselben steht ἀπὸ κοινοῦ FS. 56, 59—60: *Doch wo man sie erdappen Thüet das loch nach in schnappen.* Ebenso das Objekt des Haupt- und des Nebensatzes FS. 174, a. 21—3: *Derhalb ob dw hest . . . Vnter deim hoffgsind der geleich Alt oder kranck magstw her schicken;* als ἀπὸ κοινοῦ stehend ist wohl das Objekt auch an folgenden Stellen aufzufassen, wo statt des Nebensatzes ein Infinitiv mit *zu* auftritt: FS. 248, 16—17: *(sich pegab) Das er geladen het herab Ein Leipzger poten zv vereren;* Fsp. 17, 239—40: *thu im anfang vberwinden Den zorn als deinen feindt zu binden.* Dasselbe gilt wohl auch von der Dativbestimmung bei ähnlicher Satzverbindung Fsp. 30, 44—5: *Ich verheisz dir in deim Gotzdienst Zu dienen* (*dir* gehört sowohl zu *verheisz* als zu *dienen*), ferner von dem Adjektivattribut Fsp. 82, 230—31: *Da dacht ich in dem herzen mein Gfatern nit zv verlieren gern* (*mein* gehört sowohl zu *herzen* als zu *Gfatern*). Endlich gehört wohl hierher auch FS. 171, 66—7: *Die narren sagen die warheit Treff vnter oder ober an*, wo das gemeinsame Glied im Hauptsatze als Objekt, im Nebensatze als Subjekt fungiert. — Ähnliche Fälle von ἀπὸ κοινοῦ wie die hier oben verzeichneten, sind uns aus anderen, früheren oder späteren Schriftstellern nicht bekannt.

§ 70. Bisher haben wir uns nur mit Belegen beschäftigt, in denen ein oder mehrere Satzglieder ἀπὸ κοινοῦ stehen. Wie im Mhd. (s. Paul, Gr. § 382) kann aber bei Hans Sachs auch ein ganzer Satz ἀπὸ κοινοῦ gebraucht werden, seine Stelle in der Mitte zwischen zwei Sätzen erhalten, zu denen beiden er gleichmässig als Bestimmung zu ziehen ist. Dieser Fall kommt sogar ziemlich oft vor, z. B. FS. 312, 119—22: *Das hab ich . . . Geleret in ewer zuechtschůel, Darein ir mich geschicket habt, Pin ich mit der kůnst worn pegabt;* 354, 96—8: *Das er mit ist zv wegen pringen, Des er vor haimlich hat pegert, Guetwilliclichen wirt gewert;* Fsp. 54, 114—16: *Du möchst stillen seins zorens gallen, Wann er den Pfaffn nit hett gesehen, Wolt jm selb wol ein Nasen drehen* (*Wolt jm* = wollt' ich ihm). Öfters begegnen uns derartige Konstruktionen in den Schlussversen der Gedichte, wo sie dadurch entstehen, dass ein zu einem vorangehenden Hauptsatz gehöriger *dass*-Satz zugleich als Objekt zu der Schlussformel *wünscht Hans Sachs* zu ziehen ist. So z. B. Fsp. 11, 376—9: *Zu pfand setz ich jm trew vnd ehr, Dass als denn bey jm nimmer mehr Gemelter Narren keiner wachs, Wünscht euch*

mit guter Nacht H. Sachs; auch Fsp. 62, 430—32: *(ich wil) sûeses holcz nemen ins maul, Das nicht mer vnglûecks daraus wachs Durch mein pulerey, wûnscht Hans Sachs*, hat sich der Dichter den letzten finalen *Das*-Satz, mit dem die Rede des Bauern schliesst, wohl zugleich als Objekt zu *wûnscht* gedacht, obwohl das Pron. *mein* nur vom Standpunkte des Bauern, nicht von dem des Dichters aus gesetzt ist; vgl. noch z. B. Fsp. 65, 348—50; 74, 411—14. Möglich und wahrscheinlich, wenn auch nicht unbedingt notwendig ist die Annahme eines ähnlichen *ἀπὸ κοινοῦ* an folgenden Stellen: 167, 78—80: *Drumb hûet sich, wer nur kan vnd mag, Das im kain vngelueck erwachs Auff dem kugelplacz, wûnscht Hans Sachs* (vielleicht Punkt nach *mag* zu setzen); 358, 110—12: *Vnd sich auf keinen Freund verlasz, Wil er, dasz sich auffmehr vnd wachsz Sein Ehr vnd Gut, wûnscht jhm Hans Sachs* (möglicherweise hat sich der Dichter den Zusammenhang so gedacht: H. S. wünscht, er verlasse sich auf keinen Freund, wenn er will, dass . . .); 372, 23—6: *Der gleich ein dreffenlich waidman ist er, wen auf dem dische ston Gepratne hûner vnd die hassen, Kan er sein jeger horen plasen* (vor *wen* könnte vielleicht auch Punkt oder Kolon stehen); Fsp. 57, 262—4: *Ich wiln anredn mit worten spech, Ob ich den in die kluppen brecht, So stûnd der handel wol vnd recht* (nach *brecht* vielleicht Punkt). Wegen der einleitenden Konjunktion des Nebensatzes hat es an folgenden Stellen den Anschein, als schliesse sich jener Satz nur dem vorangehenden übergeordneten Satze an: FS. 75, 60—62: (das Vorhergehende) *Duet vns Bocacius peschreiben, Auf das vns kein erplendûng wachs Durch frawen list, wûnscht vns Hans Sachs* (die Interpunktion von Goetze jedenfalls zu ändern); 160, 170—72: „. . . *Die wôll wir vmb ir vnzûecht straffen, Auf das kain vnrat vns erwachs Von den lanczknechten*“, *wunscht Hans Sachs*, ähnlich noch 159, 168—174 (nach V. 172 Komma). Doch ist wohl auch hier der Nebensatz als zum vorhergehenden Satze und zum folgenden *wünscht ἀπὸ κοινοῦ* gehörig zu nehmen, wenn die Schlussworte *wünscht Hans Sachs* überhaupt noch einen Sinn haben sollen, und nicht vielmehr anzunehmen ist, dass sie als eine feste und starre Formel auch hier gesetzt sind, trotzdem sie in den Zusammenhang nicht passen. Wir glauben, wie gesagt, dass man es auch hier mit einer Konstruktion *ἀπὸ κοινοῦ* zu thun hat, und die Nebensätze die doppelte Funktion eines Finalsatzes und eines Objektsatzes haben. In Bezug auf die einleitende Konjunktion haben sie sich nur nach der ersteren Funktion gerichtet; die erwähnten Stellen sind insofern mit denjenigen zu parallelisieren, in denen ein zwischen zwei Sätzen *ἀπὸ κοινοῦ* stehendes Satzglied sich formell nur nach den Forderungen des ersten Satzes richtet. Aus analogen Gründen fassen wir auch

an folgenden Stellen den von *bis (dass)* eingeleiteten Satz als ἀπὸ κοινοῦ gebraucht auf: FS. 287,* 53—6: *Legt euch ein weil in das Faulbetth, Bisz die grôst hitz hinûber geht Vnd die Abendkûel an ist brechen, Wôl wir dest hurtiger drauff stechen;* ib. 63—5: *Der Herr schlieff ein stund oder vier, Bisz man gesang die Vesper schier, erwacht er, rieb sein augen frisch,* ähnlich ib. 34—40; 319, 65—8. Der ἀπὸ κοινοῦ stehende Satz fügt hier zum vorangehenden übergeordneten Satze eine Zeitbestimmung auf die Frage *wie lange?* zum nachfolgenden eine auf die Frage *wann?* In Bezug auf die einleitende Konjunktion ist nur die erstere Funktion bestimmend gewesen. Entsprechend scheint uns noch folgende Stelle aufzufassen zu sein: Fsp. 28, 13—15: *Derhalb wer mir nûtzer vnd lieber, Das ich het das vierteglich Fieber; Het ich etwan ein guten tag;* der Subjektsatz fungiert hier zugleich als Bedingungssatz, an den sich dann der folgende Satz als Nachsatz anschliesst.

K. Gemeinsames Glied nur zu dem zweiten von den nichtgemeinsamen gesetzt.

§ 71. Beispiele dieser Freiheit bringt aus verschiedenen Sprachen, u. a. aus dem Mhd., Paul Pr. S. 266; mhd. Beispiele stehen ausserdem Gr. § 321. Recht häufig findet sie sich bei Hans Sachs.

1. Es wird z. B. das zu zwei koordinierten Verben gemeinsam gehörige Subjekt beim ersten erspart und nur zum zweiten gesetzt, wobei es entweder am Ende des ganzen Satzes zu stehen kommt, wie FS. 113, 27: *Des erschrack hart vnd sagt das weib* oder, was häufiger der Fall ist, unter die Bestimmungen des Verbums hineingeschoben wird: 196, 51—2: *(als sie essen wolten) Trueg ein plabe milch sûeppen her, Sagt der pawer zûm Hainczen* (= trug der Bauer, sagte); 307, 91—2: *Vnd sties den essel ins wasser wider Vnd pueckt sich der frûmb mûeller nider* (= und der Müller sties . . . und bückte sich . . .); 379, 18—20: *(Als) er wolt . . . wider zv haûs, Dorcklet dahin vnd auf der eben Gûes er ain klefterichen leben* (= torkelte er . . . und goss . . .); Fsp. 47, 15—16: *hie auff erden So war, noch mag dein gleich nit werden.* Ein ähnliches mhd. Beispiel findet sich bei Paul Gr. a. a. O. (letztes Beispiel). — Aber auch in Verbindungen von Haupt- und Nebensatz kommt dieselbe Freiheit vor, indem das gemeinsame Subjekt nur im nachfolgenden Nebensatz ausgedrückt wird (ein derartiges Beispiel aus Heinr. Alberts Arien bei Paul Pr. a. a. O.); dies ist der Fall z. B. FS. 228, 42—3: *Aüs der fabel*

mag leren, das Ein man sich gsel zv seins geleichen (= mag ein Mann lernen, dass er . . .), ähnlich 330, 103—6; hierher ist wohl noch zu stellen FS. 182, 141—45: *Wan wir muesen euch helffen nern, Kinderzihen vnd die welt mern, Sagt da got durch seins wortes rüeff Adam in dem anfang peschüeff, Darnach zv aim phüelffen das weib* [*Sagt da got peschüeff* = Sagte Gott, da (= als) er schuf].

2. Ein zu mehreren koordinierten Infinitiven gehöriges modales Hilfsverb ist nur zum zweiten gestellt FS. 234, 47—8: *Kurczweil vnd gastrey haben selten, Solt gern nemen vnd vngern gelten* (= du sollst . . . haben, . . . nemen und gelten); vgl. 302, 93—6: *Dergleich ein Ehvolck vnd Freundschafft Ob einander halten glaubhafft, Ein Handwerck, Nachbawrn vnd gut gsellen Sollen auch freundlich zsammen stellen* (= ein E. und F. sollen . . . und gute Gesellen sollen auch . . .); ebenso das zu zwei Participien gehörige temporale Hilfsverb 360, 6—8: *(Ein Mann het ein Reitknecht) Die Land durchloffen an vil orten, Het auch . . . Ein Hund durch das Welschland gejagt* (= er hatte durchlaufen und gejagt); hierzu vgl. die Stellung der Kopula Fsp. 72, 354—5: *Secht, wie hesslich vnd gar vngschaffen Vnd ist verderbt mein pelcz in gründ* (= wie hässlich . . . und verdorben mein P. ist).

2. Das zwei koordinierten Verben gemeinsame Objekt steht nur beim letzten FS. 65, 104—6: *ein vnzelich sům Gelb, duerrer sel die deten lecken Vnd sich mit dűernen kosten schluegent* (= leckten sich und schlugen sich); 254, 55: *(sie) Drősten* (ihn) *vnd fűelten in mit wein* (wenn nicht vielleicht das scheinbar fehlende *ihn* im Auslaut von *Drősten* mitenthalten ist, vgl. oben § 31, *1.*); 265, 50—51: *Ich wil dir hinein pringen icz Vnd dir ein guecz hofsűeplein geben* (= dir eine Suppe bringen u. sie dir geben); 293, 9—10: *Mit den er prasset vnde schlemmet, Abtrug vnd sehr vil Geldts verdemmet* (= Trug sehr viel Geld ab und verprasste es); 349, 18: *(der pawersmon) Wuergt, priet in federn sie zvmal* (= würgte sie, briet sie . . .); 386, 3—4: *Die müeck fing an zw rüemen, Sich zw loben vnd plüemen* (= sich zu rühmen, zu loben . . .). Eine ähnliche Stellung hat die gemeinsame Dativbestimmung 242, 46: *(sie) Strelt* (ihm) *vnd thet im im har vmb zaůsen* (*strählen* regiert bei Hans Sachs den Dat., s. V. 63); 298, 106—8; *Herr, mit grossen ehrn Bitt wir, jr wőllt vor helffen singen, Vns die Complet helffen verbringen* (= uns singen, . . . verbringen helfen); Fsp. 52, 290—91: *(Herr!) Wőllst jr einfalt nit lassen schaden Vnd jn dein milten segen geben* (= ihre E. ihnen nicht schaden lassen und ihnen . . .); ferner die gemeinsame Präpositionsbestimmung Fsp. 43, 252—3: *Ich glaub, dasz er mich hab gehalten Vnd für ein andern mich ersehen* (= mich für e. a. gehalten und ersehen habe). In ähnlicher Weise ist

die Negationspartikel nur zum letzten von zwei Verben gesetzt, die beide als negiert zu denken sind Fsp. 72, 331: *Ich sich in vnd hor in auch nicht*, vgl. FS. 54, 91—3: *Wen euch ein weib nůr krům ansicht Oder nach eurem sin zw spricht Oder nicht aller sach recht geit*, wo *nicht* auch zu den Worten *nach eurem sin* gezogen werden muss.

4. Häufig wird bei Hans Sachs der Artikel nur vor dem letzten von zwei oder mehreren koordinierten Substantiven gesetzt, nicht nur in Fällen, wo dieselbe Form zu sämmtlichen Substantiven passt, sondern auch wo diese von verschiedenem Genus oder Numerus sind und also verschiedene Formen des Artikels nötig wären (ähnliche mhd. Fälle bei Paul a. a. O.). Beispiele der ersten Art: FS. 8, 155—6: *Dann kellnerin vnd die hauszmeidt Warn vbr ein laist geschlagen beid;* 204, 94—5: *Auch stelen gar geferlich nach dem reichtům morder vnd die rawber;* 211, 11: *(Ging herůmb) Fladen zu weyen vnd die ayer;* 162, 10—11: *So trůeg er . . . aus Zinplecz, kandel vnd die schůessel;* 233, 87—90: *Aůch hat reichtům der feind an zal, . . . Als tirannen, morder vnd trůegner, Raůber, dieb, hewchler vnd die luegner*, vgl. noch z. B. 262, 65; 272, 51—2; 281, 20—21; 282, 25—6. Beispiele der letzteren Art: FS. 6, 34: *Vermeint Hundt, Sperber vnd das Pfer;* 106, 34: *(ich) Dancz* (= Tanzes) *vnd der clainat mich verwag;* 162, 70—72: *hin ist mein hairat gůet, Mantel, rock vnd die federwat;* 173, Überschrift: *Vrsach der feintschaft zwischen schneider vnd der gais*, vgl. noch 240, 75; 262, 93; 292, 140. An den meisten von den angeführten Stellen könnten die Substantiva auch sämmtlich ohne Artikel stehen. Wo dies der Fall ist, hat man sich möglicherweise den Artikel nicht als zu allen Substantiven gemeinsam gehörig zu denken, sondern vielleicht anzunehmen, dass es metrische Gründe sind die den Dichter bewogen haben den Artikel in diesen Fällen überhaupt zu gebrauchen (s. z. B. die fünf ersten Belege).

5. Ein sonstiges, mehreren Substantiven gemeinsames adjektivisches Bestimmungswort nur zum letzten gesetzt, haben wir nur an folgenden Stellen beobachtet: Fsp. 84, 430—32: *Vnd geb weder stat . . . noch placz Dem pueler, noch der kuplerey, Schenck, gab, noch seiner schmeichlerey* (= weder seinem Geschenk . . ., noch . . .); ferner FS. 323, 26: *Doch er, kinder sambt seinem weib* (= seine Kinder samt seinem Weib), wo die Substantiva auch dem Kasus nach verschieden sind.

§ 72. Das gemeinsame Glied braucht nicht immer, wie in den obigen Beispielen, das letzte ausgenommen, in gleichem grammatischen Verhältnis zu den beiden nichtgemeinsamen zu stehen. Es wird oft nur zum zweiten nicht-

gemeinsamen Glied gesetzt, auch wenn es zu diesem in einem anderen Verhältnis steht, als zum ersten.

1. So gehört z. B. Fsp. 26, 5—6: *Leidlicher wer mir vnd het auch lieber Das drey oder vierteglich Fieber* das zum zweiten Verbum gesetzte Objekt zugleich als Subjekt zum ersten. Ebenso verhält es sich in folgenden Fällen, wo das gemeinsame Glied ein Satz ist (ein modernes Beispiel dieser Art bei Matthias, S. 276): FS. 179, 70—72: *Zv lecz dem pawren kam in sin, Dacht: Ich hab vil hüner im haús, Die pruetn aus ayern hüner aus;* Fsp. 80, 289—90: *Icz felt mir ein vnd kan ermessen: Er hat sein tag gern haber prey gessen,* vgl. noch Fsp. 40, 180—181: *Mir ist zu gsagt vnd bin gewert Alls, was mein Hertz lang hat begert.* An folgenden Stellen steckt das Objekt des ersten Verbums in dem zum zweiten gesetzten, von einer Präposition abhängigen Akkusativ: FS. 125, 1—3: *Ein jüngling het ser lieb Vnd vil hoffirens trieb Vmb ein zart schöne frawen;* Fsp. 75, 236—8: *Vnd wen der Neidhart kümen thw, so reib ich pald auf aller ding Vnd schmicz in in ein fiderling* (= so reib' ich ihn auf und . . .).

1. In den bisher besprochenen Fällen passt das gemeinsame Glied zu den beiden nichtgemeinsamen in derselben Form. In den folgenden ist es nur zum zweiten nichtgemeinsamen Glied gesetzt, trotzdem es der Form nach zum ersten nicht passt. Die nichtgemeinsamen Glieder sind zwei koordinierte Verba FS. 162, 157: *Hör vnd wandel nach seinem wort* (= höre sein W. und wandle danach); Fsp. 42, 275—6: *Darumb das du dest vbel trawen Vnd eyfferst vmb dein frumme Frawen* (= dass du deiner Frau nicht trautest und um sie eiffertest); Fsp. 34, 17—18: *Ich will gehn bey dem har auffwecken Vnd wil dem dötschn ein sorg einstecken* (= den d. aufwecken und ihm . . .); FS. 240, 24—5: *Des ausgebens thet sich peschwern, Den müellner im pewtel schmerzen war* (= Des thet sich der müellner peschwern, ihn schmerzte es im B.). Im folgenden Falle steht das erste Verbum im regierenden, das zweite im abhängigen Satze: 217, 110—113: *Die voler lüeg vnd petrueg steckten Vnd doch mit solcher phantasey Vmbfüerten pey der nasen frey, Weil wir als glaupten, was sie sagten.* Man vermisst hier im regierenden Satze das Objekt zu *Vmbfüerten;* ich wüsste keine andere Erklärung der Stelle, als dass das Subjekt des abhängigen Satzes *wir* zugleich das fehlende Objekt des regierenden gleichsam ahnen lässt; denn gemeint ist jedenfalls: sie führten uns . . . herum, weil wir glaubten. Etwas Analoges ist es, wenn in einer Verbindung von regierendem und abhängigem Satz das Prädikatsverbum nur einmal, und zwar in der vom letzteren Satze verlangten Form gesetzt wird, obgleich der erstere ein anderes Tempus erfordert. Dies ist der Fall Fsp. 44, 126—8: *Nun wil ich mein*

Kŏnigreich mern, Dieweil mir wie bisz her das glŭck Trewlichen hat gehalten rŭck (= weil mir das G. den Rücken halten wird, wie es bisher gehalten hat).

3. Noch auffallender, als in den bisherigen Belegen ist die Anomalie in den folgenden. In den zuletzt angeführten Beispielen war aus dem Worte, welches, obgleich zu den beiden nichtgemeinsamen Gliedern gehörig, nur zum zweiten gesetzt war, für das erste eine andere Form desselben Wortes zu entnehmen. In den folgenden Fällen dagegen ist aus jenem zum letzteren von zwei koordinierten Gliedern gesetzten Worte für das erstere ein ganz anderes Wort, das den gerade entgegengesetzten Begriff ausdrückt, zu entnehmen. Die Stellen sind: FS. 78, 43—6: *Die zwen maler hetten Ein visirlich thier zw gericht, Darin einer, der ander foren Gen kŭnden* (gemeint ist: in dem einer hinten, der andere vorn gehen konnten); 100, 5—6: *Paid lagens in dem dotten kercker, Ein Schwab war, der ander ein Mercker* (= ein S. war der eine, der andere ein M.), vgl. noch 218, 6—8: *Nŭn pŭelten zwen jŭngling darŭmb, Florentiner paid, Alexander, Vnd Rinŭczo, so hies der ander* (= A. hies der eine, und R. der andere).

Inwieweit ähnliche Erscheinungen wie die in diesem Paragraphen besprochenen auch sonst in der Sprache vorkommen, ist uns nicht bekannt.

L. Ellipse.

Auf dem Gebiete der Ausdrücke, welche gewöhnlich als elliptisch bezeichnet werden, hat die Sprache von Hans Sachs nicht viel Eigentümliches aufzuweisen.

§ 73. Der sprachlichen Form nach eingliedrige Sätze, wie sie Paul Pr. S. 103 ff., 272 f. bespricht, sind ja der lebendigen Umgangssprache im Allgemeinen geläufig und wohl auch als Gemeingut aller Sprachperioden anzusehen. Aufforderungen wie *Wolaŭf mit mir!* (FS. 62, 40), *Wol einher!* (333, 147), *wolher!* (94, 88), *hieher!* (116, b. 1), Fragen wie *Wohin?* (99, 3), *Wo naŭs so spat?* (FS. 70, 9), *Wan her so spat?* (Fsp. 31, 201), *Wan her des lands?* (Fsp. 58, 83), *Was da? was da?* (Fsp. 58, 155) (ähnliche mhd. Fälle s. Erdmann § 115), Ausrufungen wie *bŏs mŭhr vberaŭs* (Fsp. 21, 115) (vgl. Erdmann § 102) kommen natürlich auch bei Hans Sachs häufig vor, sind aber nichts speziell für seinen Sprachgebrauch Bezeichnendes. In diesen und ähn-

lichen Sätzen ist nur das logische Prädikat ausgedrückt. Nur das logische Prädikat und was dazu gehört enthalten ferner die scheinbar eingliedrigen Sätze Fsp. 46, 53—4: *Vier Masz, vier masz Reinfal truncken, An Wenden, Wenden heimher huncken,* wo als Subjekt die redende Person aus der Situation zu entnehmen ist (= ich habe getruncken, ich bin gehuncken). Wenn aber FS. 32 erzählt wird, wie die Freunde eines nichtsnutzigen, verlaufenen Eheweibes diese ihrem Manne zurückbringen wollen und ihm versprechen, sie werde Abbitte thun und sich bessern, und es dann V. 86 vom Manne heisst: *Er sprach: Wenn ich das hört von jr,* so haben wir hier wohl nach Paul Pr. S. 273 den isolierten Bedingungssatz, dessen Nachsatz als aus der Situation hervorgehend unterdrückt ist, als psychologisches Subjekt aufzufassen. — Mit den eingliedrigen Sätzen hat dagegen nichts zu schaffen eine Stelle wie Fsp. 68, 74—8, wo *Fraw Armůet* von sich rühmt: *(ich) Zwing die lewt zw sitten vnd důegent, Kewsch, zuechtig, schamhaft vnd demůetig* etc. Hier kann der Ausdruck wohl nicht als elliptisch bezeichnet werden, sondern die Adjektiva *kewsch* etc. muss man wohl als mit der adverbialen Bestimmung *zw sitten vnd důegent* parallel stehend auffassen und als prädikative Attribute zum Objekt *die lewt* erklären. Das Befremdende der Konstruktion besteht also wohl darin, dass neben dem Verbum *zwingen* ein prädikatives Attribut gesetzt ist *(einen keusch zwingen)*, vgl. die mhd. Beispiele bei Paul Gr. § 205. Die Analogie von Konstruktionen wie *einen glücklich machen* ist wohl hier wirksam gewesen. Noch auffallender ist der Gebrauch des prädikativen Attributes FS. 287, 85—6: *Der wirt thet alle Låden zu Gantz stickfinster,* weil hier eine Beziehung desselben auf das Objekt nicht möglich ist (nicht die Läden wurden finster, sondern das betreffende Zimmer) und ein Beziehungswort dafür überhaupt fehlt.

§ 74. Als zweite grosse Gruppe von sogenannten elliptischen Ausdrucksweisen stehen den scheinbar eingliedrigen Sätzen solche zur Seite, in denen zwei Hauptbegriffe als psychologisches Subjekt und Prädikat, ohne durch ein Mittelglied verknüpft zu sein, nebeneinander gestellt sind (vgl. Paul Pr. S. 100 f., 268 ff.). Auch derartige Ausdrücke finden sich bei Hans Sachs, wie in ungezwungener volkstümlicher Rede überhaupt, in grosser Menge.

1. Von hierher gehörigen Fällen sind zunächst diejenigen zu erwähnen, in denen das unausgedrückt gebliebene Satzglied, welches bei vollem Ausdruck Subj. und Präd. verbinden würde, die Kopula ist (ähnliche Fälle aus dem Mhd. bei Paul Gr. § 200, 201). Aus der Masse der Beispiele verzeichnen wir nur wenige: FS. 7, 57—8: *Eins verprent, das ander versaltzen, Dis vngsotten, yhens vngeschmaltzen,* ähnlich 123, 31—2; 151, 39—40; 294, 45; 377,

13—14; — FS. 13, 53: *Die fünfft sprach: Mein kunst ob euch álln;* Fsp. 5, 452—3: *Doch du, Trincker, der aller grôst Vnd ausz vil vrsachen der bôst;* vgl. ferner FS. 35, 66—7: *Der vier Roszwandel hat sie drey, Harschlecht, rûtzig, rewdig darpey,* wo die alleinstehenden Prädikate das Subj. mit dem vorhergehenden Satze gemein haben; ähnlich Fsp. 15, 97—8: *Iz habt ir die drifelting suecht, Durchdriben, verschalckt vnd verucht;* vgl. ausserdem FS. 65, 298—301: *Ich sprach; „Was haben diese tân?" Er sprach: „Pôs hofgsind vnd strasraûber; Den schirt man von dem kopf . . . Irn freûel . . ."* Hierher gehören auch z. B. folgende Fälle, wo das Subj. ein Satz ist: Fsp. 39, 342: *Schadt, soltu sein erschlagen mit* (*Schadt* ist Prädikat, *soltu sein* etc. Subjekt); FS. 322, 116—17: *Derhalb das pest an allem ent, Das man halt frey die mitel mas* [1]), vgl. ausserdem z. B. FS. 140, 41; 331, 136—7. Den angeführten Beispielen schliessen sich am nächsten an Fälle wie FS. 28, 23: *Wie das an ainem puebentancz magst danczen dw?* (*Wie* psychol. Prädikat, der *das*-Satz Subjekt); 124, 27 (= 262, 45): *Wie das dw hast sechs pain?* ähnlich z. B. 240, 42; 259, 82; 287, 69; Fsp. 4, 316—17 und sehr oft; vgl. 327, 40: *Wie wen ich mir det selber lonen,* ähnlich z. B. 214, 87—8; vgl. Paul Gr. § 201 die letzten Beispiele.

2. Eine weitere hierher gehörige, bei Hans Sachs sehr häufig vorkommende Erscheinung, die seine Sprache mit dem Mhd. (s. Paul Gr. § 322) gemein hat, und die sich auch in der heutigen Sprache nicht selten belegen lässt (s. Paul Pr. S. 270), ist es, dass eine Richtungsbezeichnung unmittelbar zu einem Verbum gefügt wird, welches keine Bewegung ausdrückt. Einige hierher gehörige Beispiele aus Luthers Sprache bringt Franke § 336. Über die Entstehung und psychologische Erklärung dieser Konstruktion s. Paul Pr. S. 269. Am gewöhnlichsten ist so eine Richtungsbezeichnung bei Hans Sachs neben den modalen Hilfsverben. Wendungen wie *wo sol ich hin?* (101, 25), *ich wil hinein* (235, 101—2) u. ä. sind ja auch dem modernen Sprachgebrauche ganz geläufig, vielleicht nicht ganz in demselben Grade Fälle wie *las vns von hinen!* (Fsp. 66, 32); *las vns hinaûs* (Fsp. 85, 618), ähnlich Fsp. 43, 294; 52, 217. Häufig sind auch die Verba *werden, haben* und *sein* ähnlich konstruiert, das erste zwar seltener als die letzteren; Beispiele: FS. 363, 39: *Demnach so wirstu nun gen Hof;* Fsp. 22, 63: *Wert jr wider ins Paradeisz?* — FS. 374,

[1]) In Anschluss an dieses Beispiel lässt sich folgende Stelle am besten erwähnen: FS. 209, 118—21: *Derhalb so ist an diesen orten Ainem fridsamen, weissen mon, Nur auf das aller weitst darfon Von seim verleczten feint sich schaid.* Offenbar wollte hier der Dichter sagen: Deshalb ist einem weisen Mann das Beste, er scheide sich von seinem Feind. Entweder aus Unachtsamkeit oder aus metrischem Zwange hat er aber das Prädikat ausfallen lassen.

15—16: *Wen ainr hat nimer gelt herfüer, So weisen wir im die haustüer;* Fsp. 11, 182: *Schaw, ich hab diesen auch herausz*, ähnlich Fsp. 32, 347—9; — Fsp. 15, 45: *Den haben die zigeuner hin*, ähnlich Fsp. 22, 257; 34, 132; 36, 160—61; 57, 253, 368; 59, 247, 268—9, 322 (bei *haben* vertreten wohl die Bestimmungen *heraus*, *hin* etc. die Stelle eines prädikativen Attributes; ähnliche Ausdrücke vielfach in der heutigen Umgangssprache); — FS. 86, 82: *Das gsind ist als in krieg hinaûs*, ähnlich Fsp. 49, 289; — Fsp. 11, 231: *Ich hoff, sie sind nun all herausz;* Fsp. 23, 164: *Sagt jr Magdt almal, sie sey ausz;* 27, 286: *Er ist hin, hat vns hie gelassen*, ähnlich 34, 135; 49, 20, 201; 70, 241; — 67, 157: *Die alsam geren weren rein* (= herein); 39, 287: *wie seidt jr so lang von mir;* 61, 59: *Nun ist ir herr zumb heilling grab*, vgl. noch FS. 86, 223: *Mich dûnkt, es sey ferr in die nacht*, ähnlich Fsp. 25, 41; 37, 198; — FS. 11, 22—3: *Ir leben ist on alles lob, Wie obgemelt, alleyn auff schaden.* Den eben verzeichneten Ausdrücken zunächst stehen Wendungen wie FS. 4, 99—100: *Wer also lebt wie obgenant, Der ist gut ins Schlauraffen Landt;* 320, 75—6: *der mist Gancz fruchtpar auf den acker ist;* Fsp. 36, 98: *Der dreck ist gleich* (= gleichwertig, gleich gut) *auff den Misthauffen;* 32, 46: *Vnd was sunst in das Hausz ist noht;* 79, 221: *Die wuercz die wirt gut in den winter.* Ebensowenig wie in diesen Wendungen ist die Annahme einer Ellipse eines bestimmten Verbums in dem Ausdrucke: *Die Person inn das Spiel* nöthig, der als Überschrift der Personenverzeichnisse am Ende der meisten Fastnachtspiele sich findet (s. z. B. Fsp. 1, 2, 8—11, 14, 16, 17, 21—26, 38—47 etc., vgl. Fsp. 85 a. E.: *Die Person in die Comedi*). Zu dem Substantivum, welches keine Bewegung angiebt, ist hier eine Richtungsbezeichnung unmittelbar gefügt; vgl. noch FS. 160, 151: *Es ist kein war in vnsern krom;* 308, 29—30: *Wurd nichs gschlachz aûsz mir vberal, Den nur ain drog in ain sewstal* (ähnliche Fälle aus der späteren Sprache bei Erdmann § 114 a. E.). Bei sonstigen, keine Bewegung bezeichnenden Ausdrücken haben wir noch an folgenden Stellen eine Richtungsbezeichnung beobachtet: FS. 135, 21—3: *Der pfaff zelt auf die zwainzg dûcaten, Das er* (= der Gaul) *im nûr pald kôm zw staten Gen Rom;* 317, 158—9: *Darmit nam er seinen abschaid Int abziech stueben;* Fsp. 27, 281: *(er) Ein Münch offt strafft in die Presaun;* 74, 188: *Er drot mir auf den thûren naws;* 57, 148—9: *(kauff) Was du bedarffst in einer sumb In die Kuchen vnd in das Hausz*, ähnlich 85, 87. Auffallend ist die Richtungsbezeichnung neben dem Verbum *liegen* Fsp. 85, 29—31: *mitpferd ich pestelen wil, Auf das sie all haben zv reitten, Weil Samo noch ligt gar von weitten;* das Reimbedürfnis hat hier wohl die Anomalie veranlasst. Bemerkenswert ist ferner folgende Stelle, wo ein Verbum, an welches die Richtungsbe-

zeichnungen angeknüpft wären, überhaupt fehlt: Fsp. 63, 217 ff.: *Nembt mit euch drey new daler fein In drey klain rote pewtelein; Vnd den ersten gen orient, Vnd den andren gen occident, Vnd den driten gen miternacht;* dass hier der Ausdruck als elliptisch bezeichnet werden kann, und dass dem Dichter bei den Richtungsbezeichnungen das Verbum *werfen* vorgeschwebt hat, scheinen uns die unmittelbar folgenden Verse zu beweisen, wo es heisst: *Zw idem wurff sprecht . . . Diesen segen.*

3. Sehr zahlreich sind bei Hans Sachs, wie auch in der früheren und der späteren Sprache, die Fälle, wo ein abhängiger Satz, der bei vollem Ausdruck des Gedankens durch Vermittelung eines Satzgliedes oder eines Zwischensatzes an seinen regierenden Satz angeknüpft werden müsste, direkt und unmittelbar mit diesem verbunden wird (vgl. Paul Pr. S. 271). Am häufigsten findet sich diese Ungenauigkeit bei der Anknüpfung von abhängigen Fragesätzen (so auch häufig im Mhd., s. Paul Gr. § 341), ziemlich oft aber auch in sonstigen Fällen.

a) Ein die Anknüpfung vermittelndes Satzglied wie *darüber, daran* o. ä. vermisst der moderne Leser z. B. in Fällen wie FS. 201, 112—13: *Den peschaid kriegt ich von dem alten, Wo dise drey feintschaft herkúmen;* 218, 156—7: *ein ider fúrgab Sein vnschúeld, wie es gangen wer;* 375, 22—3: *(ich) Het ein gros inwendiges zancken, wo doch mein guet hin kúmen wer;* Fsp. 70, 9—12: *Welch pey spil vns die alten eben Haben zw ainem spiegel geben, Was úebels . . . Sich durch den schnöden geicz pegeit,* vgl. noch Fsp. 73, 296—7: *Habt vbern senat clag vúrpracht* (über etwas), *Das im ein rat nie hat gedacht.*

Wie hier bei der Anknüpfung der Fragesätze, so vermisst man in folgenden Fällen, vom Standpunkte des modernen Sprachgefühles aus, bei der Anknüpfung des *dass*-Satzes ein vermittelndes Glied wie *unter der Bedingung* o. ä.: Fsp. 23, 300—304: *der sol Tausendt gúlden dir leyen wol, Doch das du jm . . . Verschreibst . . . zu vnterpfandt . . . all dein wahr;* 34, 252—3: *Die sach mag ich euch geren offen, Doch das ich sicher vor dir sey;* 63, 46—8: *Dw magst wol redn, ich las geschehen, Doch das dw auch darneben thest, Was dw im haus zv schaffen hest;* 76, 63—4: *Ia wol, so wag ichs mit dir hin; Idoch das dw mich thúest ernern,* ähnlich noch z. B. Fsp. 19, 26—31, 32—5; 59, 89—92; 63, 262—3; 76, 252—5. Dass man hier in dem *dass*-Satz nicht einen ohne Hauptsatz stehenden Wunschsatz zu ersehen hat, sondern dass er die durch *doch, jedoch* eingeleitete Einschränkung der im vorhergehenden Satze enthaltenen Behauptung näher ausführt und formuliert, scheint uns aus dem Gedankenzusammenhange klar zu sein. Der *dass*-Satz hat an den obigen Stellen dieselbe Funktion wie der *wenn*-Satz an folgender: Fsp. 38,

242—7: *Nun es sol jr verziehen sein — Mein fraw bricht Häfn, so brich ich Krüg, Vnd wo ich anderst redt, ich lüg — Doch, Gfatter, wenn jr bürg wolt werden, . . ., Das sie solches gar nimmer thu* (diese Interpunktion scheint uns dem gegenseitigen Verhältnisse der Sätze besser zu entsprechen, als die von Goetze).

b) Sehr oft kommt es bei Hans Sachs vor, dass bei der Anknüpfung eines abhängigen Fragesatzes ein zum volleren Ausdruck gehöriger Zwischengedanke unausgesprochen bleibt. So namentlich bei Anknüpfung eines mit *ob* eingeleiteten Satzes (ähnlich mhd., s. Paul Gr. § 353, *1.*; ein Beispiel aus Luther bei Paul Pr. a. a. O.), z. B. FS. 207, 5—6: (Dem pegegnet) *Ain kacz, die auch zv feld war gangen,* (zu sehen) *Ob sie ir mocht der feltmeüs fangen;* 263, 97—8: *Drümb wil ich auch mein red peschliessen, Ob ich auch schweigens mocht geniesen,* ähnlich 203, 71—3; 212, 45—6; 224, 19—22; 242, 49—51; 287, 14—15 und oft. Ebenso in folgenden Fällen, wo andere Konjunktionen die Rolle des *ob* übernommen haben: FS. 9, 93—4: *Darnach er auff ein süplein geet, Wann er mer gelts im hausz nicht het;* 301, 20—22: *(Der Wolff) strecket stets auff seinen Hals . . ., Wenn sie jm würff das Kind hinausz;* FS. 13, 79—80: *Der Teufel lest ein Weib sich zwingen, So ferr ers in vnglaub müg bringen.* Entsprechend verhält es sich in folgenden Fällen, wo Pronomina oder Adverbia den Fragesatz einleiten: FS. 17, 67—8: *Thu auff, ins ritten nam, dein augen, Wie sie alle drey von dir saugen,* ähnlich Fsp. 6, 68—9; vgl. noch Fsp. 47, 102—3: *Kain ander frewde hat er sunst, Denn wie er die Leut peinig vnd Marter.* — — FS. 27, 65—6: *So wöllen wir den Esel tragen, Was nun die welt darzu will sagen,* ähnlich 217, 52—4; Fsp. 16, 187—8; 60, 112—15; — Fsp. 6, 34—5: *ich bring dir ein mumschantz, Welcher heint dem andern zalt das glog,* ähnlich Fsp. 28, 51—2; — Fsp. 28, 111—12: (ich will) *die helmlein ziehn vorab, Wer vnter vns den vorstraich hab.*

Seltener als Fragesätze werden abhängige Sätze anderer Art in der oben bezeichneten ungenauen Weise mit ihren Hauptsätzen verbunden. Vgl. FS. 65, 185—9: *Er sprach: Das ist das grob geschlecht, Tagloner . . . Vnd alle vntrew arbeiter, Das man in ein der hel aüscher Ir fawlkeit vnd hinlessikeit* (etwa = Die sind hier, damit man . . .); 161, 97—100: *Vnd als ich mir gnüeg zechen was, Ging ich . . . mein stras, Dacht, e das mir ein vnglüeck wachs Vnter den knechten* (= ich will gehen, eh mir . . .); Fsp. 65, 302—4: *Wen den der dewffel füeret hin Den jungen gseln, wie irs thüet treiben, Wo würt als den der priester pleiben* (bei vollem Ausdruck etwa: was zu erwarten ist, wenn man bedenkt, wie . . .); 85, 98—100: *Zenas, wie dewr achst den vnlüest, Den vngeschaffen sueppenwüest, Das ich nit vnkawft kom von dir* (man vermisst etwa ein: ich frage es, o. ä.). Auch in folgenden Fällen, bei der Anknüpfung

der Kausalsätze, vermisst man einen Zwischengedanken: FS. 24, 65—8: *Sie sprach: Wie mag inn wildem schein Ein guttes hertz verporgen sein, Weyl jr euch mit vnzúchting worten Auch hôren last an allen orten* (der mit *Weyl* eingeleitete Satz begründet nicht direkt die Frage, sondern einen Satz der den Übergang aus dem allgemeinen Gedanken der Frage in den speziellen der Fortsetzung vermittelt); FS. 32, 86—7: *Er sprach: Wenn ich das hôrt von jr; Dieweil ich bin sein vnbedacht* (zum Verständnis der Stelle vgl. das oben § 73 über die Situation gesagte); vgl. noch Fsp. 76, 330—331: *Er hat dreisg daler aingenúmen; Wan ich pin aus dem haûs nit kûmen* (etwa = ich weiss es, denn . . .).

4. Als eine Gruppe für sich stellen wir hier noch eine Reihe von Fällen ungenauer Anknüpfung eines abhängigen Satzes zusammen, die es mit einander gemein haben, dass im abhängigen Satze Worte oder Gedanken irgend einer Person angeführt werden. Die Ungenauigkeit besteht darin, dass das Verbum dicendi, welches bei vollem Ausdruck des Gedankens die Anknüpfung des abhängigen Satzes zu vermitteln hätte, als selbstverständlich und überflüssig unausgedrückt bleibt. Die Anführung ist entweder eine indirekte, oder seltener eine direkte.

a) Im ersteren Falle hat der abhängige Satz häufig die Form eines Fragesatzes. So z. B. FS. 28, 6—7: *Der gleich múesten die mayd am rayen halten her, Wie diese vnd jene doch also vúrwicz wer* (der *Wie*-Satz enthält Worte der V. 1 erwähnten Zuschauerinnen des Tanzes); Fsp. 6, 2—3; *Der Herr lud mich heût, Wie er wûrt heint ein gastung haltn;* 11, 1—3: *Ich bin . . . Von einem worden rauf beschieden, Wie etlich kranck heroben wern;* 56, 278—9: *Ich bitt, mein lieber Mann, warumb Ich mir doch jetzund lassen sol;* 63, 39—40: *(hastw) die lewt helffen richten aus, Was die vnd der thw in seim haus* (etwa = indem du erzählt hast, was . . .). So noch in folgenden Fällen, wo der vollständige Ausdruck etwa eine Form vom Verbum *fragen* als Verbindungsglied zwischen die Sätze hineinschieben würde: FS. 51, 46—7: *Der drat zu mir vnd mich ansprach, Wer mich gestellet het hieher;* 60, 10—11: *Die pald den fuechs vermonet, Was sein gescheft da wer;* Fsp. 61, 114—15: *Ich wil in anreden an lawgen, Warumb er so pekûmert sey,* vgl. noch FS. 70, 14—15; 114, 7—8; 189, 24—5; 220, 101—2; 318, 7—10. Häufig ist die indirekte Anführung in einem konjunktionslosen Satze enthalten, dessen Verbum im Konjunktiv steht, oder in einem Satze, der kein grammatisches Zeichen der Abhängigkeit hat. Beispiele: FS. 218, 24—6: *Pald schickt die fraw ir maid hinab Zw Alexandro, sie wolt gern In seiner hûeld vnd lieb gewern;* 246, 15—16: *Der kam gar demûetiger weis, Er wolt im dienen vmb die speis;* 314,

72—4: *Da gfil mir drefflich wol das ding, Die würde der frumb wird vns schencken, Im aller pesten sein zv dencken*, vgl. FS. 76, 56—8; 80, 33—5; 96, 12—13; 232, 96—9; Fsp. 28, 50—51; 31, 130—133; — FS. 19, 38—9 *(mein hertz hat) In eyfer schwer . . . gewacht, Villeicht hast einen andern du;* Fsp. 51, 311—12: *mein Mann schickt mich her, Ir solt mir geben den Taler*, ähnlich 53, 124—6. An folgenden Stellen ist der abhängige Satz mit *dass* eingeleitet: FS. 234, 6—8: *Da loff er vnd fand ainen füechsen, Weil er der künst ain maister wer, Das sein künst im mitailet er;* Fsp. 30, 307—10: *O . . . erst merck ich, Das du hast betrogen mich, Das niemandt reych sey . . . Denn durch . . . frumkeit*, vgl. noch Fsp. 71, 249—52: *Darmit ich all sein argûment Gewalticlich vmbstosen kent, Das pesser wer leben on e, Weil darfon kem gros angst vnd we.*

b) In direkter Form sind Worte irgend einer Person ohne Vermittlung eines Verbum dicendi angeführt z. B. an folgenden Stellen. FS. 7, wo der Dichter, nachdem er erzählt hat, wie ihm einmal ein unglücklicher Mann sich über sein böses Weib und ihre vielen Unsitten beklagt habe, V. 92 fortfährt: *Ich sprach: „Ich wolt sie darumb straffen: Liebe hauszfraw, das sol nicht sein;* nachdem darauf der Mann weiter geklagt hat, seine Frau gehe auch mit schlechten Freundinnen um, von denen sie noch mehr Böses lerne, heisst es wieder vom Dichter ähnlich V. 104—5: *Ich sprach zu yhm: „Das lid ich nit: Thu dich diser gespilschafft ab“*, (die Worte *Thu dich* etc. sind die Worte, welche der Dichter in der Lage des Mannes an seine Frau richten würde). Weniger auffallend ist die unvermittelte Einführung der oratio directa in folgenden Fällen: FS. 82, 13—15: *der jüncker . . . In aufruepft paide dranck vnd speis: „Wie hat euch dis vnd jens geschmecket?“;* 196, 140—41: *(Der pawer) Zaigt dem Hainczen den wasser krüeg: „Drinck, das nit als vbers essen ge!“*

5. Endlich haben wir in diesem Zusammenhange noch folgende Stellen anzuführen, wo die Verbindung der Sätze eine freiere ist, indem ein Zwischengedanke unausgedrückt bleibt: Fsp. 5, 335—7: *Herr Richter, wenn das gelten thut, So hat Tyberius, der Keyser, Gesoffen offt, das er wurd heyser* (der vollständige Ausdruck wäre etwa: So kann ich mich damit entschuldigen, dass T. . . . hat); 39, 194—5: *Wenn ich die warheit sagen sol, Sie halten sich erlich vnd wol*, vgl. 39, 208—9 (ähnliche Wendungen auch in der modernen Sprache, s. Paul Pr. S. 271).

§ 75. Wieder eine Gruppe von sogenannten elliptischen Ausdrücken wird von den Fällen gebildet, wo anstatt eines Substantivs mit einer dazu gehörigen Bestimmung nur die Bestimmung gesetzt ist, indem das Hauptwort aus der

Situation verstanden wird (s. Paul Pr. a. a. O.). Diese Erscheinung kommt bei Hans Sachs, wie im Allgemeinen, öfters bei Citaten aus irgend einer Schrift vor. Wenn z. B. ein Kapitel angegeben werden soll, wird dies Substantivum als selbstverständlich erspart und nur die Ordnungszahl als Attribut dazu ausgedrückt. So 165, 104: *Leůitici am ailften stat: . . .;* 225, 1—3: *Das virzehent im ersten puech Der natůrlichen weisheit sůech;* 373, 106: *Wan das ander zwn Rômern spricht;* ib. 112: *Wie man Actis am ersten list;* FS. 60, 53—4: *Cristůs Mathey spricht Das sechzehent pericht.* Aus einem analogen Vorgange werden wohl auch folgende Stellen zu erklären sein: Fsp. 5, 261—3: *Auch steht Proverbiorum ebn, Der Wein vnd Weiber nemen hin Des menschen krefft;* Fsp. 7, 357: *Proverbiorum vns vermant, Ein geitzig Kônig verderb das landt;* denn es ist wohl anzunehmen, dass an der ersteren Stelle gemeint ist: es steht Proverbiorum in dem u. dem Kapitel, an der u. der Stelle, ebenso an der letzteren: das u. das Kapitel, die u. die Stelle Proverbiorum vermahnt etc. Diese Fälle würden sich also von den zuerst verzeichneten dadurch unterscheiden, dass hier ausser dem Substantivum *Kapitel* oder dergl. auch die Ordnungszahl unausgedrückt geblieben ist. — Noch ein Fall, wo statt eines Substantivs mit dazu gehörigem Adjektivattribut nur das letztere gesetzt ist, findet sich Fsp. 49, 191: *Ich wil den nechsten* (Weg) *gehn Marck lauffen*, dieselbe Wendung ausserdem Fsp. 53, 42: *Ich wil den nechsten zu jm kern;* 56, 93: *(ich) Wil den nechsten in Garten gehn;* 75, 61: *(ich) Den nechsten gen hoff lawffen wil*, vgl. noch FS. 254, 71—3.

Ein Beispiel dafür, dass statt eines Substantivums mit genitivischer Bestimmung nur diese ausgedrückt wird, bietet uns der sogenannte Genitiv des Spiels in Wendungen wie FS. 18, 42—5: *Sie sprach zu mir:* „. . . . *Ich kan ein rechtgeschaffen spil*“. *Ich sprach:* „*Wie heysts?* . . .“- *Sie sprach:* „*Es heisset: der vntrew* (= Das Spiel der Untreue); ib. 58: *Ich sprach:* „*Yhr kůnt der vntrew wol*“ [1]). Ferner sind wohl hierher zu stellen die als Scheltworte sehr üblichen Ausdrücke von der Art wie *aller kôtzen* (z. B. Fsp. 10, 187: *Schlag her, bist du keck, aller kôtzen;* 66, 295: *Haltz maul, aller vnendling koczen*), *aller herren* (Fsp. 73, 271: *O ir aller poshafting herren*). Eine völlig befriedigende Erklärung dieser Wendungen kennen wir nicht. Nur soviel scheint sicher, dass die Genitive hier von einem ausgelassenen Vokativ abhängen. Nach dem DWb. Teil 1, Sp. 220 (unter *Aller*) hat man an ein Wort zu denken, das etwa Haupt, Anführer, Meister, Muster bedeutete, sodass

[1]) Auch das Verbum *spielen* wird in derlei Wendungen unterdrückt, z. B. FS. 18, 36: *Ich sprach:* „*Wöll wir der meysten lesz* (spielen)*?*“; ib. 38: „*Wöll wir strichs vnd der pild?*“

aller kötzen etwa heissen sollte: aller liederlichen Dirnen Vorbild, vgl. mhd. aller êren ein vaz. Diese Erklärung scheint uns aber auf einen Fall wie Fsp. 56, 114: *O du verfluchte aller Frawen* kaum anwendbar. Und eine andere plausible Erklärung der Stelle können wir auch nicht geben. Jedenfalls ist wohl klar, dass in diesem Falle kein Wort ausgelassen ist. Die Frage, die wir übrigens nicht entscheiden können, ist hier nur, ob der Genitiv hier als ein partitiver aufzufassen ist, sodass die Wendung den Sinn hätte: du unter allen Frauen verfluchte, oder ob man das Adjektivum als Attribut zu dem nicht mehr als Genitiv, sondern als einheitliches, vokativisches Schimpfwort empfundenen *aller Frawen* zu nehmen hat. Uns ist das erstere wahrscheinlicher, und wir glauben, dass man es vielleicht überhaupt in Wendungen der fraglichen Art mit einem Genitivus partitivus zu thun hat, der von einem ausgelassenen Worte [etwa einem Superlativ wie *schlimmste(r)*] abhängig ist. Übrige hierher gehörige Wendungen sind: *allers dropffen* (Fsp. 15, 304; 28, 70; 59, 302), *allers laurn* (Fsp. 26, 156), *allers Narrn* (Fsp. 28, 114; 83, 231), *allers Pfaffen* (Fsp. 34, 306; 51, 332), *allers pueben* (Fsp. 81, 265; 84, 368), *allers alten* (Fsp. 51, 137); über die hier auftretende Form *allers* s. DWb. unter *Allers*. Auch Genitive Singularis kommen vor: *als mans* (Fsp. 51, 345; *als* = alles, Genit. Sing., s. DWb. unter *Alles*), *allers mans* (60, 66, 126), *Allers vollen Esels vnd Lappen* (Fsp. 46, 212), *Allers esels vnd alten narren* (Fsp. 62, 377). Diese und ähnliche Scheltworte finden sich massenhaft auch bei anderen frühnhd. Schriftstellern, s. DWb. a. a. O.

§ 76. Endlich ist noch zu erwähnen die Ellipse des Verbums *helfe*, die bei Hans Sachs, wie im Mhd. (s. Paul Gr. § 323) und Frühnhd. [s. DWb. unter *Sam, 4)*] in Betheuerungsformeln üblich ist, z. B. Fsp. 27, 209: *Ich wolt sammer S. Quirin nit bleiben;* ib. 221: *Ich wil sammer botz Córper mit dir*, ähnlich Fsp. 57, 391: *sammer potz leiden;* 62, 332: *Sammir poz angst;* 79, 27: *samir pocz schwais.*

Anhang.

§ 77. Es erübrigt uns nur noch, hier zuletzt einige Fälle von Sparsamkeit im Ausdruck anhangsweise zu betrachten, die mit den bisher besprochenen keine so nahe Verwandtschaft zeigen, dass sie in den oben behandelten Gruppen hätten untergebracht werden können.

In Fällen, wo von mehreren gleichartigen und gleichnamigen Gegenständen die Rede ist, und diese nachträglich durch bestimmende Genitive oder Pron. possessiva von einander unterschieden werden sollen, muss nach dem heutigen Sprachgebrauch das Substantivum, auf welches sich die Bestimmungen beziehen, vor diesen durch ein determinatives Pron. wieder aufgenommen werden. Schon im Mhd. kann so ein Determinativum vor die unterscheidenden Bestimmungen treten, muss aber nicht notwendig gesetzt werden, sondern kann auch ausbleiben (s. Paul, Gr. § 320). Bei Hans Sachs nun giebt es keine Beispiele dafür, dass ein Determinativum in der angegebenen Weise gesetzt wäre, oder jene Beispiele müssten uns entgangen sein. Wohl aber haben wir einige Fälle der oben charakterisierten Art anzuführen, in denen das heutzutage notwendige determinative Pron. erspart ist. So heisst es FS. 127, 1—2: *Es sind drey frölich dot auf erden, Darob die lewt erfrewet werden* und V. 7: *Der erst fro dot der ist eins pfaffen* (= der eines Pf.). Ebenso 212, 36—9: *Ich pat den alten . . . Die drey dôt zw erzelen mir. Er antwort: . . . Der erst fro thot ist aines pfaffen.* Die übrigen Stellen, wo wir eine ähnliche Ersparung bemerkt haben sind FS. 334, 123—6: *(er ersach) Wie ein fraw auf hing An einen zaûn ir wesch gering, Gar zerissene hederlein, Ir vnd auch irer kinder klein;* 345, 59—61: *Das sie verwarn mit trewem mûet Ires herren leib, er vnd gûet, Der gleich auch seiner kind vnd weib* (= die seiner Kinder und seines Weibes; über die Nichtwiederholung des Adjektivattributes vgl. oben § 50, *2.*; *weib* aus Reimnot statt Weibes, s. oben § 61); 385, 5—7: *Die Frau hat jr neigung vnd begir Auff Erd nach viererley Thier, Doch eins minder, desz andern mehr* (= die des einen in geringerem, die des andern in höherem Grade); Fsp. 49, 55—6: *(Salomon spricht) Auff Erdt sey kein listiger haubt, Denn einer Schlangen.* Endlich findet sich noch eine hierher gehörige Stelle Fsp. 50, wo Augustus, der sich das Bett eines verstorbenen Edelmannes kaufen will, V. 283—4 sagt: *O, mein beht haben all den feler, Das ich nit schlaffen kan darin* und V. 290: *Des Edlmans musz sein ein senfft beth.* — Auch bei Luther finden sich Beispiele ähnlicher Erscheinungen wie die hier erwähnten; s. Franke § 331, *3.*

II.

Pleonasmus.

Unsere bisherige Darstellung hat uns gezeigt, in welch mannigfaltiger Weise die Neigung zur Sparsamkeit im Ausdruck sich in Hans Sachsens Sprache bekundet, welch buntes Bild die bei ihm vorkommenden, auf jene Neigung zurückzuführenden Erscheinungen uns gewähren. Es ist demnach zu erwarten, dass wir über die Erscheinungen ganz entgegengesetzter Natur, die wir im Folgenden betrachten werden, über den Pleonasmus, den Luxus in der Anwendung sprachlicher Ausdrucksmittel, nicht viel werden zu sagen haben. Und in der That sind die Fälle, in denen sich Hans Sachs diesen Luxus gestattet, bei weitem nicht von so mannigfacher Art, wie die Äusserungen des Sparsamkeitstriebes.

§ 78. Am eigenartigsten und für unseren Dichter am meisten charakteristisch sind unter den zum Pleonasmus gehörigen Erscheinungen eine Anzahl von Fällen, wo innerhalb desselben Satzes derselbe Satzteil zweimal durch dasselbe Wort ausgedrückt wird. Wir führen zunächst die Belegstellen vor und ordnen sie nach der Art des wiederholten Satzteiles.

Dasselbe Subjekt ist zweimal gesetzt FS. 40, 57—8: (Die Magd) *Verbrent das holtz, eh sie zu letzt Das flaisch vngwaschen sie zusetzt;* 231, 51—2: *Solichs elends dv vor den tagen Pistw genczlich gewest vertragen* (der Punkt der Ausgabe nach *tagen* muss wohl ein Druckfehler sein); 383, 11—13: *Er sprach: Auff das ich in der mesz Der mancherley stueck ich kains verges, So schreib ider ein denckzettel an;* vgl. ausserdem 310, 89—90: *So fielen ir auch oft vnd dick Ir vber den langen sawstrick;* nach einem hineingeschobenen Zwischensatz ist dasselbe Subjekt wiederholt 139, 27—8: (Ein Bettler beichtete dem Mönch) *wie er auch pey seinen tagen, Was nit gen wolt, er mit het tragen.* — Dasselbe Verbum finitum ist zweimal ausgedrückt 266, 70—72: *wie hastw den thon, Das dw peim tag pist an der sûnen Gefallen pist in diesen*

prûnen?; 322, 3—6: *Wo er nûr kund pey seinen jarn Ein pfening kûnd am mawl ersparn . . ., Das det er als vûr gluecksfal rechen.* — Ebenso das Objekt 284, 48—9: *Der Wirt sich bald nach aller leng Sich an der Kammer Erden legt;* 351, 89—90: (ich) *Vermaint, wie das in nach den stücken Thet in sein puckel also jücken;* Fsp. 83, 290—292: *Ich wil . . . machen mich hinaûs, Weil mich der Narr dreymal der masen Mich fretet hat mit meiner nasen;* vgl. noch Fsp. 82, 321—2: *Daraus sich den zv aller zeit Vil neid vnd hases sich pegeit.* — Ferner adverbiale Bestimmungen FS. 308, 1—3: *Ich haw vnd hobel an dem ploch, . . . idoch Pleibt es doch vngeschlacht vnd grob;* 315, 127—8: *Das er auch mit list vnd gefert Auch entlich vberforteilt wert;* 326, 89—92: *Ergrieff man in . . ., So hawt man im noch ain glied rab Von aim andren finger herab;* 338, 93—5: *Kûncz Zweyffel stund auf morgens frw, Setzt in aim grosen kessel zw Die arbeis zûm fewer zv mal;* 346, 91—3: *Als den er seine wol pekanten Freûnd, geselen vnd wol verwanten Dûckischer weis den thuet an seczen;* Fsp. 47, 81—3: *Was meindt der Kônig, mich bescheidt, . . ., das wir heudt all beidt Sollen heudt neben Damon sthon;* Fsp. 77, 90—92: *Ich hab gewont der fawlen tag Vnd leg zv nacht ain ghrüeten arm Zw nacht auf ainen leren darm;* Fsp. 79, 130—131: *Weib, nenn mir die wûrcz noch ainmal, Da der hirsprey wirt gelb darfon* (= da der h. von gelb wirt = von welcher d. h. g. wird); Fsp. 84, 3—6: *Zw hôrn ein kûrczweillig gedicht, Von Pocacio zwgericht In seim puch Cento noûella; Da zaigt er an nach lenge da, Wie* etc. (beide *da* lokal); Wiederholung einer adverbialen Bestimmung nach einem Zwischensatze findet sich Fsp. 81, 346—8: *Dem gueten man wider zv stel, Welicher in dem hem hie stat, Wider bald sein geraubte wat!* — Endlich sei hier noch angeführt FS. 196, 96—7: *Da sprach der pawersmon: „Da schmicz herdurch!" der pawer sprach,* ein Pleonasmus, der in den heutzutage vielfach in mundartlicher Rede vorkommenden Tautologien wie *da sagt' er: „. . .", sagt' er* seine Analogien hat.

Sieht man sich nach den Ursachen der oben verzeichneten Wiederholungen um, so hat man dieselben wohl am wahrscheinlichsten auf metrischem Gebiete zu suchen. Die zum Ausdruck des Gedankens nöthigen Worte füllten das Versmaass nicht aus und der Dichter machte sich, um die Lücke zu ergänzen, nicht die Mühe ein besseres Mittel zu erfinden, als die Wiederholung eines schon einmal gesetzten Wortes. Übrigens braucht diese Wiederholung nicht immer aus lauter Bequemlichkeit hervorgegangen zu sein. In manchen Fällen liesse sich vielleicht auch an eine Kontamination zwischen zwei ebensogut möglichen Wortstellungen denken: der betreffende Satzteil hätte ebensogut an zwei verschiedenen Stellen des Satzes gesetzt werden können, und statt ihn nun

entweder an der einen oder an der anderen Stelle zu setzen, hätte ihn der Dichter aus Versehen an beiden ausgedrückt. So hätten wir z. B. FS. 383, 11—13 eine Kontamination aus 1:o *Auff das ich in der mesz Der mancherley stueck kains verges* und 2:o *Auff das in der mesz . . . ich kains verges.* In entsprechender Weise liessen sich noch andere unter den oben angeführten Stellen auffassen, z. B. 266, 70—72; 351, 89—90; Fsp. 82, 321—2; 83, 290—292 u. a. Bisweilen, z. B. FS. 326, 89—92; 338, 93—5, mag wohl das Reimbedürfnis auch mitgewirkt haben.

Es kommen noch einige Wiederholungen eines Satzteiles vor, bei denen andere Gründe in Betracht zu ziehen sind. Zur nachdrücklichen Hervorhebung des Satzteiles dient wohl seine Wiederholung Fsp. 84, 40—41: *Dardurch ich paider in der stil Ir paider gar ab kůmen wil*, ebenso nach einem Zwischensatze FS. 180, 147: *Als was er sicht, dadelt er als* (: *hals*); 214, 45—6: *Wan als was sach vnd hört die haczen, Das selbig künt sie alles schwaczen.* Nichts als ein Versehen, eine Dittographie liegt wohl vor FS. 32, 22—3; *nicht dester minder Fůlstu du dich, vnendlicher balck!* und FS. 55, 60—62: *Wo anderst sie wollen mit eren Auskůmen aůch wie piderlewt, Muesens sis kauffen aus der hewt;* ebenso wohl auch Fsp. 74, 153—5: *Wie ist mein haus versorgt so wol Mit hausrat, so zochens mirs vol Mein schwieger vnd mein frumes weib,* wenn nicht hier vielleicht das erste *es* als Akkusativ, das zweite als Genitiv genommen werden könnte, sodass die Stelle folgenden Sinn hätte: *so zogen es* (das Haus) *mir dessen* (des Hausrats) *voll meine Schwieger* etc., in welchem Falle der Ausdruck nicht pleonastisch wäre. Endlich in Fällen wie FS. 8, 177—8: *Auff das, wann die fraw fürher geh, Das sie jr dinglich find, als ich* scheint uns die Wiederholung nicht notwendig einen Pleonasmus enthalten zu müssen; denn es lässt sich wohl denken, dass der Dichter das erste *das* als Pronomen demonstrativum, das zweite als die jenes Pronomen erläuternde Konjunktion verstanden hat. Ähnliche Stellen sind 252, 44—6: *Auf das, wen solche lewt den stůrben, Das* (= dass sie) *stecz mit haůffen ire sel Hinab den fůeren in die hel;* 279, 60—61: *Auff dasz, wenn ich hinauff nach Iarn Fahr, dasz er mir denn wider schenck;* Fsp. 74, 245—6: *Auf das, went schergen wider kůmen, Das sie kein argwon darpey nemen*, vgl. ausserdem FS. 47, 31—4; 299, 97—8.

In Anschluss an die oben besprochenen Pleonasmen führen wir hier folgende Stelle an, wo zwar nicht dasselbe Wort wiederholt ist, aber doch derselbe Begriff innerhalb desselben Satzes in pleonastischer Weise durch zwei synonyme Wörter ausgedrückt zu sein scheint: Fsp. 71, 245—8: *Můs schawen, ob ich Solonem Durch list künt obliegen in dem, So ich in möcht ob seinem*

sún Cleglich kúnt machen trawren thún (zwei Synonympaare: *möcht — kúnt, machen — thun*). Man könnte hier versucht sein, den Satz durch ein Komma nach *machen* in zwei koordinierte Sätze zu zergliedern. So erhielte man aber einerseits die Konstruktion: *einen kläglich machen* (= einen traurig machen), andererseits würde die Konstruktion *einen trauern thun* (= machen, dass einer trauert) herauskommen. Diese Konstruktionen sind beide gleich befremdend und zweifelhaft. Für die erstere bietet das DWb. keinen Beleg, die letztere soll nach Adelung [s. bei Sanders Wb. unter *Thun 3)* c)] niederd. sein, im Hochd. ganz unbekannt. Wir glauben daher *cleglich* als Adverb und zum Inf. *trawren* gehörig fassen zu müssen und nehmen an, dass der Dichter durch metrische Gründe sich zu der durch die oben angegebenen Synonyma überladenen Ausdrucksweise hat zwingen lassen, statt einfach zu sagen: *wenn ich ihn kläglich trauern machen könnte.*

Hier ist auch der geeignetste Ort den Pleonasmus zu erwähnen, der in Konstruktionen liegt wie Fsp. 79, 154: *ich wil gen wider haimhin laúffen.* Zum einfachen Ausdruck des Gedankens hätte es genügt, das Verbum *laúffen* direkt von *wil* abhängig zu machen (ich wil haimhin lauffen). Statt dessen ist jenes Verbum von dem pleonastisch hinzugefügten Infinitiv *gehen* abhängig gemacht, der seinerseits direkt von *wil* abhängig ist. Ähnlich ist die Konstruktion z. B. Fsp. 79, 251—2: *Der wurcz hab ich gnúnck, wil gen lawffn Den pauern maidn des kirtags kauffn;* Fsp. 83, 290: *Ich wil gen machen mich hinaús;* Fsp. 85, 144: *Ich wil gen wider haim warcz gon.*

§ 79. Eine bei Hans Sachs ziemlich häufig vorkommende Art von Pleonasmus, die der im vorhergehenden Paragraphen besprochenen am nächsten kommt, besteht darin, dass derselbe zwei koordinierten Gliedern eines zusammengesetzten Satzes gemeinsame Satzteil in beiden gesetzt, durch dasselbe Wort ausgedrückt wird. Auch diesen Pleonasmus hat man wohl auf ähnliche Ursachen zurückzuführen, wie den § 78 erörterten. In einigen Fällen liesse sich wohl die Wiederholung durch das Bestreben rechtfertigen, der Rede mehr Nachdruck, dem Ausdruck eine gewisse Fülle zu verleihen, eine Übereinstimmung oder einen Gegensatz hervorzuheben. Aber überall ist es uns doch am wahrscheinlichsten, dass man auch hier in den Wiederholungen in erster Linie das dem Dichter bequemste Mittel zu sehen hat, den Forderungen des Versmaasses, mitunter auch denen des Reims, zu genügen.

Nur eine Stelle haben wir beobachtet, wo der wiederholte Satzteil das Subjekt ist: Fsp. 12, 192—5: *Iz so ich int e kumen pin Vnd ich mein weib gleich geren schlúeg, Vor iren straichen vngefúeg Kan ich gar nicht hinzwku-*

men (der in *ich schlúeg* und *iren straichen* liegende Gegensatz vielleicht mit Veranlassung der Wiederholung). Sonst haben wir nur Fälle anzuführen, wo ein den koordinierten Sätzen gemeinsames Verbum finitum wiederholt wird. So in zwei Gliedern eines Hauptsatzes FS. 208, 35—40: *Ain warer freúnt, . . ., Der stichet nit wie scharpfe dorn, Sûnder er ist lind vnd holtselig, . . ., Nit rawch, zenckisch, sûnder langmûetig, Ist gedûltig, lieblich vnd gûetig;* 311, 169—70: *Neckische weis ist nûr ain spot Vnd ist zu nichsen nûecz noch not;* 315, 5—6: *Sein gawl war allenthalben nas Vnd mit kot ser pespruecket was;* 225, 55—7: *Solichs alles mûstw geraten, An der sûnen im acker praten Vnd mûst stetigs gefangen sein;* 317, 147—8: *Nach dem thet vntermaid im zwagen Vnd waidlich vmb den kopf det schlagen;* 349, 77—8: *So wûrt er von den zwiffeln pissen, Vnd wurt mit der ruetten geschmissen.* Ebenso in zwei koordinierten Gliedern eines Nebensatzes z. B. FS. 6, 65—8: *wer grob ist, nichssen kan, Will auch kein straff nicht nemen an, Sonder will je ein pûffel bleyben, Den solt man im Narrenbad reyben;* FS. 10, 30—31: *Vnd wil, jch sol jr helffen sparen Vnd sol bey jr im hausz vmb zausen;* 212, 90—93: *So fluecht er ir vnter der erden, Die in hat peinigt in dem leben, Auch nach dem dot im hat vergeben Ir guet,* ähnlich 370, 8—10; — 329, 37—9: *warhaft zv zaigen on, Wer gestert het hant arbeit thon Vnd sein fest het gefeyret nicht;* 224, 22—3: *Ob ern môcht pey dem hals erzwacken, Vnd môcht ain nachtmal an im haben,* ähnlich 338, 59—60; — 290, 22: *Heyl ihm sein plag, dasz er môg gahn Vnd sein brodt selber môg gewinnen;* 301, 79—81: *Die jhn . . . Kan wol auffhalten lange zeit Vnd jm das maul kan wol auffspreissen.* — Mit den hier verzeichneten Wiederholungen lässt sich der an folgender Stelle vorkommende pleonastische Ausdruck am besten vergleichen: Fsp. 67, 286—9: *Weils auf ert ist so úebel sten, Wird ich nicht lang pleiben auf erden, Sûnder mich gar pald drollen werden Gen himel;* der Reimzwang scheint hier an dem Pleonasmus schuld zu sein.

Hier lässt sich auch folgende bemerkenswerte Stelle am besten anreihen: FS. 344, 25—6: *Wan er war vil reicher an guet, Den reich an vernûnft, sin vnd mûet.* Das dem Komparativ entsprechende positive Glied, welches in den Vergleichssätzen implicite liegt, aber in der Regel unausgesprochen bleibt und aus dem Hauptsatze verstanden wird, ist hier — wohl aus metrischen Gründen — ausgedrückt, und der Ausdruck erscheint daher dem gewöhnlichen Sprachgebrauch gegenüber pleonastisch; vgl. P. L. Ipsen: *Zur Syntax der Vergleichssätze* (Zeitschrift für deutsche Sprache, Jahrg. 9, S. 258 ff.).

§ 80. Ausserordentlich häufig findet sich bei Hans Sachs die Wiederaufnahme eines innerhalb desselben Satzes stehenden Substantivums durch das Demonstrativpronomen *der*, ein Pleonasmus, welcher auch vor und nach Hans Sachs in der Sprache sehr beliebt ist (ahd. mhd. und nhd. Beispiele bringt Erdmann § 93, mhd. stehen ausserdem bei Paul, Gr. § 324 und Grimm Kl. Schriften III, S. 337, woselbst auch einige nhd. verzeichnet sind).

1. Gewöhnlich richtet sich das demonstr. Pron. im Kasus nach dem vorangestellten Substantivum. Wir entnehmen Hans Sachs nur wenige Beispiele. FS. 301, 17: *Der Wolff aber der hôret das;* Fsp. 77, 225: *Meins duechs des gieb ich nicht von mir;* FS. 312, 93: *Einem dem war der schlaff genûmen;* 309, 121: *Mein guten rock den gib ich dir;* 309, 87: *Sieben guelden die het er par;* 355, 35: *Vermeint, der wort der solt sich schemen Sein knecht;* bemerkenswert ist der Ausdruck Fsp. 77, 205: *Wir zwen die kriegen mit einander*, wo das vorangehende *wir* durch das Pron. *der* aufgenommen wird, ein Beweis dafür, dass das Pron. in dieser Verwendung auf dem Wege war zu erstarren und ins Formelhafte überzugehen. Das Pronominaladverb *da* kann, wie im Mhd., statt eines Kasus von *der* fungieren, z. B. FS. 341, 101—4: *Der den mit laut troendem pellen . . ., Darmit kan er pey seinen tagen Forcht, angst vnd schrecken ein thun jagen.*

2. Ziemlich oft begegnet man auch bei Hans Sachs, wie im Mhd. u. ebenso im späteren Nhd. (s. ausser Paul a. a. O. und Pr. S. 238 die zahlreichen Beispiele bei Grimm a. a. O. S. 333—7, vgl. auch Matthias, S. 189) der Erscheinung, dass das vorangestellte Substantivum als Träger der Hauptvorstellung des Gedankens, als psychologisches Subjekt im Nominativ steht, das wiederaufnehmende Pronomen aber in dem Kasus, den das grammatische Verhältnis erfordert. Beispiele: FS. 1, 52: *Drey lind, der solt jr nemen war;* Fsp. 15, 87—8: *Sem vnd Iaphet, von den mit namen Kumpt purgerschaft vnd adels stamen;* Fsp. 72, 5—6: *porgn vnd schreiben ant kerben Des môcht ein reicher wirt verderben;* auch hier Pronominaladverb statt eines Kasus des Pronomens: FS. 282, 164—5: *Wann mein Handwerk vnd das ich treib, Darmit gewinn ich kaum das Brodt;* 386, 44—6: *Peitschen, wedel vnd schwamen, Darmit dûet man dich schlagen;* vgl. noch folgende Fälle, wo anstatt des Substantivums ein neutrales Pronomen mit dazu gehörigem Relativsatze fungiert: 371, 93—4: *Als was vns das glueck peschert, Darmit werden wir auch ernert;* FS. 86, 255—7: *Vnd als was aine pringt auf pon, Die ander darzv hewchlen kon;* Fsp. 8, 383—5: *Hôr, all mein Lehr in einer sum Ist, Als was du hôrst oder sechst, Das du dich gleich darnach auch brechst.*

3. In Fällen, wo zwischen das Substantivum und das zu dessen Wiederaufnahme dienende Demonstrativum ein Relativsatz hineingeschoben ist, kommt es bei Hans Sachs zuweilen vor, dass das Subst., dem gewöhnlich ein Demonstrativum als Attribut vorangeht, in den Kasus des Relativums gezogen, nach dem Relativsatze aber vom Demonstrativum in dem Kasus wieder aufgenommen wird, den seine Funktion im Satze verlangt. Diese Attraktion, die auch sonst im Nhd. oft anzutreffen ist (Beispiele bei Grimm a. a. O. S. 330 f., vgl. auch Erdmann § 96 geg. Ende und Matthias, S. 189), besonders aber im Mhd. (s. die reichhaltige Beispielsammlung bei Grimm a. a. O. S. 326—30, vgl. Paul Gr. § 344, Anm.) sehr gebräuchlich war, haben wir an folgenden Stellen bemerkt: FS. 170, 44—6: *Den fawlen schelm, den dw hast gsehen Vnterm baumb liegn . . ., Der wirt zv dail der endling maid;* 332, 179—80: *Den gertner, den dw hast darin, Der selbig het den nůez vnd gwin;* Fsp. 70, 226—7: *Den nolhart, den wir habn erschlagn, Der wirt noch haben etlich gelt;* wahrscheinlich liegt dieselbe Attraktion vor auch Fsp. 32, 352—3: *Schawt, mein Herr, den Ring, den mir schencken Thet der alt, der ist auch nit gut,* doch lässt sich ja der Akkusativ *den Ring* auch als Objekt zu *Schawt* auffassen. Zweifelhaft ist es, ob man einen Fall wie Fsp. 77, 228—30: *Der nechst mensch, der auf dieser stras Kůmb, . . ., Den selben soltw reden an* hierher stellen, oder zu der oben unter *2.* besprochenen Gruppe führen soll [1]).

[1]) Die Attraktion des Korrelats in den Kasus des Relativums ist bei Hans Sachs nicht auf die Fälle beschränkt, wo das Subst. nach dem Relativsatze durch ein Demonstrativum nochmals aufgenommen wird, sondern kann auch von diesem Pleonasmus unabhängig auftreten; vgl. z. B. FS. 20, 72—3: *Ain gedultig man stercker ist, Dann den sterckesten, den man findt.* Wenn nun Hans Sachs 169, 57—8 schreibt: *Den dieb, den ich hab erdabt, Hat menschen hent vnd fues gehabt,* so ist, soviel wir sehen, kein genügender Grund vorhanden, die Lesart der Handschrift (s. die Bemerkung zu V. 57 unten S. 480 der Ausgabe) zu ändern und *Der dieb* statt *den dieb* zu lesen, wie Goetze thut.

Wir benutzen hier die Gelegenheit, um noch einige Stellen anzuführen, wo eine Art von Attraktion vorzuliegen scheint. Wenn es FS. 313, 33 ff. heisst: *(Der münich Erzelt) Wie sant Anthoni . . . Die sew . . . pehuet Vor den welffen vnd der kranckheit, . . ., Welch paurn ir opfer geben gern,* so steht hier wohl *Welch paurn* für den Bauern, welche, d. h. das Korrelat ist in den Relativsatz hineingezogen und hat sich im Kasus nach dem Relativum gerichtet. Derselbe Vorgang noch z. B. 313, 39—40: *Welch paurn nit zinst vnd opfer geben, Der* (= deren) *sew würns jar nit vberleben.* Entsprechend ist wohl aufzufassen auch Fsp. 74, 157—8: *Gott wöll in geben gleichen lon, Was guetz sie teglich an mir thon* (*Was guetz* etwa = für das Gute, was). — Ein Fall, wo dem Ausdruck eine Attraktion zu Grunde zu liegen scheint, findet sich noch in Fsp. 3, dem Kampfgespräch zwischen dem Reichtum und der Armut. Nachdem die Streitenden beide zu Ende gesprochen haben, redet sie der Waldbruder als Richter so an (V. 371 ff.): *Nun hör, Reichtumb! so deinen mut Der geytz besitzt, . . ., Vnd bist genaw vnd karck darbey . . .* (V. 379 ff.): *Vnd du, Armut, so du . . . Dein gutlich . . . verthust, ... Vnd richtest an als vngelück . . .; Wa yhr bayd lebt also . . . Seyt yhr bayde nicht ehren werdt.* In einer ganz ähnlich gebauten Periode wendet er sich dann wieder zuerst an den Reichtum (V. 387 ff.): *Du aber, Plute, so dir gut . . . zu fallen thut Vnd henckest*

§ 81. Nur sehr selten scheint Hans Sachs das Pronomen *er* in ganz analoger Weise wie das Demonstrativum *der* zur Wiederaufnahme eines vorangestellten Wortes zu verwenden (auch im Mhd. ist *er* in dieser Verwendung seltener als *der*, s. Paul Gr. § 325). Wir haben ausser der schon oben citierten Stelle FS. 341, 101—4: *Der den mit laut troendem pellen . . . Darmit kan er . . . Forcht . . . ein thun jagen*, wo das wiederaufgenommene Subjekt das Demonstrativum *der* selbst ist, nur noch folgende bemerkt: 143, 111—14: *Also der ueberfluessig wein Durch die ainige natůr sein Macht er die jůngen vnd die alten So in mancherley weis zerspalten* [die Interpunktion von Goetze (Ausrufezeichen nach *wein*) scheint uns nicht berechtigt]. Häufiger kommen Fälle vor, wo auf ein vorausgeschicktes psychologisches Subjekt ein Satzgefüge folgt, in dessen Nachsatze jenes Subjekt nochmals durch *er* aufgenommen wird, z. B. Fsp. 11, 367—8: *Ein yegklicher, dieweil er lebt, Las er sein vernunfft Mayster sein;* FS. 144, 127—9: *Also der lanczknecht in dem krieg, Weil er ist gsůnt, hat glueck vnd sieg, So nempt er zv vnd dunckt sich hoch;* 144, 209—10: *Der krebs, wen man* (= man ihn) *int pfannen pringt Zw sieden, fecht er an vnd singt;* 176, 24—7: *Von der feuchte jhm die spulweck, die er het knollat einhin fressen, Als er ein weil im Baum war gsessen, Geschwalens jhm im Bauch;* 346, 45—7: *Schaw, der faul pawers man, So er sein erbtail hat verthon, Hat er sein waidfiech abgestochen;* 387, 25—8: *Ein Bulerin, . . ., Wo sie ein schlechten Buler spůrt, In jren dienst denselben reitzt Sie vnd das Maul jm lang auffspreitzt;* ähnliche Fälle bei Luther, s. Franke § 347, *a)*. In den bisherigen Belegen war das vorangeschickte psychologische Subjekt zugleich grammatisches Subjekt des Nachsatzes. Nur eine hierhergehörige Stelle haben wir bemerkt, wo zwischen dem psychologischen und dem grammatischen Subjekt Widerspruch besteht. Dieser wird in derselben Weise ausgeglichen, wie in den im vorigen Paragraphen unter *2.* besprochenen Fällen, wo das Demonstrativum *der* zur Wiederaufnahme diente: das psychologische Subjekt wird im Nominativ vorausgeschickt, und das zu seiner Wiederaufnahme dienende Pron. *er* richtet sich in der Form nach seiner grammatischen Funktion im Satze. Die Stelle ist FS. 59, 1—4: *Augustůs, der gros kaiser, . . ., Als der kam aus der schlacht, Wart im ein vogel pracht.*

---

nicht dein hertz daran. Sonder etc., dann an die Armut mit den Worten (V. 395 ff.): *Der gleich dich, Armut, wo dich drück . . . vngelück Vnd pleybst gedultig* etc., und führt V. 401—2 die Periode zu Ende: *Wo yhr also lebt mit einander, Seyt yhr zu preysen baydesander.* Man erwartet hier in V. 395 statt des ersten *dich* den Vokativ *du*, weil der Akkusativ hier eigentlich keine *raison d'être* hat. An der entsprechenden Stelle in der vorhergehenden Periode (V. 379) heisst es ja auch: *Vnd du, Armut*, ähnlich V. 387: *Du aber, Plute*, etc. Der Akkusativ *dich* beruht wohl nur auf einer Attraktion an das im folgenden durch *wo* eingeleiteten Satze stehende *dich*.

§ 82. Sehr zahlreich sind bei Hans Sachs auch die Fälle, wo ein vorhergehendes Prädikat oder eine adverbiale Bestimmung durch die Adverbia *so* oder *da* nochmals aufgenommen wird (derselbe Gebrauch häufig im Mhd. s. Paul Gr. § 326). Einige Belege mögen hier genügen. Das Adverb *so* dient zur Wiederaufnahme sowohl eines Prädikates als einer adverbialen Bestimmung, z. B. FS. 68, 47: *Ein wolff so ist das virde thier;* FS. 96, 42—3: *Dick, faist am leib vnd wol dürch spicket So ist in meinem haûs mein fraw;* FS. 4, 15—17: *Vmb yedes Hausz so ist ein Zaun, . . ., Von Maluasier so sindt die Brunnen;* FS. 13, 58—9: *Ausz der Kuchen vnd dem weinkeller So hol ich gut Flaschen mit wein;* FS. 67, 142—3: *Auch so grieff er zům öftern mal Hinein zw mir;* 143, 35—6: *Aber vnmessiclich getrůncken So zůent er an der dorheit fůncken;* 153, 132: *Nőtten so wirstw oft stůed vol;* 306, 124—6: *Wiewol iczůnd vor kurzen tegen So ist der fawlen műnich hauffen Maniger spuelen ler gelawffen.* Das Adverb *da* wird nur zur Wiederaufnahme einer adverbialen Bestimmung verwendet, z. B. FS. 15, 7: *Inn dem da kam ein Ieger leisz;* 101, 11: *Entlich da würt die glock gegossen;* 160, 1—2: *Eins tags an ainem abent spat Da het der Lůcifer ain rat,* ähnlich 167, 1—2, vgl. 333, 79—81: . . . *morgen auf den sůntag, . . ., Da wől wir pey dem pache sein.*

§ 83. Nur selten lässt sich bei Hans Sachs die Erscheinung belegen, dass ein Gegenstand zuerst in unbestimmter Weise durch ein Pronomen angedeutet, und erst nachträglich durch ein Substantivum bestimmt bezeichnet wird, ein Gebrauch, der auch sowohl im Mhd. (s. Paul, Gr. § 327) als im späteren Nhd. (s. Erdmann § 93) vorkommt. Ueber die psychologische Ursache desselben s. Paul Pr. S. 102 a. E. In folgenden Fällen geschieht die Andeutung durch eine Form des Pronomens *er:* Fsp. 5, 139—142: *Vnd als er sie fandt ob dem Spil, Die Herrschaft, vngeendter sachen Wolt er kein bůndnusz mit jn machen;* Fsp. 57, 125—6: *Ich hoff doch, ich wölls sehen bald, die auszerwelt vnd wol gestalt;* FS. 309, 56—7: *Vnd fing ir etwas auf drey schock, Der gros schiltetten haderlews.* Dieselbe Funktion wie hier das Pronomen *er,* scheint im folgenden Falle das Demonstrativum *das* zu haben: Fsp. 84, 403—4: *Das gfelt mir wol, pey meinem aid, Ir abentewrisch affenspil* (das Fragezeichen der Ausgabe nach V. 404 scheint uns nach V. 402 vorzurücken und hinter V. 404 durch einen Punkt oder ein Ausrufezeichen zu ersetzen zu sein); möglich ist aber auch, dass hier *Das* für *des* = *deshalb* steht, wie oft bei Hans Sachs.

In diesem Zusammenhange seien noch ein Paar Stellen erwähnt, wo das Subjekt in eigentümlicher Weise zuerst durch das unbestimmte *man* und hinterher durch ein Substantivum bezeichnet ist: FS. 173, 38—40: (der schneider) *Schlůcy*

ir (der Geis) *ein nadel in den kopff, Auf das man ir nit künt ansehen, Der pfleger, was ir wer geschehen;* 271, 58—63: *Als man ains tages sich pereit, Der adl, am marck zv stechen dort, Stelt man den graffen an ain ort . . ., das . . . Er sehen wart das ritter spil.*

§ 84. Seit mhd. Zeit lässt sich die in den heutigen Mundarten (vgl. Wunderlich, Sb. S. 154 f.) sehr beliebte Konstruktion nachweisen, in der zum Ausdruck eines possessiven Verhältnisses der Dativ (oder der Genitiv) eines Substantivs oder substantivischen Pronomens neben einem Pronomen possessivum verwendet wird. Auch bei Hans Sachs begegnet man dann und wann Ausdrücken wie FS. 17, 4: *Anfing der Kuplerin jr Sun, Sprach* etc.; 282, 242—3: *(ich) Veracht der andern Glerten allen Ir Lehr vnd guthertzige Schrifft.* Hierher hat man wohl auch zu stellen FS. 149, 79—81: *Derhalb so rüem sein münd nimant, Den was er selb mit aigner hant Mit warer that verpringen kon* (*sein münd nimant* = niemand(em) sein Mund = niemandes Mund), sonst kann ich der Stelle keinen Sinn abgewinnen. Es ist wohl anzunehmen, dass die genannte Konstruktion ihre Entstehung einer Gliederungsverschiebung verdankt, von Fällen ausgegangen ist, in denen der Dativ als Bestimmung zum Verbum des Satzes, das Pronomen possessivum zum Substantivum gesetzt wurde. Solche Fälle finden sich bei Hans Sachs ungemein häufig; wir heben nur einige wenige hervor: FS. 93, 47: *Vor angst dem knecht grüeselt sein plüet;* Fsp. 52, Bühnenbemerkung nach V. 180: *Der Herr legt dem ersten* (Kinde) *die hend auff sein Haubt;* Fsp. 70, 195—6: *Fuercht stet, mir kümb auf meinen rüeck Ein vnfürsehens vngelüeck;* Fsp. 32, 273: *Mein Herr, mir felt in meinen sin . . .;* FS. 187, 44: *Da fiel im schlecht in seinen sin,* ähnliche Wendung FS. 157, 4. Mit diesen Fällen vergleiche man folgende, in denen der Ausdruck nicht pleonastisch ist: Fsp. 70, 194: *Vor forcht grueselt mir gleich die hawt;* Fsp. 52, Bühnenbemerkung nach V. 302: *Der Herr legt eim* (Kinde) *die hendt auff den kopff;* Fsp. 57, 121—2: *Das ist ein vnuerhofftes glück, Das mir selb waltzet auff den rück;* FS. 179, 70—71: *Zv lecz dem pawren kam in* (= in 'n = in den) *sin, Dacht,* etc. Hierher gehörige pleonastische Ausdrücke finden sich noch z. B. Fsp. 4, 288; 19, 231; 25, 303; 57, 69, 167; 64, 164 und oft.

§ 85. Der Gebrauch einer doppelten oder mehrfachen Negation ist natürlich bei Hans Sachs wie in der älteren Sprache überhaupt sehr ausgedehnt. Fälle wie Fsp. 47, 25—6: *Ich hab dich auch in all dein sachen Kein mal nie frölich sehen lachen* oder FS. 193, 8: *Kein rüe am disch het nimant nicht* sind fast auf jeder Seite zu finden.

§ 86. Eine bei Hans Sachs nicht sehr seltene Erscheinung, die wir hier noch zum Schluss zu besprechen haben, ist der Gebrauch eines vom Standpunkte des modernen Sprachgefühles aus pleonastischen *und*. Dieser Gebrauch lässt sich auch sonst in der frühnhd. Sprachperiode vielfach belegen; noch häufiger ist er in der Übergangszeit vom Mhd. ins Nhd. (Beispiele bei Kehrein § 333) und zeigt seine vollste Entwickelung im Mhd. (s. Müller-Zarncke's mhd. Wb. unter *Unde*). Ob das betreffende *und* wirklich als rein pleonastisch und bedeutungslos zu bezeichnen ist, wie Wunderlich, Sb. S. 237 will, oder ob es je nach der Art des Satzes, in dem es gebraucht wurde, eine verschiedene, den Schriftstellern jedesmal lebendig gegenwärtige Bedeutung und Funktion hatte, eine Ansicht die Tobler in seinen Kuhns Zeitschrift Bd VII[1]) S. 353 ff. und Germania XIII, 91 ff. veröffentlichten Abhandlungen vertritt, das ist eine Frage, in der wir uns kein Urteil zutrauen und auf die wir uns daher nicht einlassen können. Wir verweisen auf die genannten Untersuchungen und müssen uns hier darauf beschränken, den oben angegebenen Gebrauch, wie er bei Hans Sachs besteht, zu konstatieren, die Stellen anzuführen, wo wir jenes dem modernen Leser pleonastisch erscheinende *und* vorgefunden haben.

1. Was zuerst den Gebrauch jenes *und* in selbständigen Sätzen betrifft, so steht uns dafür kein ganz klares und sicheres Beispiel zu Verfügung. Indessen wollen wir hier einige Stellen besprechen, wo der Gebrauch von *und* in Hauptsätzen, wenigstens vom Standpunkte des modernen Sprachgefühls aus betrachtet, auffallend und befremdend ist. Dies ist zunächst der Fall Fsp. 11, 70 ff., wo der Kranke seinem Arzte, der ihm *ein trůncklein* für seinen verdorbenen Magen verordnet hat, zuruft: *Was wirt es für ein trůncklein sein? Ist es Wein, mát oder weisz Bier? Mein lieber Herr, vnd het ichs schier! Ietz het ich eben gleich ein durst*[2]). Als pleonastisch möchten wir das *und* in diesem Falle doch nicht bezeichnen, sondern glauben vielmehr, dass es hier in seiner gewöhnlichen kopulativen Bedeutung gebraucht sein und verstanden werden kann. Das Befremdende der Stelle liegt nur darin, dass *und* hier zwei Sätze verbindet, die nicht mit einander gleichartig sind (einen Fragesatz und einen Ausrufs- oder Wunschsatz). Aus ähnlichen Gründen fällt das *und* auch an folgender Stelle auf: Fsp. 65, 313—15: *Pist . . . frumb, So sag dw mir her vnd kurczumb, Wer ich sey, vnd das wil ich hon.* Weniger klar

[1]) Nicht „im sechsten Band", wie der Verfasser selbst, Germania XIII, 91 angiebt.

[2]) Der von *vnd* eingeleitete Satz kann wohl nicht — wie Goetze, aus der Interpunktion zu schliessen, thut — als Bedingungssatz aufgefasst werden (dies scheint uns der Sinn der Stelle zu verbieten), sondern ist ein selbständiger Wunschsatz, weshalb wir das von Goetze nach V. 72 gesetzte Komma durch ein Ausrufezeichen ersetzt haben.

als in diesen Fällen ist uns die Funktion des *und* in einer Stelle, die sich Fsp. 4 findet. Die böse, gegen ihre Magd wüthende Frau sagt da (V. 262—5) ihrem Manne, der sie hindert, über die Magd herzufallen: *Wie? legst du dem schlepsack zv? Ia, ja, ja, ja. Vnnd ist das war? Es hat mich wol gedaucht das jar, Du habst die Magd lieber denn mich* (vgl. die Interpunktion von Goetze). Man könnte vielleicht die Antwort *ja, ja,* welche die Frau selbst auf ihre Frage *legst du* etc. giebt, als Parenthese nehmen und auch hier das *und* in seiner gewöhnlichen kopulativen Bedeutung die zwei Fragen mit einander verbinden lassen. Doch fassen wir lieber die Worte *Vnnd ist das war* als eine für sich stehende Frage auf und sehen in der Stelle ein Beispiel des von Tobler, Kuhns Zeitschrift S. 357, hauptsächlich mit spätnhd. Beispielen belegten und auch Germania XIII S, 96 erwähnten Gebrauches von *und* im Anfange solcher Fragen, welche eine Folgerung enthalten. Danach hätte hier *und* den Sinn von *denn, also; vnd ist das war* = so ist es denn wahr? es ist also wahr. Goetze scheint die Worte *vnnd ist das war* hier nicht als Frage verstanden zu haben, wohl aber an einer parallelen Stelle FS. 70, wo sie einen logisch abhängigen Satz bilden. Der Dichter erzählt da, wie er in seiner Jugend eines Abends zu seinem Herzliebchen schlich, in heisser Liebe entbrannt und fest entschlossen, die Geliebte möglichst bald, „*noch hewt*“ zur Ehe zu nehmen. Da begegnet ihm sein alter Meister, der, als er sein Vorhaben erfährt, ihm dringend zuredet, sich doch noch zu bedenken, ehe er einen so entscheidenden Schritt thue. Der junge Verliebte will zunächst nichts davon wissen. In einer langen Rede beschreibt ihm endlich der Alte, wie das eheliche Zusammenleben, auch mit einem guten Weibe, seine Schattenseiten habe, mit einem bösen aber eine Hölle auf Erden sei. Da fährt nun der Dichter V. 139—40 fort: *Da dacht jch mir: Vnd ist das war? Ich ging haim, harret noch zway jar.* Auch hier bedeutet uns die von *Vnd* eingeleitete Frage: *so ist es also wahr?* Vielleicht wäre es aber auch hier nicht unmöglich, dem *und* seine normale kopulative Bedeutung zu lassen. Man hätte dann anzunehmen, dass der Gedanke, mit dem *und* die Frage verbindet, dem Dichter „subjectiv vorschwebte“ (Tobler, Kuhns Zeitschr. a. a. O.), aber unausgedrückt blieb.

2. Häufiger als in Hauptsätzen begegnet man bei Hans Sachs einem pleonastisch erscheinenden *und* in untergeordneten Sätzen verschiedener Art.

a) Nach einem verallgemeinernden Relativum findet es sich z. B. Fsp. 3, 135—6: *Wie wenig vnd das ymmer sey, Enthalt ich mein natur dar bey* und ebda 179—80: *Wie viel vnd dir reichtumb zu fleüst, Mit sorgen du yhr weng geneüst.* Hier dient wohl das *und* zur Verstärkung der Verallge-

meinerung und nähert sich der Bedeutung von *auch*, s. Tobler, Kuhns Zeitschrift VII, S. 360. Hier lässt sich wohl am besten folgende Stelle anreihen, wo das *und* nach einer verallgemeinernden Partikel steht: Fsp. 30, 33—34: *Vnd je mehr vnd du frümmer wirst, Je grösser Reichtum du regierst* (zu beachten ist hier auch der in *mehr — frümmer* liegende Pleonasmus).

b) Vor einem Pron. relativum haben wir ein pleonastisches *und* bemerkt Fsp. 3, 187—9: *Ich hab lustgärten, Rosenstöck, Köstlich schawben vnd Marder röck, All freüd vnd die du magst genennen.* Unsicher bleibt uns folgende Stelle: FS. 54, 25—7: *Als ich am mantag kam vom wein, Vnd was ich fragt die frawen mein, So wolt sie mir kein Antwort geben.* Wahrscheinlich ist auch hier das *und* als pleonastisch oder die Verallgemeinerung verstärkend zu erklären (*vnd was ich fragt* = was ich auch fragte); möglich ist wohl aber auch, dass es in seiner gewöhnlichen kopulativen Bedeutung stehend die verschiedenartigen Vordersätze mit einander verbindet.

c) Am zahlreichsten sind die Stellen, wo das *und* vor der Konjunktion *dass* pleonastisch gesetzt ist. So in Modalsätzen (und dass = sodass) z. B. FS. 29, 57—8: *Da mit zerreisz ich schuch vnd klaider, Vnd das ich schier gee nackend layder;* 145, 1—4: *Eins tages starb aim man sein weib, Die lang het peinigt seinen leib . . . Vnd das er kaümb die haüt künt tragen;* 190, 9—10: *Alda man oft der seinen possn Müst lachen, vnd das man det hossn.* Hierher gehört wohl auch Fsp. 27, 339—42, wo der Edelmann seinen Knechten zuruft: *Geht, rüstet euch in Harnisch beid, Das man den Abt hinausz beleid, Dasz nicht die Schnapphan vbr jn kommen, Vnd dasz jm würd das sein genommen.* Dass hier *Vnd dass* im Sinne von *sodass* zu nehmen ist, scheint uns die Nichtwiederholung der Negationspartikel zu beweisen. Hätte hier *Vnd* seine gewöhnliche kopulative Bedeutung und wäre der letztere *dass*-Satz als mit dem ersteren koordiniert zu verstehen, so müsste, da einmal die gemeinsame Konjunktion wiederholt ist, auch die Negation wiederholt sein. Die Stelle müsste dann lauten: *dasz nicht die Schnapphan vbr jn kommen Vnd dasz jm nicht würd* etc. Ferner könnte als hierher gehörig aufgefasst werden FS. 192, 16 ff. Der an Zahnweh leidende Abt sagt da seinem Schmied, der als in der Arzeneikunst bewandert galt: *Sag, ob dir auch pewisset sey Die arzeney vur den zanwe. Kanstüs, vnd das mir der verge . . ., So verhais ich dir* etc.; wahrscheinlicher ist es aber, dass die Konjunktion *das* hier ein *wenn* ersetzt, und der *das*-Satz mit dem vorangehenden konjunktionslosen Bedingungssatz parallel dasteht, sodass *und* seine gewöhnliche kopulative Bedeutung hat; auch im Mhd. kann sich ja ein *dass*-Satz an einen konjunktionslosen hypothetischen Satz als Parallelsatz anschliessen, s. die Beispiele bei Paul Gr. § 385. Den

oben besprochenen Fällen, wo *vnd dasz* für *sodass* steht, schliessen sich folgende am nächsten an: Fsp. 18, 280: *Gib vrlaub mir vnd das ich far;* Fsp. 76, 300—303: *Gaist, ich peschwer dich pey pix pax, Pey flederwisch, hering vnd lax, Vnd das dw arger Belzepock Ausfarest vber stain vnd stock.* — Vor einem einen Subjektsatz einleitenden *dass* findet sich ein pleonastisches *und* z. B. FS. 145, 118—19: *Schad wer vnd das ain mensch ir nôm Die freud, die sie icz hat dort oben;* Fsp. 73, 254—6: (Manlius) *Was ist der fel? Zaigt vns den on!* (Hortensia): *Das is, vnd das ein ider mon Forthin sol zway eweiber haben.* — Ein Attributsatz wird durch *und dass* eingeleitet z. B. Fsp. 18, 2—3: *Verargt mirs nit vnd das ich heüt Zu euch komme, das ist mein bitt;* Fsp. 38, 106—8: *Vnd ist es sach, vnd das ich Bul, das mir das heysz Eyssen als denn Mein rechte Hand zu kolen prenn.* — Ebenso ein Objektsatz z. B. Fsp. 3, 438: *Gott wôll, vnd das es pald geschech,* ähnlich Fsp. 56, 15; 69, 227—8; vgl. Fsp. 11, 103—4: *O Herr Doctor yetz prûff ich wol, Vnd das ich steck der Narren vol;* 30, 369—71: *Wiewol gar er arm wahr darbey, So sprich ich doch vnd das er sey Der reichst gewest in der Stadt Rom;* 65, 260—262: *Das eprecher creûz vmb kirchn trag, Das idermon mit wert peweist, Vnd das dw ein eprecher seist.*

d) Im Anfang eines abhängigen Fragesatzes findet sich ein pleonastisches *und* z. B. FS. 183, 32—3: *Mein pawer, sag dw mir, vnd ob Dw künst recht zv gmach gen;* vgl. Fsp. 7, 256—7: *Du narrets schaff, sag an, vnd weist Du nit, Das glück hat allweg neyd?*

e) Temporalen Konjunktionen ist *und* nachgehängt z. B. FS. 194, 3 ff.: *Nachdem vnd got, der herr, peschûeff All creatûr durch wortes rûeff* etc. (Nachsatz zweifelhaft, vgl. oben § 9 geg. Ende), ähnlich z. B. 355, 21—4; Fsp. 26, 291—2; vgl. 146, 148—50: *Guet gsel, kûm gen Würmbs hernach Vnd is zv hoff frey vnpeschwert, So lang vnd dieser reichstag wert;* Fsp. 27, 239—40: *Eh vnd er jn von vns empfacht, Hab wir ein Handschuch drausz gemacht;* Fsp. 23, 163—4: *So offt vnd ich kumb an das Hausz, Sagt jr Magdt almal, sie sey ausz.* In Fällen wie die drei letzteren hat *und* nach Tobler, Kuhns Zeitschrift VII, S. 363 und Germania XIII, S. 98, die Funktion einer Vergleichungspartikel. Mit den obigen Belegen vgl. Fsp. 23, 243—5: *Ach wie war mir so leidt vmb dich, Das du hinzuchst so schnelliglich, Eh vnd das ich dich zalen thet.* — Den hier verzeichneten Beispielen schliessen sich am nächsten an Fälle wie Fsp. 76, 418—19: *Die weil vnd wir alhie vermain Die zenckischn vnd pôsen allein.*

f) Vor konjunktionslosen Konditionalsätzen haben wir ein pleonastisches *und* an folgenden Stellen bemerkt: FS. 160, 154—6: *Da antbort im der Lû-*

cifer: Mein Belczepock, vnd ist das war, So wollen wir nun forthin gar Nimer mer nach keim lanczknecht fragen; Fsp. 65, 135—8: *Ich sag euch, vnd thůet eim mislingen, . . ., So můs er . . . Das eprecher kreůcz vmb kirchn tragen;* Fsp. 80, 334—6: *Darumb sag ich dir, liebes weib, Vnd sol daraůs werden ain pferd, So lebt seins gleichen nit auf erd* (ähnliche mhd. Beispiele bei Tobler, Kuhns Zeitschrift S. 365, vgl. auch Germania S. 99).

III.

Verstösse gegen die normale Rektion.

A. Rektionen der Präpositionen.

§ 87. Die Stellen, wo wir bei Hans Sachs Verstösse gegen die normale Rektion der Präpositionen bemerkt haben, sind nicht sehr zahlreich.

1. In den meisten Fällen ist der Dichter zu der betreffenden Anomalie durch die Reimnot veranlasst worden. So FS. 207, 122—4: *Darmit sie sich pehelffen hie On allen rúmb vor vngemachs Mit weib vnd kinden, spricht Hans Sachs;* man hat hier bei *vngemachs* nicht etwa an einen vermittelst der Endung *s* gebildeten Plural zu denken, sondern die Form ist einfach als ein Sprachfehler anzusehen, den sich der Dichter dem Reime zu Liebe gestattet hat. Noch deutlicher geht dies aus den übrigen Stellen hervor, wo dieselbe Anomalie vorkommt: 281, 122—4: *Den helt sein hand in stetter hut Vor alles vnglúcks vngemachsz Hie vnd auch dort, das hofft Hans Sachs;* 295, 99—100: *(Welches würcket der Teuffel arg) Zu stossen in alls vngemachs An Leib vnd Seel, so spricht Hans Sachs;* 328, 167—8: *Das ain* (= einen) *hebt aus als vngemachs, Das in vor peinigt, spricht Hans Sachs;* 379, 99—100: *So wurt aus haders vngemachs Ein frolich hochzeit. Spricht Hans Sachs.* Ausser dieser Gruppe von Sachs-Reimen gehört noch hierher Fsp. 30, 331—4: *Iederman ist jm* (dem Crassus) *Feindt vnd gram, Derhalb er auch in Parthiam . . . Wirt durch der Feindt betrug erschlagen* [dass hier nicht etwa des Dichters mangelhafte Kenntniss des Lateinischen als Entschuldigung der Anomalie gelten kann, scheint uns eine Stelle zu beweisen wie Fsp. 30, 343: *(zeig mir ahn) Ein reichen Burger in Roma*]. Auch Fsp. 39, wo der Teufel V. 405—9 sagt: *diese Heyrat . . . ich doch zuuerhúten hofft . . . Durch den Neidthart vnd allen beden Gschwistert, Luxen vnd Schlappergreden* (= durch den N. und alle beide Geschwister, L. und S.) hat man es wohl nur mit einem aus der Reimnot entsprungenen Sprachfehler zu thun; oder sollten vielleicht

allen und *beden* wirklich Singularformen (Akkusative) sein, wie sie wenigstens von dem letzteren Worte im Frühnhd. vorkommen (s. Paul, Pr. S. 226)? Hierher ist ferner zu stellen FS. 215, 110—12: *Wo ain gast ist so vnferschembt, Vür die herschaft vnd ander gesten Ob dem disch grewffet nach dem pesten* etc. *Vür* ist hier = mehr als, eher als, bezeichnet den Vorzug, den Vorrang [s. hierüber DWb. unter *Für* (Bd. 4, I, 1, Sp. 640)], in welchem Sinne heutzutage *vor* c. Dat. gebraucht wird. Normal sollte die Präposition mit Akk. verbunden werden. Die abweichende Form *gesten* verdankt ihre Existenz hier nur der Reimnot.

2. Abweichungen von der normalen Rektion der Präpositionen, die nicht aus der Reimnot erklärt werden können, finden sich bei Hans Sachs an folgenden Stellen. Fsp. 62, 419—422: *es ist die zawberey Pey meinem aid kain phantasey Weil ich durch irer kraft vnd macht Die wirtin het zumb paren pracht;* es ist nicht einzusehen, warum hier nach *durch* die Form *irer* statt des normalen Akkusativs steht; vielleicht liegt nur entweder ein Druckfehler der Ausgabe oder ein Schreibfehler des Dichters vor. — Die Präposition *vor* regiert in gewissen festen zeitlichen Formeln den Genitiv, z. B. *vor Tags, Morgens, Winters* etc., s. Heyne Wb. unter *Vor* II, *3)*. Auch bei Hans Sachs kommt ein ähnlicher Fall vor, z. B. Fsp. 74, 182: *Vor nachtes dürft ir mein nit warten.* Es ist wohl anzunehmen, dass in diesen Verbindungen die Formen *tags* etc. nicht mehr als Genitive empfunden wurden, sondern als Adverbia (s. Paul Pr. S. 193 f.). Ähnlich lassen sich wohl erklären Ausdrücke wie *zu nachtes* (FS. 49, 8), *zv morgens* (188, 59), *zv abends* (196, 114), wenn nicht in dem ersteren vielmehr eine Kontamination der zwei Ausdrucksweisen: *nachts* und *zu(r) Nacht* (s. z. B. FS. 188, 55) vorliegt, und die letzteren nach Analogie von *zu nachts* gebildet sind. Als eine Analogiebildung nach dem Muster der vorhin erwähnten zeitlichen Formeln lässt sich wohl auch die Wendung *nach essens* am besten auffassen, die bei Hans Sachs Fsp. 7, 24: *Nach essens ist er heut auszgangen* und Fsp. 57, 104—5: *Im Thumb wirst du mich allmal sehen Nach Essens in disen Refiern* vorkommt und auch sonst frühnhd. sich findet, s. DWb. unter *Nach* III, a). — Endlich gehört noch hierher Fsp. 21, 201—3: *Vnd warlich, bin ich Ehren werdt, So ist in meim hausz heür noch ferdt Kein reisten Flachs noch nye nit kommen,* wo man in *meim* wahrscheinlich einen Schreibfehler für *mein* zu sehen hat, oder anzunehmen, dass die zwei Ausdrucksweisen: *in meinem Haus ist kein r. . . . gewesen* und *in mein Haus ist k. r. . . . gekommen* sich hier kontaminiert haben.

In Anschluss an die zuletzt angeführte Stelle sei hier, obwohl zur Rektion der Präpositionen nicht gehörig, noch folgende erwähnt: Fsp. 81, 281: *Ge wo dw*

wilt (für: wohin du willst), *ich will dein nicht.* Metrische Gründe sind es wohl, die den Dichter zu der vorliegenden Inkorrektheit des Ausdruckes gezwungen haben.

B. Rektionen der Verba.

§ 88. Auch hier haben wir zunächst einige Fälle zu verzeichnen, wo offenbar die Reimnot an der Abweichung von der normalen Rektion schuld ist: Fsp. 60, 143—4: *Núchtern danczen vnd núchtern wainen Ist gar nie wol pekumen kainen* (für: *keinem*); Fsp. 81, 310—13: *(ich) Sich dort . . . lauffen zwen mon, Der hinter lauft núr in aim hem Vnd schreyet immer: Halt auf dem, Der mich peraubet in dem waldt!* (vgl. V. 314: *Kúmbt mir zv hilff! Den schalck aufhaldt!*); FS. 67, 290—92: *Also hab ich kurcz ueberlaúffen Der armen roshaút vngemachs. So sprichet von Núrmberg Hans Sachs* (vgl. oben § 87, 1.). — Wenn es FS. 312, 139—40 heisst: *Dardurch er entrinn als vngemachs Nach diesem leben. Spricht Hans Sachs,* so ist man geneigt anzunehmen, dass diese Stelle eine Parallele zu der nächst vorhergehenden bildet, dass nach *entrinnen* hier der Genitiv *vngemachs* wegen des Reims für den normalen Dativ steht; doch kommt auch in Unabhängigkeit vom Reim bei Hans Sachs einmal der Genitiv nach *entrinnen* vor, in der Wendung *des Lands entrinnen,* die im DWb. (s. unter *Entrinnen*) durch *aus dem land, durch das land entrinnen* erklärt wird. Sonst giebt das DWb. keinen Beleg eines Genitivs nach diesem Verbum. — Das Verbum *abkommen* im Sinne von *los werden, frei werden von etwas* wird wie überhaupt in der älteren Sprache (s. DWb.) so auch bei Hans Sachs mit dem Genitiv konstruiert, vgl. ausser den weiter unten folgenden Citaten z. B. FS. 145, 39: *Das sie der marter ist kúmen ab;* zweimal steht aber nach dem Verbum ausnahmsweise der Akkusativ: FS. 143, 138—141: *Wiltw des selbigen abkúmen, So lert der weis Pitagoras: Welcher mensch wóll abkúmen das* (= das Laster der Trunksucht), *Der selb gedenck núr* etc. und Fsp. 36, 288—9: *Ein mensch ist fro, wenn er allein Abkommet das vierteglich Fieber, Daran doch einer hat, mein lieber, Offt dennoch einen guten tag;* kurz vorher, V. 285 heisst es: *Kemstu deins Weibs so geren ab.* Die Annahme liegt sehr nahe, dass der Dichter die erwähnten Ausnahmen dem Reime zu Liebe gemacht hat; doch wäre es vielleicht nicht unmöglich, dass ausser der Reimnot auch die Analogie irgend eines gleichbedeutenden transitiven Verbums mit im Spiele ist. An *los werden* lässt sich

nicht denken, denn nach diesem Ausdruck findet sich der Akkusativ erst seit dem 17. Jh., s. DWb. unter *Los* II, *3)* f). — Wie mit *abkommen* verhält es sich mit der Verbindung *müssig gehen.* Gewöhnlich folgt der Genitiv, z. B. FS. 143, 127—8: *fleúch die trúnckenheit Vnd ge ir mússig alle zeit!* ähnlich ib. 171—2, aber vgl. Fsp. 71, 209—12: *Ir sint súnst gnúeg, so die welt meren, Henck ich* (= wenn ich auch hange) *an gúeter kúnst vnd leren Vnd ge gleich mússig weib vnd kind, Die doch gros herczlaid pringen sind.*

Den eben verzeichneten Fällen haben wir nur wenige Stellen hinzuzufügen, wo die Abweichung von der normalen Verbalrektion nicht von dem Reime beeinflusst ist. Zunächst Fsp. 24, 104: *Schaw zu der groben acker drollen!* (es ist von den Bauern die Rede, also *der drollen* Genitivus Pluralis; vgl. z. B. Fsp. 39, 92: *Adam, schaw zu dem vngefel*). Wenn die Form *der* nicht aus Versehen statt *den* gesetzt ist, so lässt sich der Genitiv am wahrscheinlichsten so erklären, dass das Wort *Schaw zu* hier nicht mehr als Verbum gebraucht und empfunden wurde, sondern als Interjektion fungierte und deshalb, nach Analogie vieler unter diesen Wörtern, einen Genitiv nach sich erhielt. — Im Fsp. 50, 227—9 heisst es: (er) *Het so gar brechtige gebehr, Das er am Keyserlichen hoff Gantz allem Adel vbertroff;* entweder schwebte dem Dichter hier bei dem Dat. *allem A.* ein folgendes Prädikat wie etwa *überlegen war* vor, welches aber wegen des Reimes nicht zur Anwendung kam, oder wir haben auch hier in *allem* einen Schreib- oder Druckfehler für *allen* zu sehen. Nichts als ein ähnlicher Fehler liegt wohl vor Fsp. 75, 380—381: *Das wir dem* (für: den) *Neidhart hinteráeck Vberlisten durch dises stáeck.* Durch die Annahme desselben Fehlers wie in diesem Falle, würde sich auch folgende Stelle am einfachsten erklären: FS. 273, 46—7: *Dem Goldtschmid gleich zu einer schand Nennt einen Drecklóter darumb;* doch kann hier der Dativ auch mit den Worten *zu einer schand* zusammengehören, und bei *Nennt* eine Ersparung von *ihn* angenommen werden.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ.
TOM. XXIV. № 7.

REMARQUES

SUR

UN PRINCIPE GÉNÉRAL DE LA THÉORIE

DES FONCTIONS ANALYTIQUES

PAR

ERNST LINDELÖF.

(PRÉSENTÉ À LA SOCIÉTÉ LE 18 AVRIL 1898.)

Généralités.

1. Soit dans le plan de la variable complexe x une aire T à connexion simple, et soit $f(x)$ une fonction analytique de x régulière dans le voisinage de tout point pris à l'intérieur de T. D'après un théorème fondamental dû à Riemann et dont M. Schwarz a fourni la démonstration rigoureuse, il existe, sous des conditions très générales relatives au contour de l'aire T, une fonction analytique $t = \varphi(x)$, qui réalise la représentation conforme de cette aire sur le cercle $|t| \leq 1$, en sorte qu'à trois points donnés, pris à l'intérieur ou sur le contour de l'aire T, correspondent trois points donnés à l'intérieur ou sur la circonférence du cercle. D'après l'idée même de la représentation conforme, cette fonction $\varphi(x)$ est régulière à l'intérieur de T et, par la même raison, la fonction inverse $x = \psi(t)$ est régulière à l'intérieur du cercle $|t| < 1$. Si nous désignons par t_1 l'affixe d'un point quelconque compris dans ce cercle et par x_1 l'affixe du point correspondant de l'aire T, nous aurons donc

$$x - x_1 = \alpha_1 (t - t_1) + \alpha_2 (t - t_1)^2 + \cdots,$$

la série du second membre étant convergente tant que le module $|t - t_1|$ reste suffisamment petit. D'autre part, comme la fonction $f(x)$, d'après l'hypothèse, est régulière au point x_1, nous aurons dans le voisinage de ce point

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 (x - x_1) + \beta_2 (x - x_1)^2 + \cdots\cdots .$$

En substituant dans cette série à $x - x_1$ l'expression ci-dessus, on trouve pour $f(x)$ un développement suivant les puissances entières et positives de $t - t_1$, convergent tant que le module de cette quantité ne dépasse pas une certaine limite. Donc, par la substitution $x = \psi(t)$, la fonction $f(x)$ sera transformée en une fonction de t:

$$f(\psi(t)) = F(t),$$

qui sera régulière pour tout point compris dans l'intérieur du cercle $|t|<1$, et qu'on pourra par suite représenter, dans ce cercle, par une série procédant suivant les puissances entières et positives de t.

Il est facile de former effectivement cette série. Soit, en effet, x_0 le point de l'aire T correspondant à $t=0$, et soit, dans le voisinage de ce point,

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + \cdots$$

Soit d'autre part, dans le voisinage du point $t=0$,

$$x - x_0 = b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \cdots .$$

Par la combinaison de ces deux égalités il résulte

$$F(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \cdots , \tag{1}$$

série facile à former puisque ses coefficients sont des *polynômes* par rapport aux coefficients a et b; ainsi on aura

$$c_0 = a_0 ; \; c_1 = a_1 b_1 ; \; c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1^2 ; \; c_3 = a_1 b_3 + 2 a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3 ; \cdots\cdots$$

La série (1) est certainement convergente pour les valeurs suffisamment petites de $|t|$. Or, nous avons démontré ci-dessus que la fonction $F(t)$ est régulière tant que $|t|<1$. Nous pouvons donc affirmer, d'après un théorème fondamental dû à CAUCHY, que la série (1) est convergente dans tout le cercle $|t|<1$ et qu'elle est, par suite, identique à la série dont nous avons démontré ci-dessus l'existence.

En faisant dans l'équation (1) la substitution $t=\varphi(x)$, nous aurons donc ce résultat que *la fonction $f(x)$ est représentée, pour tout point compris dans l'intérieur de l'aire T, par la série*

$$f(x) = c_0 + c_1 \varphi(x) + c_2 [\varphi(x)]^2 + c_3 [\varphi(x)]^3 + \cdots\cdots$$

C'est le principe général que nous avions en vue et dont nous nous proposons de développer les conséquences, surtout au point de vue du calcul effectif des valeurs d'une fonction. Nous indiquerons dès maintenant deux ordres de questions auxquelles s'applique directement ce principe.

Supposons d'abord qu'une fonction soit définie par son développement de TAYLOR, p. ex. dans le voisinage de l'origine, et qu'on connaisse les points singuliers de cette fonction, cas qui se présente p. ex. lorsque la fonction satisfait à une équation différentielle linéaire. Pour calculer la valeur de cette

fonction en un point P situé en dehors du cercle de convergence du développement de TAYLOR, ou même sur ce cercle, on doit former une expression analytique qui représente la fonction dans une région du plan comprenant à l'intérieur le point P. Or, la méthode du prolongement analytique par des cercles successifs, à laquelle on a généralement recours dans les questions théoriques, est, l'on en conviendra sans doute, pour la plupart sans aucune utilité pratique. Nous ferons voir qu'on pourra, au contraire, dans bien des cas assez facilement résoudre le problème en invoquant le principe général établi ci-dessus. Il n'y a qu'à choisir une aire T comprenant l'origine et le point P, dans laquelle la fonction donnée est régulière et qu'on sait représenter d'une manière conforme sur le cercle $|t| \leq 1$, en sorte que les points o des deux plans se correspondent. Après avoir déterminé la substitution qui réalise cette représentation, on formera la série (1) comme il a été dit. Pour augmenter la convergence de la série, on doit chercher à donner à l'aire T la plus grande étendue possible. Le degré de convergence, en effet, s'accroîtra en général en même temps que le degré de „condensation" de la représentation conforme. Nous en donnerons dans la suite plusieurs exemples.

Supposons, d'autre part, qu'on se donne une série entière convergente dans un cercle de rayon fini, sans rien connaître sur la fonction analytique qu'elle définit. Pour étudier les propriétés de cette fonction et pour calculer ses valeurs en dehors du cercle de convergence ou sur la circonférence de ce cercle, on pourra encore profiter du principe mentionné, lequel sera dans la plupart des cas à préférer à la méthode ordinaire de prolongement analytique. Nous verrons, en particulier, que ce principe fournit des moyens relativement simples pour la recherche des points singuliers.

Quelques conséquences du principe général qui nous occupe, ont fait l'objet de recherches antérieures; nous citerons à cet égard les travaux de MM. HAMBURGER, POINCARÉ, PICARD et MITTAG-LEFFLER sur la représentation des intégrales des équations différentielles, sur lesquels nous aurons encore à revenir. Mais il y en a d'autres conséquences plus immédiates lesquelles, à ce qu'il paraît, n'ont pas été remarquées jusqu'ici, et quant au principe même, nous ne l'avons nulle part trouvé énoncé directement et sous sa forme générale. Il nous semble, cependant, que ce principe mériterait bien de trouver place dans les éléments mêmes de la théorie des fonctions, notamment dans le chapitre consacré au „prolongement analytique".

Nous n'avons pas l'intention de présenter, dans ce qui suit, une théorie complète; nous nous contenterons plutôt de traiter quelques exemples particuliers, quelques transformations caractéristiques, qui sont d'une utilité réelle pour

le calcul. Pour mieux faire ressortir cette utilité, nous donnerons à la fin de cette étude quelques applications numériques.

La transformation d'Euler et d'autres transformations analogues[1]).

2. Dans le plan de la variable complexe x traçons une droite indéfinie perpendiculaire à l'axe réel et coupant cet axe au point $x=\frac{\alpha}{2}$, α désignant une quantité réelle et *positive*. En faisant

$$x=\frac{\alpha t}{1+t}, \quad t=\frac{x}{\alpha-x}, \tag{2}$$

on arrive à représenter la portion T du plan x, située à gauche de cette droite, d'une manière conforme sur le cercle $|t|\leqq 1$, en sorte qu'aux points $x=0$, $x=\frac{\alpha}{2}$, et $x=\infty$, correspondent respectivement les points $t=0$, $t=1$, et $t=-1$.

Soit maintenant $f(x)$ une fonction analytique définie dans le voisinage de l'origine par la série entière

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots, \tag{3}$$

dont nous supposons, pour plus de simplicité, le rayon de convergence réduit à l'unité. En faisant dans cette série $x=\frac{\alpha t}{1+t}$, et développant suivant les puissances de t, on trouve

$$f\left(\frac{\alpha t}{1+t}\right)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\alpha^n-(n-1)a_{n-1}\alpha^{n-1}+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}a_{n-2}\alpha^{n-2}-\cdots+(-1)^{n-1}a_1\alpha\right\}t^n. \tag{4}$$

Dans le cas où la fonction $f(x)$ est régulière dans l'aire T, cette série sera certainement convergente pour $|t|<1$, et $f(x)$ sera représentée, pour tout point à l'intérieur de T, par le développement

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\alpha^n-(n-1)a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}a_1\alpha\right\}\left(\frac{x}{\alpha-x}\right)^n. \tag{5}$$

---

[1]) Les principaux résultats des numéros 2 et 3 ont fait l'objet d'une note de l'auteur, intitulée *Sur la transformation d'Euler et la détermination des points singuliers d'une fonction définie par son développement de Taylor*, insérée dans les Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris (le 28 février 1898).

Réciproquement, si la série (4) converge pour $|t|<1$, la fonction $f(x)$ est régulière pour tout point compris dans l'aire T. Si, au contraire, le rayon de convergence ϱ de la série (4) est inférieur à l'unité, on en conclut que l'aire T renferme des points singuliers de la fonction $f(x)$, et l'on pourra évidemment, dans certains cas, fixer la position de quelques-uns de ces points en calculant les valeurs de ϱ correspondant à différentes valeurs de α. Dans cette hypothèse, la série (5) pourra encore représenter la fonction $f(x)$ dans certaines régions extérieures au cercle de convergence de la série primitive (3).

Considérons en particulier le cas $\alpha=1$; la transformation (2) s'écrit

$$x=\frac{t}{1+t}, \quad t=\frac{x}{1-x}, \tag{6}$$

et la série transformée (5) devient

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n-(n-1)a_{n-1}+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}a_{n-2}-\cdots+(-1)^{n-1}a_1\right\}\left(\frac{x}{1-x}\right)^n. \tag{7}$$

C'est *la transformation d'Euler*, dont on s'est beaucoup servi pour augmenter la convergence des séries, toutefois, il nous semble, sans se rendre compte de la raison théorique qui assure le succès de la méthode [1]).

Notons encore le cas $\alpha=2$; la transformation (2) s'écrit

$$x=\frac{2t}{1+t}, \quad t=\frac{x}{2-x}, \tag{8}$$

et l'aire T comprend le demi-plan situé à gauche de la droite perpendiculaire à l'axe réel et passant par le point $x=1$. Dans les cas où la fonction $f(x)$ est régulière dans toute cette portion du plan, la transformation précédente fournit une série assez convergente et doit être préférée à la transformation d'Euler. Ainsi, aux valeurs

$$x=-\frac{1}{2}, \ -1, \ -2, \ -3,$$

correspondent, dans la transformation d'Euler, les valeurs suivantes de t:

$$t=-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4},$$

[1]) Voir: BERTRAND: *Calcul différentiel*, p. 253. TISSERAND: Traité de Mécanique Céleste, T. I, p. 290.

tandis que, d'après la transformation (8), on aura, pour les mêmes valeurs de x,

$$t = -\frac{1}{5}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}.$$

Comme exemple, appliquons la transformation (8) à la série

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots\cdots .$$

Le coefficient de t^n sera, d'après l'équation (4),

$$\frac{1}{n}\left\{2^n - n\cdot 2^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,2^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1} n\cdot 2\right\} = \frac{1}{n}\left\{(2-1)^n - (-1)^n\right\} = \frac{1}{n}\left\{1 - (-1)^n\right\},$$

et la série transformée s'écrira donc

$$f\left(\frac{2t}{1+t}\right) = 2\left\{t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \cdots\cdots\right\}.$$

Cette série étant convergente pour $|t| < 1$, on en conclut immédiatement que $f(x)$, ou bien que $\log(1-x)$ est fonction régulière dans toute la portion du plan à gauche de la perpendiculaire à l'axe réel au point $x = 1$. L'équation précédente, d'ailleurs, n'est autre chose que la formule bien connue

$$\log\left(\frac{1-t}{1+t}\right) = -2\left\{t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \cdots\right\},$$

dont on s'est tant de fois servi pour les calculs numériques.

Voici un autre exemple assez instructif bien que très élémentaire. Soit

$$f(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots\cdots,$$

et appliquons à cette série la transformation d'Euler. En comparant les coefficients de la série transformée, donnés par l'équation (7), aux développements des expressions

$$(1 \pm i)^{n-1} = \left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\left\{\cos(n-1)\frac{\pi}{4} \pm i \sin(n-1)\frac{\pi}{4}\right\},$$

on trouve facilement que le coefficient c_n de la puissance t^n sera égal à

$$\left(\sqrt{2}\right)^{n-2},\ 0,\ -\left(\sqrt{2}\right)^{n-2},\ \left(\sqrt{2}\right)^{n-1},\ -\left(\sqrt{2}\right)^{n-2},\ 0,\ \left(\sqrt{2}\right)^{n-2} \quad \text{ou} \quad -\left(\sqrt{2}\right)^{n-1},$$

suivant que l'index n est de la forme

$$8m,\ 8m+1,\ 8m+2,\ 8m+3,\ 8m+4,\ 8m+5,\ 8m+6 \quad \text{ou} \quad 8m+7.$$

La série transformée commencera donc par les termes

$$(9) \qquad \sum c_n t^n = 1 - t^2 + 2t^3 - 2t^4 + 4t^6 - 8t^7 + 8t^8 - \cdots\cdots$$

La quantité $\sqrt[n]{|c_n|}$ étant égale à 0, $(\sqrt{2})^{1-\frac{1}{n}}$ ou $(\sqrt{2})^{1-\frac{2}{n}}$, suivant la valeur de n, et ayant par suite $\sqrt{2}$ pour limite supérieure, le rayon de convergence de la série (9) sera égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Or, au cercle $|t| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ correspond, dans le plan des x, un cercle C de rayon $\sqrt{2}$ ayant son centre au point $x = -1$. En substituant dans la série (9) $\frac{x}{1-x}$ à t, nous aurons donc un prolongement analytique de la fonction $f(x)$ valable dans ce cercle C.

Pour déterminer les points singuliers situés sur la circonférence de ce cercle, nous appliquerons à la série donnée la substitution (2), en donnant à α une valeur positive plus petite que l'unité. Le coefficient de t^n sera, suivant la valeur de n, égal à

$$\pm \alpha (1 + \alpha^2)^{\frac{n-1}{2}} \cos(n-1)\omega \quad \text{ou} \quad \pm \alpha (1 + \alpha^2)^{\frac{n-1}{2}} \sin(n-1)\omega,$$

l'angle ω étant déterminé par la condition $\operatorname{tang} \omega = \frac{1}{\alpha}$, et le rayon de convergence de la série transformée sera donc égal à $\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$. En faisant dans cette série $t = \frac{x}{\alpha - x}$, nous aurons un prolongement analytique de la série primitive, représentant la fonction $f(x)$ dans le cercle C' ayant pour diamètre le segment de l'axe réel compris entre les points

$$x = \frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{1+\alpha^2} - 1\right) \quad \text{et} \quad x = -\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{1+\alpha^2} + 1\right).$$

Or, les deux cercles C et C' se coupent aux points $x = \pm i$; d'ailleurs, à cause de l'hypothèse $\alpha < 1$, l'arc de C qui est extérieur au cercle $|x| = 1$, est compris tout entier dans le cercle C'. On en conclut que $x = +i$ et $x = -i$ sont les seuls points singuliers situés sur la circonférence du cercle C. Comme d'ailleurs, lorsque α décroit vers zéro, le cercle C' s'élargit indéfiniment, en passant toujours par les points $x = i$ et $x = -i$, nous pouvons affirmer que la fonction considérée est régulière dans toute la portion du plan située à gauche de l'axe imaginaire.

3. Les transformations du numéro précédent conduisent à présenter sous une forme assez nette la condition que doivent remplir les coefficients d'une

série entière, pour qu'un point donné de son cercle de convergence soit un point singulier. Reprenons, en effet, la série (3), en supposant toujours son rayon de convergence égal à l'unité, et appliquons y la transformation d'Euler. Le cercle de convergence $|x|=1$ sera transformé en une droite parallèle à l'axe imaginaire et passant par le point $t=-\frac{1}{2}$. D'autre part, à la circonférence $|t|=\frac{1}{2}$ correspondra, dans le plan de la variable x, une circonférence ayant pour diamètre le segment -1 —— $+\frac{1}{3}$ de l'axe réel et étant, par suite, tangente intérieurement au cercle de convergence de la série (3). Donc, si $x=-1$ est pour $f(x)$ un point singulier, le rayon de convergence de la série transformée (7) sera égal à $\frac{1}{2}$; si, au contraire, la fonction $f(x)$ est régulière au point $x=-1$, ce rayon sera supérieur à $\frac{1}{2}$, puisque alors $f(x)$ est régulière en tout point de la circonférence $|t|=\frac{1}{2}$.

On peut présenter la condition cherchée sous une forme plus générale en se servant de la transformation (2). En effet, cette transformation fait correspondre au point $x=-1$ le point $t=-\frac{1}{\alpha+1}$, et d'autre part à la circonférence $|t|=\frac{1}{\alpha+1}$, une circonférence dans le plan des x, ayant pour diamètre le segment -1 —— $+\frac{\alpha}{\alpha+2}$ de l'axe réel. Il s'ensuit immédiatement que $x=-1$ est, pour la fonction $f(x)$, un point singulier ou régulier, suivant que le rayon de convergence de la série (4) est égal à ou plus grand que $\frac{1}{\alpha+1}$, α ayant d'ailleurs une valeur positive quelconque.

S'il s'agit d'un autre point situé sur le cercle de convergence de la série (3), soit $x_0=e^{i\theta}$, il suffit de poser $x=e^{(\pi-\theta)i}z$, pour que les règles précédentes soient applicables. Pour le point $x=1$, en particulier, nous pouvons énoncer le résultat sous la forme suivante, en invoquant un théorème bien connu, précisé par M. HADAMARD [1]), concernant la grandeur du rayon de convergence d'une série:

Pour que $x=1$ *soit un point singulier pour la fonction définie par la série*

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n\cdots\cdots,$$

dont le rayon de convergence est supposé égal à l'unité, il faut et il suffit qu'on ait pour une infinité de valeurs de n, ε *désignant une quantité positive aussi petite qu'on voudra,*

$$\text{mod.}\left|a_n+(n-1)\,a_{n-1}+\frac{(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2}a_{n-2}+\cdots\cdots+a_1\right|^{\frac{1}{n}}>2\,(1-\varepsilon),$$

[1]) *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, page 5 (Thèse, Paris 1892).

ou encore, sous une forme plus générale,

$$\text{mod.}\left| a_n\alpha^n + (n-1)\,a_{n-1}\alpha^{n-1} + \frac{(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2}\,a_{n-2}\alpha^{n-2} + \cdots + a_1\,\alpha\right|^{\frac{1}{n}} > (\alpha+1)\,(1-\varepsilon)\,,$$

α ayant une valeur positive quelconque.

A l'aide de ce théorème on peut établir rapidement quelques-uns des résultats obtenus antérieurement par MM. Hadamard et Fabry. En voici un exemple. Ecrivons le coefficient a_n sous la forme $g_n e^{\alpha_n i}$, g_n désignant son module, et supposons qu'on ait

$$\cos(\alpha_n - \alpha_p) \geq 0\,,$$

pour toutes les valeurs de n et de p supérieures à un entier positif k. Nous ferons voir que, dans cette hypothèse, $x=1$ est un point singulier pour la fonction $f(x)$.

En effet, la série (3) étant, d'après l'hypothèse, divergente dès que $|x|>1$, on peut trouver une suite illimitée de nombres entiers croissants, $n_1, n_2, \cdots, n_i, \cdots$, tels qu'on ait

$$g_{n_i} > (1-\varepsilon)^{n_i},$$

ε ayant la même signification que ci-dessus. Posons, pour abréger,

$$c_n = a_n + (n-1)\,a_{n-1} + \frac{(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2}\,a_{n-2} + \cdots + a_1\,,$$

et égalons à zéro les coefficients $a_1, \cdots, a_k$, ce qui n'a aucune influence sur le résultat. Nous trouverons

$$|c_{2n_i}|^2 = g_{2n_i}^2 + 2\,(2n_i-1)\,g_{2n_i}\,g_{2n_i-1}\cos(\alpha_{2n_i}-\alpha_{2n_i-1}) + \cdots + (C_{2n_i-1}^{n_i}\,g_{n_i})^2 + \cdots,$$

où

$$C_{2n_i-1}^{n_i} = \frac{(2n_i-1)\,(2n_i-2)\cdots n_i}{1\cdot 2\cdots n_i} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2n_i)!}{(n_i!)^2}\,,$$

et comme, d'après les hypothèses faites, tous les termes de cette expression sont positifs ou nuls, il s'ensuit

$$|c_{2n_i}|^2 \geq (C_{2n_i-1}^{n_i}\,g_{n_i})^2,$$

et, par suite,

$$\sqrt[2n_i]{|c_{2n_i}|} > \sqrt{1-\varepsilon}\,.\,\sqrt[2n_i]{C_{2n_i-1}^{n_i}}\,.$$

Mais l'application de la formule de STIRLING nous donne

$$C_{2n_i-1}^{n_i} = \frac{2^{2n_i-1}}{\sqrt{\pi n_i}}\left(1+\left(\frac{1}{n_i}\right)\right),$$

$\left(\frac{1}{n_i}\right)$ désignant une quantité qui tend vers zéro lorsque n_i augmente. Donc, la racine $2n_i^{\text{ième}}$ du coefficient binomial tendra vers 2, et comme d'ailleurs $\sqrt{1-\varepsilon} > 1-\varepsilon$, on aura par suite, à partir d'une certaine valeur de i,

$$\sqrt[2n_i]{|c_{2n_i}|} > 2(1-\varepsilon).$$

Le point $x=1$ est donc bien un point singulier pour la fonction $f(x)$, ce que nous voulions établir.

Voici une autre remarque sur le sujet qui nous occupe. Mettons que les coefficients de la série (3) soient réels et substituons à x l'expression $e^{i\varphi}.z$. On trouve

$$f(x) = a_0 + \sum_1^\infty a_n \cos n\varphi \cdot z^n + i\sum_1^\infty a_n \sin n\varphi \cdot z^n.$$

Pour que $e^{\varphi i}$ soit pour $f(x)$ un point singulier, il faut que $z=1$ soit point singulier pour l'une des deux séries à coefficients réels qui figurent dans l'expression précédente. C'est ce qui arrive en particulier lorsque, à partir d'une certaine valeur de n, $a_n \cos n\varphi$ ou $a_n \sin n\varphi$ ne change pas de signe. On conçoit dès lors, que la seule succession des signes des coefficients a_n pourra quelquefois révéler l'existence de certains points singuliers sur le cercle de convergence.

Prenons comme exemple la série (9) du numéro précédent. La succession des signes de ses coefficients présentant la période à huit termes

$$(0) \quad - \quad + \quad - \quad (0) \quad + \quad - \quad +,$$

nous sommes amené à examiner de plus près les points du cercle de convergence ayant pour argument un multiple de $\frac{2\pi}{8}$. Or, pour $\varphi = \pm\frac{3}{4}\pi$, $\cos n\varphi$ présente les signes suivants, en faisant successivement $n=1, 2, \cdots, 8$,

$$- \quad (0) \quad + \quad - \quad + \quad (0) \quad - \quad +.$$

Le produit $a_n \cos(\pm\frac{3}{4}\pi)$ étant, par suite, constamment positif ou nul, la série dont il s'agit aura sur son cercle de convergence deux points singuliers ayant resp. pour arguments $+\frac{3}{4}\pi$ et $-\frac{3}{4}\pi$, ce qui est d'ailleurs facile à vérifier.

La transformation $x = 1 - \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^n$.

4. Traçons dans le plan de la variable complexe x, en partant du point $x=1$, deux demi-droites formant avec l'axe réel négatif les angles $n.\frac{\pi}{2}$ et $-n.\frac{\pi}{2}$. L'aire S en forme de secteur infini comprise entre ces droites et contenant à l'intérieur l'origine des coordonnées, est représentée d'une manière conforme sur le cercle $|t| \leqq 1$ par la substitution

$$x = 1 - \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^n. \tag{10}$$

$$t = \frac{1 - \sqrt[n]{1-x}}{1 + \sqrt[n]{1-x}}.$$

Dans cette représentation, les points $x=0$ et $t=0$, ainsi que les points $x=1$ et $t=1$ se correspondent mutuellement; pour $x=\infty$ on aura $t=-1$; aux droites passant par le point $x=1$, et aux cercles ayant ce point pour centre il correspond, dans le plan des t, deux familles de cercles, les cercles de la première famille passant par les points $t=1$ et $t=-1$ et étant coupés orthogonalement par ceux de la seconde famille; en particulier, la circonférence $|x-1|=1$ correspondra à l'axe imaginaire du plan t.

Dans la substitution (10) n peut avoir une valeur positive quelconque. Lorsque $n>2$, le secteur S couvrira le plan x plus d'une fois. Pour être plus clair et pour faciliter le langage, nous ferons dès à présent les conventions suivantes. Les fonctions auxquelles nous aurons affaire, seront en général définies par leur développement dans le voisinage du point $x=0$, et admetteront $x=1$ comme point singulier. Nous appellerons „plan principal“ le plan comprenant ce point $x=0$, rendu simplement connexe par la coupure $1 \longrightarrow +\infty$ suivant l'axe réel. Le plan principal se compose de deux demi-plans, P_1 et P_1', situés le premier au-dessus, le second au-dessous de l'axe réel. De P_1 on viendra en traversant la coupure dans un nouveau demi-plan P_2, puis, en tournant toujours dans le sens indirect autour du point $x=1$, dans les demi-plans P_3, P_4, etc. De même nous désignerons par P_2', P_3', P_4', etc. les demi-plans qu'on rencontre successivement en partant d'un point de P_1' et cheminant le long d'une courbe tournant dans le sens direct autour du point $x=1$.

Dans ce qui suit nous aurons à envisager en particulier les cas suivants de la transformation (10):

$n=1$. La transformation s'écrit

$$x=\frac{2t}{1+t},\quad t=\frac{x}{2-x},$$

et le secteur S comprend le demi-plan du côté gauche de la perpendiculaire à l'axe réel au point $x=1$. Nous avons déjà rencontré cette transformation parmi les généralisations de la transformation d'Euler.

$n=2$. On aura la transformation suivante:

$$(11)\qquad \begin{aligned} x&=1-\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2=\frac{4t}{(1+t)^2},\\ t&=\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}, \end{aligned}$$

et l'aire S sera formée du plan principal entier, limité par les deux bords de la coupure $1 \text{ —— } \infty$.

$n=4$. La transformation correspondante s'écrit

$$(12)\qquad \begin{aligned} x&=1-\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^4=\frac{8t(1+t^2)}{(1+t)^4},\\ t&=\frac{1-\sqrt[4]{1-x}}{1+\sqrt[4]{1-x}}. \end{aligned}$$

L'aire S est, dans ce cas, une surface de Riemann à deux feuillets, ayant $x=1$ comme point de ramification et étant limitée par les deux segments $1 \text{ —— } -\infty$ de l'axe réel, compris respectivement dans les demi-plans P_2 et P_2'.

En général, pour $n=2m$, m désignant un entier plus grand que 1, l'aire S est une surface de Riemann à m feuillets ayant $x=1$ comme point de ramification.

On conçoit facilement le parti qu'on pourra tirer des substitutions précédentes pour le calcul des valeurs d'une fonction. Non seulement qu'elles fournissent souvent des expressions analytiques représentant la fonction donnée dans des domaines étendus, mais elles permettent encore d'augmenter considérablement la convergence dans le cercle où converge la série primitive.

Ainsi, si la fonction $f(x)$, définie par la série (3), n'a dans le plan principal de points singuliers que sur la partie $1 \text{ —— } \infty$ de l'axe réel, la transformation (11) nous donne une série représentant la fonction pour tout point intérieur du plan principal et qui est, dans le cercle $|x|<1$, beaucoup plus convergente que la série (3).

Dans les cas où la fonction $f(x)$ n'a, dans le plan principal, d'autres points singuliers que $x=1$, et que cette fonction est encore régulière pour tout point compris dans l'intérieur des demi-plans P_2 et P_2', l'application de la transformation (12) conduit à une série encore bien plus convergente que celle fournie par la transformation (11), et qui représente la fonction $f(x)$ dans la surface à deux feuillets décrite ci-dessus.

Sous titre d'exemple, appliquons la transformation (10) à la série

$$y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots = -\log(1-x),$$

en nous servant cette fois de la relation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x}.$$

Par la-dite transformation celle-ci devient

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2n}{1-t^2},$$

et on en tire, en développant et en intégrant,

$$y = 2n\left(t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \cdots\right).$$

Cette série étant convergente pour $|t|<1$, nous pouvons affirmer qu'on aura, pour tout point à l'intérieur du secteur S défini au début de ce numéro,

$$\log(1-x) = -2n\left(t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \cdots\right),$$

où

$$t = \frac{1-\sqrt[n]{1-x}}{1+\sqrt[n]{1-x}}.$$

Comme d'ailleurs le nombre des feuillets dont se compose l'aire S, croît indéfiniment en même temps que le nombre n, la formule précédente nous apprend directement que $\log(1-x)$ a $x=1$ pour seul point singulier à distance finie.

Soient maintenant x_1 et x_1' les affixes de deux points appartenant respectivement aux demi-plans P_1 et P_1' mais occupant le même lieu géométrique sur l'axe réel positif, à la distance $\varrho\,(>1)$ de l'origine. Les valeurs de la variable t correspondant à x_1 et x_1', seront

$$t_1 = \frac{1 - \sqrt[n]{\varrho} \cdot e^{-\frac{\pi i}{n}}}{1 + \sqrt[n]{\varrho} \cdot e^{-\frac{\pi i}{n}}} \quad \text{et} \quad t_1' = \frac{1 - \sqrt[n]{\varrho} \cdot e^{\frac{\pi i}{n}}}{1 + \sqrt[n]{\varrho} \cdot e^{\frac{\pi i}{n}}}.$$

Cela posé, formons la différence entre les valeurs de la fonction $\log(1-x)$ aux points x_1' et x_1; nous trouvons

$$(13)\quad \log(1-x_1') - \log(1-x_1) = 2n\left[\left(t_1 + \frac{t_1^3}{3} + \cdots\right) - \left(t_1' + \frac{t_1'^3}{3} + \cdots\right)\right] = 2n(t_1 - t_1')(1+\varepsilon),$$

ε désignant une quantité qui tend vers zéro en même temps que t_1 et t_1'. On a d'ailleurs

$$t_1 - t_1' = \frac{4i\sqrt[n]{\varrho} \cdot \sin\frac{\pi}{n}}{1 + 2\sqrt[n]{\varrho} \cdot \cos\frac{\pi}{n} + \sqrt[n]{\varrho^2}},$$

et comme, lorsque n augmente $\sqrt[n]{\varrho}$ tend vers 1 et ε vers 0, on en conclut que la différence (13) tendra vers $2\pi i$. Donc la fonction $\log(1-x)$ s'accroît de $2\pi i$, lorsqu'on la prolonge le long d'une courbe faisant un tour en sens direct autour du point $x=1$.

On pourrait encore d'une autre manière faire apparaître le nombre $2\pi i$. Faisons, en effet, dans la formule (13) $n=2$, et écrivons les quantités t_1 et t_1', dont le module est dans ce cas égal à un, sous la forme

$$t_1 = e^{\varphi i}, \quad t_1' = e^{-\varphi i}.$$

Nous trouvons

$$\log(1-x_1') - \log(1-x_1) = 8i\left(\sin\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi + \frac{1}{5}\sin 5\varphi + \cdots\right).$$

La série en parenthèses ayant pour somme $\frac{\pi}{4}$, la différence ci-dessus est bien égale à $2\pi i$.

Les applications que nous donnerons à la fin de cette étude, feront bien ressortir l'avantage qu'on peut tirer de la transformation (10) pour les calculs numériques. C'est ce qu'on peut d'ailleurs présumer à l'inspection même du tableau suivant donnant quelques valeurs correspondantes des variables x et t:

valeur de x	valeur correspondante de t [1])		
	$n=1$	$n=2$	$n=4$
$\frac{80}{81}$	.	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{15}{16}$	.	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	0.268
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	0.172
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0.172	0.086
-1	$-\frac{1}{3}$	-0.172	-0.086
-3	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{3}$	-0.172
-8	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{2}$	-0.268
-15	.	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{3}$
-80	.	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{2}$

La transformation $x = 1 - e^{-t}$.

5. Si dans la transformation (10) on fait croître n indéfiniment après avoir remplacé t par $\frac{t}{2n}$, on aura comme limite la transformation bien connue

$$\begin{aligned} x &= 1 - e^{-t}, \\ t &= -\log(1-x), \end{aligned} \tag{14}$$

laquelle représente, comme on sait, la partie du plan des x comprise entre deux demi-droites issues du point $x=1$, sur une bande parallèle à l'axe réel dans

[1]) Le degré de convergence des séries transformées dépend principalement de la grandeur du module de l'argument t. Considérons, en effet, deux telles séries, $\Sigma a_i t^i$ et $\Sigma b_i t^i$, que nous désignerons pour abréger par A et B, ayant toutes les deux l'unité pour rayon de convergence, et supposons qu'à une certaine valeur de x correspondent, dans les séries A et B, resp. les valeurs t_1 et t_2 de t, et qu'on ait $|t_1| < |t_2|$. Posons $|t_1| = |t_2|^\varrho$ $(\varrho > 1)$. En désignant par ε une quantité positive aussi petite qu'on voudra, on aura, à partir d'une certaine valeur de λ,

$$\left|\sum_{\lambda}^{\infty} a_i t_1^i\right| < \frac{|t_1(1+\varepsilon)|^\lambda}{1-|t_1(1+\varepsilon)|} \quad \text{et} \quad \left|\sum_{\lambda}^{\infty} b_i t_2^i\right| < \frac{|t_2(1+\varepsilon)|^\lambda}{1-|t_2(1+\varepsilon)|}.$$

le plan des t. En particulier, le plan principal, limité par les deux bords de la coupure $1 \text{——} \infty$, sera représenté sur une bande de largeur 2π symétrique par rapport à l'axe réel. Le point $x=1$ est rejeté à l'infini dans la direction de l'axe réel positif.

Si la fonction $f(x)$ définie dans le voisinage de l'origine par la série (3), a $x=1$ pour seul point singulier à distance finie, cette série sera transformée, par la substitution

$$x = 1 - e^{-t} = t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^4}{4!} + \cdots\cdots,$$

en une série toujours convergente, procédant suivant les puissances de l'argument $t = -\log(1-x)$ et représentant la fonction donnée pour toutes les valeurs de x.

La transformation $x = \frac{2t}{1+t^2}$.

6. Traçons dans le plan de la variable x les coupures $+1 \text{——} +\infty$ et $-1 \text{——} -\infty$ le long de l'axe réel, et effectuons la transformation

$$x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad t = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}. \tag{15}$$

L'aire simplement connexe T formée du plan entier, coupé comme nous venons de le dire, sera représentée d'une manière conforme sur le cercle $|t| \leq 1$, en sorte qu'aux points $x=1$, $x=0$, et $x=-1$ correspondent respectivement les points $t=1$, $t=0$, et $t=-1$. A l'axe imaginaire du plan x correspondra le segment $-i \text{——} +i$ de l'axe imaginaire des t. Aux cercles passant par $x=+1$ et $x=-1$ correspondent des cercles passant par $t=+1$ et $t=-1$, et par suite, les familles des cercles orthogonaux se correspondent également.

Si la fonction $f(x)$ définie par la série (3), dont nous supposons toujours le rayon de convergence égal à l'unité, n'a aucun point singulier dans l'intérieur de l'aire T, la transformation (15) nous donnera une série représentant

---

D'autre part on aura, pour une infinité de valeurs de μ et de ν,

$$|a_\mu t_1^\mu| > |t_1(1-\varepsilon)|^\mu \quad \text{et} \quad |b_\nu t_2^\nu| > |t_2(1-\varepsilon)|^\nu.$$

On en conclut facilement que le rapport des nombres de termes (y compris ceux dont les coefficients sont nuls) dont il faut tenir compte resp. dans les séries B et A pour atteindre un certain degré d'approximation, tendra en général vers ϱ, lorsque le degré d'approximation augmente. La série A est donc bien, en général, plus convergente que la série B, ce que nous voulions établir.

la fonction pour tout point compris dans cette aire. D'ailleurs, dans le cercle $|x|<1$, cette série est plus convergente que la série primitive (3). Ainsi, pour

$$x=\frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{2}, \qquad \frac{3}{4}, \qquad i,$$

on aura

$$t=0.127, \qquad 0.268, \qquad 0.451, \qquad 0.414\,i.$$

Il existe d'ailleurs un rapport intéressant entre les transformations (10) et (15). En effet, en faisant d'abord

$$x=1 \quad \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^n,$$

puis

$$t=\frac{2\tau}{1+\tau^2},$$

on trouve

$$x=1-\left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)^{2n}.$$

Ainsi p. ex., au lieu d'effectuer directement la transformation (12), on pourrait faire d'abord $x=\frac{2t}{1+t}$, puis appliquer deux fois de suite la transformation (15).

Quelques transformations plus compliquées.

7. On pourrait évidemment varier de différentes manières les transformations à employer. Connaissant les points singuliers de la fonction donnée, on pourrait p. ex. former des surfaces de Riemann plus ou moins compliquées à l'intérieur desquelles la fonction serait régulière; en effectuant la représentation conforme de ces surfaces sur l'aire d'un cercle, on serait conduit à des séries représentant la fonction pour tout point de la surface considérée et dont la convergence, en général, serait d'autant plus rapide, que le nombre des feuillets dont se compose la surface, serait plus grand. Nous traiterons dans ce numéro sous titre d'exemple quelques surfaces particulières.

Admettons que la fonction $f(x)$ n'a, dans le plan principal, d'autres points singuliers que $x=1$, et qu'elle est encore régulière lorsqu'on la prolonge autour de ce point, excepté pour $x=0$. En ajoutant à la surface à deux feuil-

lets, composée du plan principal et des deux demi-plans adjacents P_2 et P_2', deux autres demi-plans, P_3 et P_3', ayant connexion respectivement avec P_2 et avec P_2' le long de l'axe réel négatif, depuis 0 à $-\infty$, on aura une aire T simplement connexe à l'intérieur de laquelle la fonction $f(x)$ est régulière. Le contour de cette aire T se compose de l'axe réel plié sur lui-même à diverses reprises. Pour parcourir ce contour dans le sens direct, on suivra d'abord dans le demi-plan P_3' l'axe réel depuis $+\infty$ à 0, on contournera l'origine par une petite circonférence, on décrira dans P_2' le segment $0-1$ de l'axe réel, puis on fera deux fois le tour du point $x=1$ en passant successivement de P_2' en P_1', P_1 et P_2, dans ce dernier demi-plan on parcourra le segment $1-0$ de l'axe réel, ensuite on contournera encore une fois l'origine, puis on finira, dans le demi-plan P_3, en parcourant l'axe réel depuis 0 jusqu'à $+\infty$.

Nous allons d'abord représenter l'aire T sur la partie supérieure du plan figurant la variable t, en sorte qu'aux points

$$x=+\infty, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad +\infty,$$

rencontrés successivement en parcourant le contour de T, correspondent les points

$$t=-\infty, \quad -a, \quad 0, \quad +a, \quad +\infty,$$

a désignant une quantité positive que nous déterminerons tout à l'heure. Pour trouver x en fonction de t, considérons avec M. SCHWARZ l'expression $\frac{d}{dt}\log\frac{dx}{dt}$. Ce sera, comme on sait, une fonction rationnelle de t n'ayant d'autres points singuliers que a, $-a$ et 0. Or, d'après la représentation conforme, les points $t=\pm a$ doivent être, pour $\frac{dx}{dt}$, des zéros du premier ordre, et le point $t=0$ un zéro du troisième ordre. Par suite, on aura

$$\frac{d}{dt}\log\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t+a}+\frac{1}{t-a}+\frac{3}{t}.$$

Intégrant et déterminant les constantes en sorte que les valeurs $t=0$ et $x=1$, ainsi que les valeurs $t=a$ et $x=0$ se correspondent, on trouve pour la fonction cherchée l'expression

$$x=2\left(\frac{t}{a}\right)^6-3\left(\frac{t}{a}\right)^4+1.$$

Le point $x=0$ du plan principal correspond à la valeur $t=\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot i$. Faisons donc $a=\sqrt{2}$, puis effectuons la transformation linéaire

$$t = i \cdot \frac{1-\tau}{1+\tau}, \qquad \text{d'où} \qquad \tau = \frac{1+it}{1-it};$$

nous aurons

$$(16) \qquad x = 1 - \frac{3}{4}\left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)^4 - \frac{1}{4}\left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)^6,$$

$$= 9\tau - 42\tau^2 + 139\tau^3 - 372\tau^4 + 861\tau^5 - 1790\tau^6 + 3423\tau^7 - \cdots,$$

et par cette transformation la surface T se trouve représentée d'une manière conforme sur le cercle $|\tau| \leqq 1$, en sorte que les points $x=1$ et $x=0$ du plan principal, et le point $x=\infty$ correspondent respectivement aux points 1, 0 et -1 du plan de la variable τ.

Si, comme nous le supposions, la fonction $f(x)$ est régulière dans l'aire T, la transformation (16) fournit une série qui la représente pour tout point de cette aire et dont la convergence est très rapide. Ainsi, par exemple, pour

$$x = -4, \qquad -27, \qquad -242,$$

on aura

$$\tau = -0.172, \quad -\frac{1}{3}, \qquad -\frac{1}{2}.$$

On pourrait aller plus loin dans le même ordre d'idées, en ajoutant p. ex. à la surface T considérée ci-dessus deux nouveaux demi-plans, P_1 et P_1', ayant connexion respectivement avec P_3 et P_3' le long de la partie $1 \text{——} +\infty$ de l'axe réel. La nouvelle surface serait représentée sur le cercle $|\tau| \leqq 1$ par la substitution

$$x = 1 - 4t^4 - 4t^6 - t^8,$$

$$t = \sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{1-\tau}{1+\tau}.$$

Mais on voit que les transformations deviennent de plus en plus compliquées, tandis qu'on ne gagne presque rien en fait de convergence.

Application à l'intégrale elliptique de première espèce.

8. Considérons l'intégrale

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

en supposant le module k positif et inférieur à l'unité. C'est une fonction de x, régulière pour tout point en dehors des coupures tracées le long de l'axe réel depuis $+1$ à $+\infty$ et depuis -1 à $-\infty$. On peut donc appliquer à cette intégrale la transformation (15); on trouve ainsi

$$u = 2\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)^2 - 4k^2t^2}}, \tag{17}$$

et en développant le second membre suivant les puissances de t, puis substituant $t = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$, on aurait une série représentant l'intégrale donnée pour tout point à l'intérieur du plan limité par les coupures.

Mais on arrive à un résultat plus intéressant en réduisant, dans le second membre de la formule (17), la différentielle elliptique à la forme normale de LEGENDRE. Le polynôme sous le signe radical admet les zéros $\pm k \pm ik'$, tous situés sur le cercle $|t| = 1$ et groupés symétriquement par rapport aux axes des coordonnées. Faisons donc

$$\frac{i-t}{i+t} = \alpha\tau, \qquad \text{d'où} \qquad t = \frac{i(1-\alpha\tau)}{1+\alpha\tau};$$

nous trouverons

$$\frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)^2 - 4k^2t^2}} = -\frac{2\alpha i\, d\tau}{\sqrt{16\alpha^2\tau^2 + 4k^2(1-\alpha^2\tau^2)^2}},$$

et les zéros seront devenus

$$\pm\frac{i}{\alpha}\sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}}, \qquad \pm\frac{i}{\alpha}\sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}.$$

En posant

$$\alpha = i\sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}}, \qquad \frac{1-k'}{1+k'} = k_1,$$

on ramène donc la différentielle à la forme normale et l'on trouve, par un calcul facile,

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{2\,dt}{\sqrt{(1+t^2)^2 - 4k^2t^2}} = -(1+k_1)\frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k_1^2\tau^2)}}.$$

Comme les valeurs $\tau = 0$ et $x = \infty$ se correspondent, on en tire

$$\int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = (1+k_1)\int_0^\tau \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k_1^2\tau^2)}}.$$

Mais, en posant $z = \frac{1}{k\,x}$, il vient

$$\int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Nous aurons donc enfin la formule suivante:

$$(18) \qquad \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = (1+k_1)\int_0^\tau \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k_1^2\tau^2)}},$$

z et τ étant liés par la relation

$$z = \frac{2}{k}\cdot\frac{\sqrt{k_1}\cdot\tau}{1+k_1\tau^2} = \frac{\tau(1+k_1)}{1+k_1\tau^2}.$$

Comme $z=1$ pour $\tau=1$, il s'ensuit en particulier

$$(19) \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = (1+k_1)\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_1^2x^2)}}.$$

C'est là la transformation de Landen de l'intégrale complète, et la formule précédente (18) est équivalente à la transformation générale de Landen [1]).

Quelques applications aux équations différentielles linéaires.

9. Lorsque la fonction donnée satisfait à une équation différentielle linéaire, tous ses points singuliers sont connus et, par suite, les considérations précédentes sont directement applicables. La formation des séries transformées se simplifie même beaucoup dans ce cas, puisqu'on pourra effectuer la substitution de la nouvelle variable (t) dans l'équation différentielle elle-même. Si, en particulier, cette équation est à coefficients rationnels, elle se transformera, par l'une quelconque des substitutions considérées aux numéros 2, 4, 6 et 7, en une équation dont les coefficients sont également rationnels, et la série cherchée se développera facilement par la méthode des coefficients indéterminés.

[1]) Voir p. ex. Schellbach, *Die Lehre von den Elliptischen Integralen und den Theta-Functionen* (Berlin 1864), page 81.

Comme premier exemple nous choisissons l'intégrale

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Considérée comme fonction de $k^2 = x$, cette intégrale vérifie l'équation de LEGENDRE

$$4x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + 4(2x-1)\frac{dy}{dx} + y = 0; \tag{20}$$

ses points singuliers à distance finie sont donc $x=0$ et $x=1$ (excepté le point $x=0$ du plan principal) et, par suite, nous pouvons appliquer l'une quelconque des transformations rationnelles considérées plus haut, et en particulier les transformations (11) et (12). Par la première, l'équation (20) devient

$$t(1-t)(1+t)^2\frac{d^2y}{dt^2} - (1+t)(t^2+2t-1)\frac{dy}{dt} - (1-t)y = 0, \tag{21}$$

et en développant l'intégrale holomorphe qui, pour $t=0$, se réduit à $\frac{\pi}{2}$, on aurait pour K une série procédant suivant les puissances de l'argument

$$t = \frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{1-k'}{1+k'}.$$

L'équation (21) se ramène d'ailleurs facilement à la forme (20). Faisons, en effet, d'abord $y=(1+t)u$; nous aurons

$$t(1-t^2)\frac{d^2u}{dt^2} + (1-3t^2)\frac{du}{dt} - tu = 0.$$

Puis substituons $t^2=\tau$; nous retrouvons l'équation de LEGENDRE

$$4\tau(\tau-1)\frac{d^2u}{d\tau^2} + 4(2\tau-1)\frac{du}{d\tau} + u = 0.$$

Il s'ensuit

$$u = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k_1^2z^2)}},$$

où

$$k_1 = \sqrt{\tau} = t = \frac{1-k'}{1+k'}.$$

et par suite, la relation $y=(1+t)u$ peut s'écrire

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = (1+k_1)\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k_1^2z^2)}}\,.$$

C'est encore la transformation de LANDEN.

Appliquons maintenant à l'équation (20) la transformation (12); nous trouvons

$$t(1+t)(1-t^4)\frac{d^2y}{dt^2} + (1-3t-5t^4-t^5)\frac{dy}{dt} - 2(1-t)^3 y = 0\,.$$

En faisant ici $y=(1+t)^2 v$, on aura l'équation

$$t(1-t^4)\frac{d^2v}{dt^2} + (1-5t^4)\frac{dv}{dt} - 4t^3 v = 0\,,$$

laquelle se ramène, par la substitution $t^4=\tau$, à l'équation de LEGENDRE:

$$4\tau(\tau-1)\frac{d^2v}{d\tau^2} + 4(2\tau-1)\frac{dv}{d\tau} + v = 0\,.$$

On a d'ailleurs

$$t = \frac{1-\sqrt[4]{1-x}}{1+\sqrt[4]{1-x}} = \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} = l\,; \quad \tau = l^4\,,$$

en adoptant la notation de WEIERSTRASS, et la relation entre y et v peut donc s'écrire sous la forme:

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = (1+l)^2\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-l^4z^2)}}\,. \tag{22}$$

On constate facilement qu'on obtient cette transformation en effectuant deux fois de suite la transformation de LANDEN. En développant le second membre, on trouve

$$K = \frac{\pi}{2}(1+l)^2\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 l^4 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 l^8 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 l^{12} + \cdots\right);$$

c'est la série la plus convergente qu'on ait trouvée, par l'intermédiaire des fonctions Θ de JACOBI, pour représenter l'intégrale K.

On peut d'ailleurs appliquer la transformation (22) plusieurs fois de suite. En posant successivement

$$l = \frac{1-\sqrt[4]{1-k^2}}{1+\sqrt[4]{1-k^2}}\,, \quad l_1 = \frac{1-\sqrt[4]{1-l^4}}{1+\sqrt[4]{1-l^4}}\,, \quad l_2 = \frac{1-\sqrt[4]{1-l_1^4}}{1+\sqrt[4]{1-l_1^4}}\,, \ldots\ldots$$

on trouve à la limite pour K l'expression suivante extrêmement convergente:

$$K = \frac{\pi}{2}\left[(1+l)(1+l_1)(1+l_2)\cdots\cdots\right]^2.$$

Considérons en second lieu l'équation différentielle

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0, \tag{23}$$

dont l'équation de LEGENDRE est un cas particulier $(\alpha=\beta=\frac{1}{2}, \gamma=1)$, et qui admet comme intégrale la série hypergéométrique de GAUSS

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots\cdots$$

En appliquant successivement à cette équation les transformations (6), (8), (11) et (12), nous allons trouver tout un nombre de formules intéressantes.

Faisons d'abord $x=\frac{t}{1+t}$; il vient

$$t(1+t)^2\frac{d^2y}{dt^2} + (1+t)[\gamma - (\alpha+\beta-\gamma-1)t]\frac{dy}{dt} - \alpha\beta y = 0,$$

équation qui se ramène par la substitution $y=(1+t)^\alpha z$, $t=-\tau$, à la forme

$$\tau(1-\tau)\frac{d^2z}{d\tau^2} + [\gamma - (\alpha-\beta+\gamma+1)\tau]\frac{dz}{d\tau} - \alpha(\gamma-\beta)z = 0.$$

On en tire la formule bien connue:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = (1-x)^{-\alpha}F\left(\alpha,\gamma-\beta,\gamma,\frac{x}{x-1}\right). \tag{a}$$

Faisons en second lieu $x=\frac{2t}{1+t}$; l'équation (23) devient

$$t(1-t)(1+t)^2\frac{d^2y}{dt^2} + (1+t)[\gamma + (\gamma-2\alpha-2\beta)t - 2t^2]\frac{dy}{dt} - 2\alpha\beta y = 0, \tag{24}$$

et en posant $y=(1+t)^\alpha z$, $t^2=\tau$, $\gamma=2\beta$,

$$\tau(1-\tau)\frac{d^2z}{d\tau^2} + [\beta + \frac{1}{2} - (\alpha+\frac{3}{2})\tau]\frac{dz}{d\tau} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{4}z = 0,$$

d'où suit la relation:

$$(b) \qquad F(\alpha, \beta, 2\beta, x) = \left(\frac{2}{2-x}\right)^{\alpha} F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}, \frac{2\beta+1}{2}, \left[\frac{x}{2-x}\right]^2\right).$$

Appliquons maintenant à notre équation la substitution $x = \frac{4t}{(1+t)^2}$. L'équation transformée:

$$(25) \quad t(1-t)(1+t)^2 \frac{d^2y}{dt^2} + (1+t)[\gamma + 2(\gamma - 2\alpha - 2\beta)t + (\gamma - 2)t^2] \frac{dy}{dt} - 4\alpha\beta(1-t)y = 0,$$

peut se réduire de deux manières différentes à la forme (23), soit en faisant $y = (1+t)^{2\alpha} z$, $\beta = \alpha + \frac{1}{2}$, ce qui nous donne

$$t(1-t)\frac{d^2z}{dt^2} + [\gamma - (4\alpha - \gamma + 2)t]\frac{dz}{dt} - 2\alpha(2\alpha - \gamma + 1)z = 0,$$

et par suite la relation

$$(c) \qquad F(\alpha, \alpha + \tfrac{1}{2}, \gamma, x) = \left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right)^{2\alpha} F\left(2\alpha, 2\alpha - \gamma + 1, \gamma, \frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right);$$

soit en substituant $y = (1+t)^{2\alpha} z$, $t^2 = \tau$, $\gamma = 2\beta$, d'où il suit

$$\tau(1-\tau)\frac{d^2z}{d\tau^2} + [\beta + \tfrac{1}{2} - (2\alpha - \beta + \tfrac{3}{2})\tau]\frac{dz}{d\tau} - \alpha(\alpha - \beta + \tfrac{1}{2})z = 0,$$

et partant la relation

$$(d) \qquad F(\alpha, \beta, 2\beta, x) = \left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right)^{2\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \beta + \tfrac{1}{2}, \beta + \tfrac{1}{2}, \left[\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right]^2\right).$$

Cette dernière formule renferme comme cas particulier $\left(\alpha = \beta = \frac{1}{2}\right)$ la transformation de Landen (19). Lorsque $\beta + \frac{1}{2} = 2(\alpha - \beta + \frac{1}{2})$, d'où $\beta = \frac{4\alpha+1}{6}$, on peut l'appliquer deux fois de suite et on obtient ainsi, après une transformation facile, la formule suivante, où ne figure plus qu'un paramètre arbitraire:

$$(e) \quad F\left(\alpha, \frac{4\alpha+1}{6}, \frac{4\alpha+1}{3}, x\right) = \left(\frac{2}{1+\sqrt[4]{1-x}}\right)^{4\alpha} F\left(\alpha, \frac{4\alpha+1}{6}, \frac{2\alpha+5}{6}, \left(\frac{1-\sqrt[4]{1-x}}{1+\sqrt[4]{1-x}}\right)^4\right).$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, en particulier, on retombe sur la formule (22).

Par la substitution $x = 1 - \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^4$, enfin, l'équation (23) devient

$$(26)\quad t(1+t)(1-t^4)\frac{d^2y}{dt^2} + (1+t)[\gamma(1+t)^4 - t(1+t^2)(2t+8\alpha+8\beta)]\frac{dy}{dt} - 8\alpha\beta(1-t)^3 y = 0.$$

En cherchant à ramener cette équation à la forme (23), par des substitutions analogues à celles dont nous avons fait usage plus haut, on trouve que cela n'est possible qu'en faisant

$$y = (1+t)^{4\alpha} z, \quad t^4 = \tau, \quad \beta = \frac{4\alpha+1}{6}, \quad \gamma = \frac{4\alpha+1}{3},$$

substitution qui conduit précisément à la formule (*e*).

Les formules (*b*), (*c*), (*d*) et (*e*) ne sont applicables que lorsque les paramètres α, β, γ sont liés par certaines relations. Mais il est évident que, quelles que soient les valeurs de ces paramètres, les équations (24), (25) et (26) fournissent des séries représentant avec une convergence croissante la série hypergéométrique.

Les formules (*a*), (*c*) et (*d*) ont été établies par GAUSS, qui se sert de la substitution (11), sans indiquer par quelles considérations il y a été conduit [1]). Les formules (*b*) et (*e*) se trouvent annoncées dans le grand mémoire de KUMMER sur la série hypergéométrique [2]). Nous ferons remarquer que toutes les transformations de la série hypergéométrique trouvées par KUMMER dans le cas où deux des paramètres α, β, γ restent arbitraires (l. c. § 19), se déduisent facilement en combinant les formules (*b*), (*c*) et (*d*) avec la formule (*a*). Ainsi, en substituant dans la formule (*c*) $\frac{x}{x-1}$ à la place de x, réduisant le premier membre à l'aide de l'équation (*a*) et posant $\gamma - \alpha - \frac{1}{2} = \beta$, nous aurons la formule 45 de KUMMER:

$$(f)\quad F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, x) = \left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right)^{2\alpha} F(2\alpha, \alpha-\beta+\tfrac{1}{2}, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, t),$$

---

[1]) *Disquisitiones generales circa seriem infinitam....*, seconde partie (ouvrage posthume). Oeuvres complètes, tome III, pp. 224—225. Après avoir établi les transformations de la série hypergéométrique valables pour des valeurs quelconques des paramètres α, β, γ, GAUSS aborde la dernière partie de son mémoire, intitulée *Quaedam theoremata specialia*, dans les termes suivants: „Relationes omnes quas hactenus eruimus eatenus sunt generalissimae, quod elementa α, β, γ nullis circumscribuntur conditionibus. Praeterea autem plures alias invenimus, quae conditiones speciales inter elementa α, β, γ supponunt: multo vero plures sine dubio adhuc latent, easque ipsas quas hic trademus fortasse ex altioribus principiis derivare in posterum licebit".

[2]) *Journal de Crelle*, Tome 15, page 78 formule 52 et page 129 formule 13.

où

$$t = \frac{1 - \sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x}}.$$

En appliquant encore une fois l'équation (α), nous trouvons

$$F(2\alpha, \alpha-\beta+\tfrac{1}{2}, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, t) = (1-t)^{-2\alpha} F\left(2\alpha, 2\beta, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, \frac{t}{t-1}\right)$$
$$= \left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right)^{-2\alpha} F\left(2\alpha, 2\beta, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{1-x}}{2}\right),$$

en sorte que la formule (f) peut se mettre sous la forme suivante (KUMMER, formule 49):

$$(g) \qquad F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, x) = F\left(2\alpha, 2\beta, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{1-x}}{2}\right).$$

Cette formule très intéressante se trouve d'ailleurs dans le mémoire de GAUSS cité ci-dessus [1]). La valeur $x=1$ correspond à la valeur $\frac{1}{2}$ de l'argument

$$t = \frac{1 - \sqrt{1-x}}{2}.$$

La série du second membre, étant convergente dès que $|t|<1$, représente par suite la fonction considérée dans un domaine comprenant le point singulier $x=1$, [2])

---

[1]) Page 227 formule [103]. Les réflexions de GAUSS au sujet de cette formule (page 226) sont du plus haut intérêt; elles semblent prouver, en effet, qu'à cette époque (en 1811) la notion d'une série entière comme élément d'une fonction analytique ou, en d'autres termes, la notion du *prolongement analytique* lui était déjà familière.

[2]) Cette remarque peut être généralisée comme il suit:

Soit $f(x)$ une fonction holomorphe au voisinage de l'origine et n'ayant à distance finie d'autres points singuliers que $x=0$ et $x=1$. Si cette fonction est développable, dans le voisinage du point $x=1$, suivant les puissances entières et positives de $\sqrt[n]{1-x}$, n désignant l'un des nombres 2, 3, 4 ou 5, on aura, en faisant $x = 1-(1-t)^n$ et développant suivant les puissances de t, une série entière en $t = 1 - \sqrt[n]{1-x}$, représentant la fonction donnée dans un domaine comprenant les points 0 et 1.

Lorsque $n>5$, la substitution précédente n'est plus applicable, parce que le point du plan t correspondant à $x=1$ n'est plus compris dans le cercle de convergence de la série transformée. On pourra dans ces cas, et d'ailleurs dès que $n>2$, se servir de la substitution un peu moins simple

$$x = 1 - \left(\frac{1-t}{1-t\cos\frac{2\pi}{n}}\right)^n, \quad \text{d'où} \quad t = \frac{1-\sqrt[n]{1-x}}{1-\cos\frac{2\pi}{n}\cdot\sqrt[n]{1-x}}.$$

Dans les conditions indiquées, la série transformée en t, résultant de cette substitution, sera convergente dans un cercle de rayon $\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}$, cercle comprenant le point $t=1$ qui correspond au point singulier $x=1$.

Lorsque $n=4$, les deux substitutions se confondent.

ce qui s'explique par le fait facile à constater que la fonction est dans le cas actuel, où $\gamma-\alpha-\beta=\frac{1}{2}$, développable suivant les puissances entières et positives de $\sqrt{1-x}=2\left(\frac{1}{2}-t\right)$. La valeur $t=1$ correspond au point $x=0$ du demi-plan P_2 ou P_2', comme on le voit immédiatement en se reportant à la correspondance géométrique entre les plans des variables x et t. Dans le cas où $\alpha+\beta<\frac{1}{2}$, le second membre de la formule précédente fournit donc, pour $t=1$, la valeur de la fonction $F\left(\alpha, \beta, \alpha+\beta+\frac{1}{2}, x\right)$ au point $x=0$ du demi-plan P_2 ou P_2'.

Nous avons un peu insisté sur l'exemple précédent parce qu'il met bien en évidence le parti qu'on peut tirer de nos considérations générales et, en particulier, des substitutions simples que nous avons plus spécialement étudiées. Ces mêmes substitutions s'appliquent à toute équation différentielle linéaire dont les points singuliers sont convenablement disposés, et on pourra en profiter, soit pour effectuer l'extension analytique des intégrales en dehors du cercle de convergence de leurs développements de Taylor, soit pour augmenter la convergence de ces développements, soit enfin pour calculer les coefficients des relations linéaires entre les intégrales des systèmes fondamentaux relatifs aux divers points singuliers, ou les coefficients des substitutions linéaires que subissent les intégrales d'un même système fondamental par le passage autour d'un point singulier.

Sur quelques recherches antérieures.

10. Les recherches dont nous voulons parler, reposent sur certaines représentations conformes remarquables, que nous allons d'abord rappeler.

Soit donnée, dans le plan de la variable x, une bande de largeur $2h$ comprise entre deux droites parallèles à l'axe réel et symétriques par rapport à cet axe. Par la transformation

$$x=\frac{2h}{\pi}\log\frac{1+t}{1-t},$$

$$t=\frac{e^{\frac{\pi x}{4h}}-e^{-\frac{\pi x}{4h}}}{e^{\frac{\pi x}{4h}}+e^{-\frac{\pi x}{4h}}}, \tag{27}$$

cette bande se trouve représentée d'une manière conforme sur le cercle $|t|\leq 1$,

en sorte qu'aux points $x=\infty$, $x=0$ et $x=-\infty$ correspondent respectivement les points $t=1$, $t=0$ et $t=-1$.

Plus généralement, la bande comprise entre deux parallèles à l'axe réel passant respectivement par les points ai et bi $(a>b)$ de l'axe imaginaire, sera représentée, par la substitution

$$x=\frac{a+b}{2}\cdot i+\frac{a-b}{\pi}\log\frac{1+t}{1-t},$$

d'une manière conforme sur le cercle $|t|\leq 1$, en sorte qu'au point $x=\frac{a+b}{2}\cdot i$ de la bande correspond le centre du cercle.

Considérons maintenant un anneau circulaire C limité par deux cercles de rayons ϱ et ϱ' $(\varrho>\varrho')$ ayant leur centre commun à l'origine. En faisant d'abord

$$x=e^{-i\tau}, \quad \text{d'où} \quad \tau=i\log x,$$

l'anneau C, parcouru une infinité de fois dans les deux sens, sera représenté sur la bande limitée par deux parallèles à l'axe réel passant respectivement par les points $\tau=i\log\varrho$ et $\tau=i\log\varrho'$. Posons donc

$$x_0=\sqrt{\varrho\varrho'}, \quad 2h=\log\frac{\varrho}{\varrho'},$$

$$\tau=i\log x_0+\frac{2h}{\pi}\log\frac{1+t}{1-t}.$$

Nous aurons

$$x=x_0\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{\frac{2h}{\pi i}},$$

(28)

$$t=\frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}}-1}{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}}+1},$$

transformation qui réalise la représentation conforme de l'anneau C sur le cercle $|t|\leq 1$, en sorte qu'au centre $t=0$ du cercle correspond le point $x_0=\sqrt{\varrho\varrho'}$ de l'anneau.

La substitution (27) peut évidemment servir à l'étude des fonctions analytiques pour les valeurs réelles de l'argument, dans les cas où l'on peut limiter autour de l'axe réel une bande à l'intérieur de laquelle la fonction est régu-

lière [1]). Elle s'applique donc en particulier aux problèmes de dynamique, en supposant que les trajectoires jouissent d'une certaine stabilité. Considérons p. ex. le problème des n corps et admettons que la distance entre deux corps quelconques reste constamment supérieure à une certaine limite (tant pour les valeurs positives que pour les valeurs négatives du temps x). Dans ce cas, les coordonnées, ou bien les éléments elliptiques, des n corps sont développables suivant les puissances de $x-x_0$, quelle que soit l'époque x_0, et on voit facilement que, x_0 variant de $-\infty$ à $+\infty$, le rayon de convergence de ces développements aura une limite inférieure h différente de zéro, en sorte que les coordonnées seront des fonctions analytiques de x régulières à l'intérieur de la bande définie au début de ce numéro. Donc, en formant d'abord les séries de Taylor définissant les coordonnées dans le voisinage de $x=0$, puis effectuant la substitution

$$x = \frac{2h}{\pi} \log \frac{1+t}{1-t} = \frac{4h}{\pi}\left(t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \cdots\cdots\right),$$

développant ensuite suivant les puissances de t, et écrivant enfin, à la place de t, l'expression

$$\frac{e^{\frac{\pi x}{4h}} - e^{-\frac{\pi x}{4h}}}{e^{\frac{\pi x}{4h}} + e^{-\frac{\pi x}{4h}}}, \tag{29}$$

nous aurons des séries représentant les coordonnées des n corps pour toute valeur du temps x.

La formation de ces séries est donc relativement facile; mais malheureusement il n'y aurait pas grand parti à en tirer pour le calcul effectif des orbites, même si l'on pouvait savoir à l'avance s'il y a stabilité dans le sens indiqué et quelle valeur il conviendrait, dans ce cas, d'adopter pour la quantité h, ce qui, en général, n'est pas possible. L'argument (29), en effet, tend rapidement vers l'unité lorsque x augmente, et d'ailleurs on peut prévoir, à cause de la périodicité plus ou moins approchée dont jouit, dans les cas qui se présentent réellement, le mouvement de chaque corps particulier, que les coefficients successifs des séries dont il s'agit doivent présenter des périodes alternatives de croissance et de décroissance, en sorte que, pour les époques un peu éloignées, il faudrait tenir compte d'un grand nombre de termes.

[1]) Cf. POINCARÉ, *Sur l'intégration des équations différentielles par les séries* (Comptes rendus, 27 février 1882); *Sur les courbes définies par les équations différentielles*, Chapitre XVII (Journal de Liouville, Année 1886, page 168). PICARD, *Traité d'Analyse*, Tome III, pages 243—248.

Comme seconde application des transformations qui précèdent, considérons une équation différentielle linéaire et homogène ayant les points singuliers 0, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et ∞. Soient $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ les distances des points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ à l'origine et admettons, pour fixer les idées, que $\varrho_1 < \varrho_2 < \cdots < \varrho_n$. Nous divisons le plan figurant la variable indépendante x en $n+1$ régions distinctes, en traçant, de l'origine comme centre, n circonférences $C_1, C_2, \ldots, C_n$, passant respectivement par les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et nous nous proposons de donner, pour chacune de ces régions, une représentation analytique des intégrales de notre équation.

Prenons d'abord l'un des anneaux circulaires, p. ex. celui qui est limité par les circonférences C_1 et C_2. D'après ce que nous avons dit plus haut, la substitution

$$x = x_0 \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{\frac{2h}{\pi i}}, \quad \left(x_0 = \sqrt{\varrho_1 \varrho_2}, \ 2h = \log \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right),$$

donne la représentation conforme de cet anneau sur le cercle $|t|<1$, avec la correspondance $x=x_0$ pour $t=0$. Dès lors, pour avoir une expression analytique représentant l'intégrale générale de l'équation considérée pour tout point à l'intérieur de l'anneau, on formera d'abord la série de Taylor définissant cette intégrale dans le voisinage du point $x=x_0$, on substituera dans cette série

$$x - x_0 = x_0 \left[\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{\frac{2h}{\pi i}} - 1\right],$$

et on développera ensuite suivant les puissances de t. L'expression cherchée s'obtiendra en faisant dans la série résultante

$$t = \frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} - 1}{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} + 1}.$$

Ce problème a été résolu par M. Mittag-Leffler [1]).

Considérons maintenant la région du plan x qui est intérieure à la circonférence C_1. En posant $x=e^{\tau}$, [2]) on fait correspondre à cette région le

[1]) *Sur la représentation analytique des intégrales et des invariants d'une équation différentielle linéaire et homogène*, Acta mathematica, Tome 15.

[2]) M. Hamburger s'est servi de cette transformation dans son mémoire: *Über ein Princip zur Darstellung des Verhaltens mehrdeutiger Functionen einer complexen Variabeln, insbesondere der Integrale linearer Differentialgleichungen in der Umgebung singulärer Punkte.* Journal de Crelle, Tome 83. Voir aussi § 3 du mémoire de M. Mittag-Leffler cité ci-dessus.

demi-plan à gauche de la parallèle à l'axe imaginaire passant par le point $\tau = \log \varrho_1$. Soit maintenant x_0 l'affixe d'un point de l'axe réel positif compris dans le cercle C_1, et posons successivement

$$\tau_1 = \frac{\tau - \log x_0}{\log \frac{\varrho_1}{x_0}}, \qquad t = \frac{\tau_1}{\tau_1 - 2}.$$

Nous aurons

$$t = \frac{\log \frac{x}{x_0}}{\log \frac{x x_0}{\varrho_1^2}}. \tag{30}$$

et par cette transformation la région considérée du plan des x se trouve représentée d'une manière conforme sur le cercle $|t| \leq 1$, en sorte que les points $x = x_0$ et $t = 0$ se correspondent. Par suite, les intégrales de l'équation donnée peuvent être représentées, à l'intérieur de la circonférence C_1, par des séries procédant suivant les puissances entières et positives de l'argument (30).

Si en particulier $\varrho_1 < 1$, on peut choisir $x_0 = \varrho_1^2$ et, par suite, présenter les intégrales, dans la région considérée, sous forme de séries entières ayant pour argument

$$-\frac{1}{2 \log \varrho_1} \frac{\log \frac{x}{x_0}}{\log \frac{x x_0}{\varrho_1^2}} = \frac{1}{\log x} - \frac{1}{2 \log \varrho_1}.$$

C'est le résultat obtenu par M. PICARD [1]).

Par un raisonnement tout analogue on conclut que, dans la région du plan x qui est extérieure au cercle C_n, les intégrales de l'équation dont il s'agit, peuvent s'exprimer par des séries entières procédant suivant les puissances de la quantité

$$\frac{\log \frac{x}{x_0}}{\log \frac{x x_0}{\varrho_n^2}},$$

x_0 désignant un point quelconque de l'axe réel positif, extérieur à la circonférence C_n.

[1]) Traité d'Analyse, Tome III, page 285.

Remarquons enfin que, dans le cas particulier où l'équation linéaire n'a d'autres points singuliers que 0 et ∞, ses intégrales peuvent se mettre sous forme de séries entières toujours convergentes en $\log\frac{x}{x_0}$, x_0 désignant une valeur quelconque différente de zéro.

Applications numériques.

11. Nous ferons voir dans ce numéro, sur un exemple particulier, l'utilité réelle qu'on peut tirer, pour les calculs numériques, des transformations considérées dans cette étude. Soit donnée la fonction $f(x)$ définie dans le voisinage de l'origine par la série entière

$$f(x) = \sum \frac{x^n}{n^2} = 1 + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \frac{x^5}{25} + \cdots\cdots \tag{31}$$

Cette fonction satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}\log(1-x), \tag{32}$$

d'où l'on conclut immédiatement que ses points singuliers sont $x=0$, $x=1$ et $x=\infty$ (excepté le point $x=0$ du plan principal). Nous pouvons donc lui appliquer successivement les transformations (6), (8), (11), (12) et (16), et nous trouvons ainsi les cinq séries suivantes, où nous nous sommes borné aux onze premiers termes:

$$(a)\qquad f(x) = 1 + t - \frac{3}{4}t^2 + \frac{11}{18}t^3 - \frac{25}{48}t^4 + \frac{137}{300}t^5 - \frac{49}{120}t^6 + \frac{363}{980}t^7 - \frac{761}{2240}t^8 + \frac{7129}{22680}t^9 - \frac{7381}{25200}t^{10} + \cdots\cdots \qquad \left(t = \frac{x}{1-x}\right).$$

$$(b)\qquad f(x) = 1 + 2t - t^2 + \frac{8}{9}t^3 - \frac{2}{3}t^4 + \frac{46}{75}t^5 - \frac{23}{45}t^6 + \frac{352}{735}t^7 - \frac{44}{105}t^8 + \frac{1126}{2835}t^9 - \frac{563}{1575}t^{10} + \cdots\cdots \qquad \left(t = \frac{x}{2-x}\right).$$

$$(c) \qquad f(x) = 1 + 4t - 4t^2 + \frac{28}{9}t^3 - \frac{8}{3}t^4 + \frac{172}{75}t^5 - \frac{92}{45}t^6 + \frac{1348}{735}t^7 - \frac{176}{105}t^8 + \frac{4364}{2835}t^9 - \frac{2252}{1575}t^{10} + \cdots\cdots$$

$$\left(t = \frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right).$$

$$(d) \qquad f(x) = 1 + 8t - 16t^2 + \frac{152}{9}t^3 - \frac{32}{3}t^4 + \frac{168}{25}t^5 - \frac{368}{45}t^6 + \frac{6728}{735}t^7 - \frac{704}{105}t^8 + \frac{13528}{2835}t^9 - \frac{9008}{1575}t^{10} + \cdots\cdots$$

$$\left(t = \frac{1-\sqrt[4]{1-x}}{1+\sqrt[4]{1-x}}\right).$$

$$(e) \qquad f(x) = 1 + 9t - \frac{87}{4}t^2 + 31t^3 - \frac{471}{16}t^4 + \frac{1023}{50}t^5 - \frac{263}{20}t^6 + \frac{6033}{490}t^7 - \frac{4819}{320}t^8 + \frac{19931}{1260}t^9 - \frac{18113}{1400}t^{10} + \cdots\cdots$$

$$\left[x = 1 - \frac{3}{4}\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^4 - \frac{1}{4}\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^6\right].$$

Il est assez facile de calculer les quatre premières séries en se servant uniquement de la série proposée (31); le calcul de la dernière série (e) par cette voie est, au contraire, un peu pénible, à cause des grands nombres qui y apparaissent mais qui se détruisent par soustraction. On pourrait d'ailleurs, d'après ce que nous avons fait remarquer plus haut (page 19), déduire la série (c) de la série (b), ainsi que (d) de (c), par l'application de la transformation (15). Mais la manière la plus simple de former toutes ces séries est évidemment de recourir à l'équation différentielle (32). Par la substitution (12), par exemple, celle-ci devient

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{4(1-t)^4}{t(1-t^4)}\log\left(\frac{1-t}{1+t}\right);$$

en développant le second membre et intégrant, on obtient directement la série (d).

Nous allons d'abord, à l'aide des quatre premières séries, calculer la valeur de la fonction $f(x)$ au point $x=-1$. Les valeurs des termes, à partir du second, seront:

série (*a*) $t=-\frac{1}{2}$	série (*b*) $t=-\frac{1}{3}$	série (*c*) $t=-0.171572875$	série (*d*) $t=-0.08642723144$
− 0.5000	− 0.666667	− 0.68629150	− 0.6914178698
1875	111111	11774901	1195146677
764	32922	1571308	109031733
326	8230	231081	5951565
143	2524	34096	324058
64	701	5215	34083
29	219	803	3297
13	64	126	209
6	20	20	13
3	6	3	1
− 0.8223	− 0.822464	− 0.82246703	− 0.8224670334.

On en tire, pour $f(-1)$, les valeurs suivantes:

0.1777 0.177536 0.17753297 0.1775329666.

Pour atteindre, à l'aide de la série donnée (31), le degré d'approximation que comporte la première de ces valeurs, il faudrait tenir compte de plus de cinquante termes.

Calculons maintenant, à l'aide des séries (*c*) et (*d*), la valeur de $f(x)$ au point $x=-8$ (du plan principal). Les termes seront, à partir du second,

série (*c*) $t=-\frac{1}{2}$	série (*d*) $t=-0.2679492$
− 2.0000	− 2.143594
1.0000	1.148748
3889	324907
1667	54984
717	9282
319	3027
143	908
65	178
30	34
14	11
− 3.6844	− 3.685673

Il s'ensuit pour $f(-8)$ les valeurs

$$-2.6844 \qquad \text{et} \qquad -2.685673\,.$$

Comme valeur définitive nous pouvons adopter la suivante, dont les chiffres sont tous exacts:

$$f(-8) = -2.68568\,.$$

Nous calculerons encore la valeur de $f(x)$ au point $x = -27$ (du plan principal), en nous servant successivement des séries (d) et (e). Comme ci-dessus, nous écrirons les termes à partir du second:

série (d) $t = -0.393999$	série (e) $t = -\frac{1}{3}$
-3.15200	-3.00000
2.48377	2.41667
1.03297	1.14815
25705	36343
6380	8420
3059	1804
1349	563
389	230
109	80
52	22
-7.03917	$-7.03944\,.$

On voit que la seconde série est un peu plus convergente que la première, comme on pouvait s'y attendre, puisqu'elle représente la fonction dans un domaine plus étendu. En ajoutant le reste à coup d'oeuil, on tire des sommes précédentes, pour $f(-27)$, la valeur

$$f(-27) = -6.0395\,,$$

dont les chiffres sont tous exacts.

Il y a une remarque qui s'impose. Pour calculer, avec une erreur inférieure à 0.0001, la valeur au point $x = -27$ de la fonction $f(x)$ définie par la série (31), nous avons eu à tenir compte seulement des onze premiers termes de la série (e), et pour former ces termes il n'est nécessaire de connaître que les onze premiers termes de la série (31). Et pourtant il suffit de changer

dans cette série le coefficient de x^{11} d'une millionième, pour que la valeur de la fonction $f(x)$ au point $x=-27$ éprouve un changement de plus de cinq mille millions. De même, si l'on ne connait que les quatre premiers termes de la série (31), on pourra en déduire les quatre premiers termes de la série (d), et ceux-ci donnent pour $f(-1)$ une valeur aussi approchée que les vingt-huit premiers termes de la série (31). On voit par là à quel degré intervient dans notre méthode la loi arithmétique des coefficients, ou combien cette méthode est capable de l'extraire, pour ainsi dire, d'un petit nombre de termes. Mais cette remarque fait voir en même temps, qu'on ne peut s'attendre à une convergence comparable à celle de l'exemple précédent, que si les coefficients de la série proposée suivent une loi uniforme qui se révèle dès les premiers termes de cette série.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ.
TOM. XXIV. № 8.

RECHERCHES

SUR

LES POLYÈDRES MAXIMA

PAR

L. LINDELÖF.

(PRÉSENTÉ LE 18 AVRIL 1898.)

I. Considérations générales.

1. Dans un mémoire publié en 1869 sous le titre: *Propriétés générales des polyèdres qui sous une étendue superficielle donnée renferment le plus grand volume* [1]), j'ai étudié les conditions que doit remplir un polyèdre convexe, étant donné le nombre et l'étendue totale de ses faces, pour que son volume soit un maximum. J'y ai démontré d'abord que *si les faces sont assujetties à rester parallèles à elles-mêmes, le polyèdre maximum est nécessairement circonscrit à une sphère* [2]).

---

[1]) Inséré dans le *Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de S:t Pétersbourg*, Tom. IV, et couronné en 1880 du prix Steiner par l'Académie Royale des Sciences de Berlin.

[2]) Une autre démonstration de ce théorème, fondée sur des considérations entièrement différentes, vient d'être donnée par M. Hermann Minkowski dans un travail remarquable: *Allgemeine Lehrsätze über die convexen Polyeder* (Nachrichten von der Kön. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen aus dem Jahre 1897).

Il y a un point dans notre démonstration du théorème dont il s'agit, qui aurait peut-être besoin d'une petite explication. Je profite de l'occasion pour la donner ici.

Soient a_1, a_2, a_3 trois arêtes consécutives d'une face A, α_1, α_2, α_3 les angles dièdres correspondants et ϱ_2 le rayon de la sphère inscrite à la fois dans ces trois angles. Cette sphère est unique et par suite, comme nous l'avons dit, parfaitement déterminée, son centre se trouvant au point où l'intersection des plans bissecteurs des angles α_1 et α_3 rencontre le plan bissecteur de l'angle α_2. Mais ce qu'il importe d'observer, c'est que ce point n'est pas nécessairement situé à l'intérieur (par rapport au polyèdre) des quatre faces dont il s'agit; il peut tout aussi bien tomber à l'extérieur de ces faces ou même s'éloigner à l'infini. Par un raisonnement qui, à vrai dire, ne s'applique immédiatement qu'au premier cas, nous avons établi que si l'arête a_2 de la face A vient à se déplacer parallèlement à elle-même d'une quantité infiniment petite dh_2 (positive vers l'extérieur et négative vers l'intérieur de A), les variations correspondantes de a_1, a_2, a_3 seront liées à dh_2 par la formule

$$\cot\frac{\alpha_1}{2}\,da_1+\cot\frac{\alpha_2}{2}\,da_2+\cot\frac{\alpha_3}{3}\,da_3=\frac{a_2}{\varrho_2}\,dh_2,$$

et il resterait à prouver que cette formule subsiste aussi dans les deux autres cas mentionnés ci-dessus. Or, si la sphère est extérieure au polyèdre, de manière qu'elle touche, pour ainsi dire, l'envers de chacune des quatre faces en question, il suffit de considérer ϱ_2 comme négatif (ce

Cette proposition fondamentale une fois établie, le problème se réduit à trouver parmi les polyèdres circonscrits à une même sphère et ayant un nombre de faces donné celui dont la surface totale soit un minimum. Considérons en effet deux polyèdres différents à n faces P et P' circonscrits à une même sphère de rayon R. Désignons leurs volumes respectifs par V et V' et leurs surfaces totales par U et U'. Si $U > U'$, on obtiendra par une dilatation uniforme convenable de la seconde figure un polyèdre P'' conforme à P' et ayant une surface $U'' = U$. Ce polyèdre est circonscrit à une sphère dont le rayon R'' est $> R$; son volume V'' est $= \frac{1}{3} R'' U$, et comme $V = \frac{1}{3} R U$, il en résulte que $V'' > V$. On aura ainsi construit un polyèdre P'', ayant même nombre de faces et même surface totale que P, mais un plus grand volume. Cette construction sera toujours possible, tant que U n'est pas un minimum, d'où il suit que, dans ces circonstances, le volume de P ne peut pas être un maximum. En admettant au contraire que U est plus petite que toute autre surface polyédrique de n faces circonscrite à la sphère (R), on prouve par un raisonnement analogue que le volume du polyèdre P est plus grand que celui de tout autre polyèdre à n faces dont la surface totale est $= U$, en sorte qu'il est alors un vrai maximum.

Pour achever à déterminer la forme de la figure maximale cherchée, il ne reste donc qu'à trouver, parmi les polyèdres circonscrits à une même sphère, celui dont la surface totale ou, ce qui revient au même, dont le volume est un minimum, le nombre des faces étant donné. Ce polyèdre doit nécessairement, comme nous l'avons énoncé dans une seconde proposition de notre mémoire, avoir la propriété, que *chacune des faces soit touchée au centre de gravité de son aire par la sphère inscrite.* C'est ce qui est d'ailleurs facile à vérifier.

---

qui revient à désigner le rayon de la sphère par $-\varrho_2$), pour que la relation précédente convienne également à ce cas. D'autre part, si ϱ_2 est infini, le second membre de notre formule s'évanouit et l'on prouve sans difficulté, en observant que $-da_2$, da_1, da_3 sont respectivement proportionnels aux côtés du triangle formé par a_2 et par les prolongements de a_1 et a_3, qu'il en de même du premier membre. Donc cette formule et par suite l'équation (6) du mémoire a lieu dans tous les cas.

Plus loin lorsqu'il s'agit de prouver que la différence $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{R}$ est nécessairement nulle pour toutes les arêtes d'une face quelconque du polyèdre maximum, nous avons recours à un artifice, consistant à éliminer toute face A, pour laquelle cette condition est déjà remplie, en réunissant son contour avec celui d'une face adjacente B, par suppression de l'arête commune et redressement des arêtes contigües, en un seul polygone gauche. Or, on pourrait objecter qu'un tel artifice ne saurait être pratiqué, si les deux faces étaient triangulaires, parce que le polygone résultant se réduirait alors à une droite. Cela est vrai; mais en ce cas le polyèdre, n'ayant par hypothèse que des sommets simples, ne pourrait être qu'un tétraèdre, figure qui est toujours circonscrite à une sphère.

Soit, en effet, A l'une des faces, g son centre de gravité et c son point de contact avec la sphère. Si ces deux points ne coïncident pas, nous menons par g dans le plan A une droite l perpendiculaire à cg et nous faisons tourner le plan A autour de cette droite d'un angle infiniment petit $d\omega$ vers l'extérieur de la sphère. En vertu du théorème de Guldin le volume du polyèdre ne changera par là que d'une quantité infiniment petite du second ordre. Si l'on ramène ensuite le plan parallèlement à lui-même en contact avec la sphère, le volume diminuera d'une quantité du premier ordre. Par ces deux déplacements successifs, qui correspondent ensemble à un roulement de la face A sur la sphère le long d'un arc $d\sigma = Rd\omega$, on aura donc transformé le polyèdre donné en un autre polyèdre circonscrit à la même sphère, mais ayant moindre volume et par conséquent aussi moindre surface totale que le premier [1]). Une telle transformation étant toujours possible lorsque les centres de gravité des faces ne coïncident pas avec leurs points de contact, il en résulte que cette coïncidence est bien une condition nécessaire pour le minimum du polyèdre circonscrit.

2. Une question qui se pose dès à présent, et de savoir si la condition que nous venons d'établir pour le minimum d'un polyèdre circonscrit à une sphère donnée, est aussi suffisante. Quelques considérations élémentaires serviront à éclaircir cette question au point de vue géométrique. Considérons de nouveau la face A, dont le plan nous supposons seul variable, et admettons maintenant que les points c et g se confondent. Faisons ensuite rouler le plan A sur la sphère de manière que le point de contact décrive un petit arc cc'. Soit A' ce que devient la face A par ce déplacement et désignons par g' son centre de gravité. Menons par c' dans le plan A' une droite l' perpendiculaire à cc'. Les points c' et g' se seront en général séparés l'un de l'autre, ayant pris des chemins différents. Supposons que g' soit resté en arrière de l'axe instantané de rotation l'; on voit alors, par les raisonnements de l'article précédent, qu'un déplacement du plan A' en sens inverse, c'est à dire qui le ramenerait vers sa

---

[1]) Pour arriver à ce résultat, il n'est pas nécessaire que l'arc $d\sigma$, décrit par le point de contact, soit dirigé suivant la droite cg; il suffit qu'il fasse avec elle un angle aigu. En effet, si l'on désigne cet angle par φ et la distance cg par e, la variation du volume dûe à un tel déplacement sera en général

$$dV = -A\frac{e}{R}\cos\varphi\, d\sigma,$$

d'où l'on voit que le volume diminue ou augmente, suivant que l'angle φ est aigu ou obtus, c'est à dire suivant que le point de contact s'approche ou s'éloigne du point occupé instantanément par le centre de gravité de la face.

position initiale A, tendrait à diminuer le volume, et si cela a lieu pour toute direction du chemin cc' ou de l'axe l', on pourra en conclure que la position primitive du plan A correspondait à un vrai minimum. Mais s'il arrive au contraire, pour certaines directions de l', que le centre de gravité g' devance le point de contact, en sorte que g' se trouve en avant de l'axe l', on voit de même qu'une déformation ultérieure dans le même sens ferait diminuer le volume, d'où l'on peut inférer que le volume donné n'était pas un minimum. Ainsi la coïncidence du centre de gravité de la face variable avec son point de contact ne garantit l'existence du minimum que si l'on sait en outre qu'un déplacement du point de contact dans une direction quelconque ferait dévier le centre de gravité en un sens opposé de manière qu'il resterait en arrière de l'axe instantané de rotation.

Si l'on voulait calculer effectivement la variation ΔV du volume dûe à un déplacement très petit cc' du point de contact de la face A, on pourrait prendre pour variables indépendantes les coordonnées ξ, η du point c' relativement à deux axes rectangulaires situés dans le plan A et ayant pour origine le point de contact c. Les premiers termes de cette variation disparaîtront actuellement en vertu de l'hypothèse que c est aussi centre de gravité de la face A, et l'on trouvera, en se bornant aux termes du second ordre, une expression de la forme

$$\Delta V = L\xi^2 + M\xi\eta + N\eta^2.$$

Dès lors c'est le discriminant $4LN - M^2$ qui fournit le critérium supplémentaire dont on a besoin; il y a minimum si cette quantité est positive (les coefficients L et N auront alors même signe et ne pourront être que positifs); il n'y en a pas si elle est négative. Ajoutons que dans ce dernier cas il existe en général deux grands cercles passant par c et tels que le volume augmente ou diminue alternativement suivant que le point de contact, à partir de c, se dirige dans l'un ou l'autre des quatre angles sphériques formés par eux.

3. Le calcul que nous venons d'indiquer, rencontre le plus souvent des difficultés insurmontables. Il existe cependant un cas très simple où il peut être effectué complètement et qui peut servir d'illustration au sujet actuel. C'est celui où la face considérée est triangulaire et que les trois faces adjacentes sont perpendiculaires entre elles. Il s'agit alors de résoudre le problème suivant:

Un angle solide trièdre et tri-rectangle étant circonscrit à une sphère donnée, trouver un plan tangent à la même sphère tel que le volume de la pyramide triangulaire découpée par ce plan soit un maximum.

La base de la pyramide doit être touchée par la sphère en son centre de gravité. Mais il faut en déterminer la position.

Prenons le sommet du trièdre pour origine et les trois arêtes pour axes des coordonnées x, y, z. Les coordonnées du centre de la sphère, son rayon étant pris pour unité, seront $x = y = z = 1$. Soient a, b, c les arêtes latérales de la pyramide, c'est à dire les distances de l'origine auxquelles le plan de la base coupe les axes coordonnés, l'équation de ce plan sera

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{1}$$

Pour qu'il soit tangent à la sphère, il faut que le centre de celle-ci soit à la distance 1 de ce plan, c'est à dire qu'on ait

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \pm 1, \tag{2}$$

le signe supérieur ou inférieur ayant lieu, suivant que la sphère est extérieure ou intérieure à la pyramide. Il en résulte dans les deux cas

$$abc = 2\,(ab + ac + bc - a - b - c). \tag{3}$$

Le centre de gravité de la base a pour coordonnées $\frac{a}{3}$, $\frac{b}{3}$, $\frac{c}{3}$. Pour qu'il coïncide avec le point de contact, il faut que la droite qui le joint au centre de la sphère, soit perpendiculaire au plan représenté par l'équation (1), ce qui donne les conditions

$$a\left(\frac{a}{3} - 1\right) = b\left(\frac{b}{3} - 1\right) = c\left(\frac{c}{3} - 1\right),$$

d'où

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3\,(a - b), \\ b^2 - c^2 = 3\,(b - c), \\ c^2 - a^2 = 3\,(c - a), \end{cases} \tag{4}$$

la troisième de ces équations étant une conséquence identique des deux autres. On peut satisfaire aux conditions (2) et (4) à la fois d'abord en supposant $a = b = c = 3 \mp \sqrt{3}$. A ce système de valeurs correspondent deux positions parallèles, diamétralement opposées de la base. Mais les équations (4) admettent en outre les trois solutions suivantes:

$$3 - a = b = c; \quad 3 - b = c = a; \quad 3 - c = a = b;$$

et pour que celles-ci satisfassent aussi à l'équation (2) ou (3), les arêtes a, b, c doivent avoir respectivement les valeurs spéciales suivantes:

$$a = 2,\ b = c = 1, \text{ ou } b = 2,\ a = c = 1, \text{ ou bien } c = 2,\ a = b = 1,$$

les solutions où entreraient des valeurs nulles ou négatives de ces arêtes ne comptant pas.

Il existe donc en tout cinq positions différentes de la base variable dans lesquelles son point de contact avec la sphère coïncide avec son centre de gravité. Nous allons examiner séparément chacune de ces positions pour vérifier si elle répond ou non à un vrai maximum ou minimum du volume.

4. Pour un système quelconque de valeurs de a, b, c le volume du tétraèdre est

$$V = \frac{1}{6} abc.$$

Faisons varier la position de la base, tout en supposant qu'elle reste tangente à la sphère, et soient $a(1+\alpha)$, $b(1+\beta)$, $c(1+\gamma)$ ce que deviennent a, b, c dans cette nouvelle position, α, β, γ étant de petites quantités positives ou négatives. A cause de l'équation (3) ces dernières quantités, que nous considérons comme variables, seront liées entre elles par la relation

$$\frac{1}{2} abc\,(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma) = \tag{5}$$

$$ab(1+\alpha)(1+\beta) + ac(1+\alpha)(1+\gamma) + bc(1+\beta)(1+\gamma) - a(1+\alpha) - b(1+\beta) - c(1+\gamma).$$

Soit ΔV l'accroissement du volume V, on aura

$$\frac{\Delta V}{V} = (1+\alpha)\,(1+\beta)\,(1+\gamma) - 1. \tag{6}$$

En éliminant une des variables, p. ex. α, au moyen de l'équation (5), on obtiendra ΔV exprimé par deux paramètres β, γ, indépendants l'un de l'autre.

Appliquons ce procédé d'abord au cas où $a = b = c = 3 \mp \sqrt{3}$. La relation (5) devient

$$\frac{1}{2} a^2 (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma) = a\,[(1+\alpha)(1+\beta) + (1+\alpha)(1+\gamma) + (1+\beta)(1+\gamma)] - (1+\alpha) - (1+\beta) - (1+\gamma),$$

ou, en transposant,

$$(1+\alpha)\,[a^2 - 4a + 2 + (a^2 - 2a)(\beta+\gamma) + a^2\beta\gamma] = 2a - 4 + (2a-2)(\beta+\gamma) + 2a\beta\gamma.$$

Or, en vertu de l'équation (3) on a dans le cas actuel

$$a^2 - 6a + 6 = 0,$$

d'où

(7) $$a^2 - 4a + 2 = 2a - 4.$$

On aura donc, en divisant l'équation précédente par $2a - 4$,

$$(1+\alpha)\left[1 + \frac{a}{2}(\beta+\gamma) + \frac{a^2}{2a-4}\beta\gamma\right] = 1 + \frac{a-1}{a-2}(\beta+\gamma) + \frac{a}{a-2}\beta\gamma.$$

En développant suivant les puissances de β et γ, on trouve, eu égard à la relation (7), en se bornant aux termes des deux premiers ordres,

$$1 + \alpha = 1 - (\beta+\gamma) + \frac{a}{2}(\beta+\gamma)^2 - \frac{a}{2}\beta\gamma + \cdots$$

Multipliant par $(1+\beta)(1+\gamma) = 1 + \beta + \gamma + \beta\gamma$, il vient

$$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma) = 1 + \left(\frac{a}{2} - 1\right)(\beta+\gamma)^2 - \left(\frac{a}{2} - 1\right)\beta\gamma + \cdots$$

et l'on obtient définitivement

$$\frac{\Delta V}{V} = \left(\frac{a}{2} - 1\right)[(\beta+\gamma)^2 - \beta\gamma] + \cdots = \left(\frac{a}{2} - 1\right)\left[\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\gamma^2\right] + \cdots$$

Lorsqu'on substitue pour a sa valeur $3 \mp \sqrt{3}$, on trouve, en prenant le signe supérieur,

$$\frac{a}{2} - 1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

et, en prenant le signe inférieur,

$$\frac{a}{2} - 1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Dans le premier cas ΔV est essentiellement négatif pour toutes les valeurs suffisamment petites de β et γ; par conséquent il répond à un vrai maximum du volume V. Dans le second cas ΔV est au contraire positif, quelles que soient les valeurs de β et γ; on aura donc alors affaire à un vrai minimum.

Passons maintenant au cas où $a = 2$, $b = c = 1$. L'équation (5) devient à présent

$$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma) = 2(1+\alpha)(1+\beta+\gamma) + (1+\beta)(1+\gamma) - (1+\beta) - (1+\gamma)$$

ou, en réduisant,

$$(1+\alpha)(1+\beta+\gamma-\beta\gamma) = 1-\beta\gamma.$$

On en déduit, en développant,

$$1+\alpha = 1-(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)^2+\cdots$$

d'où

$$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma) = 1+\beta\gamma+\cdots$$

et par suite

$$\frac{\Delta V}{V} = \beta\gamma+\cdots$$

Comme cette expression, lorsqu'on y fait varier arbitrairement β et γ, est tantôt positive, tantôt négative, il en résulte que, malgré l'évanouissement de la première variation de V, il n'y a dans le cas actuel ni maximum ni minimum.

On arrive à la même conclusion en examinant les cas analogues où l'on a soit $b = 2$, $a = c = 1$, soit $c = 2$, $a = b = 1$. Ainsi le problème n'admet en définitive qu'un seul maximum et un seul minimum, le premier répondant au cas où la sphère est extérieure, et le second à celui où elle est intérieure à la pyramide.

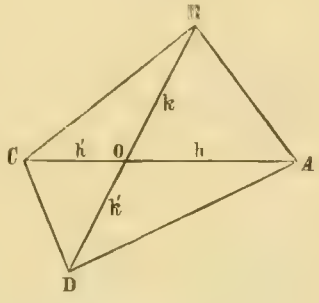
Cet exemple prouve que si l'on fait varier une face d'un polyèdre circonscrit à une sphère donnée, il peut y avoir plusieurs positions dans lesquelles son centre de gravité coïncide avec son point de contact, et que cette coïncidence seule ne suffit pas pour garantir le minimum du volume.

II. Propriétés barycentriques de quelques figures planes et solides.

5. Pour faciliter la recherche de polyèdres spéciaux remplissant les conditions du maximum, il sera utile d'établir d'abord quelques propositions concernant le centre de gravité de certaines figures planes et solides.

Centre de gravité d'un quadrilatère. — Si l'on joint le centre de gravité d'un polygone de n côtés aux sommets de la figure, celle-ci sera divisée en n triangles, que nous désignerons sous le nom de triangles *barycentriques*. Lorsque la figure est elle-même un triangle, les trois triangles barycentriques dont elle se compose, sont égaux. Nous allons examiner quelles sont les propriétés analogues d'un quadrilatère.

Fig. 1.



Soit $ABCD$ (fig. 1) un quadrilatère quelconque, G le centre de gravité de son aire, O l'intersection des deux diagonales. Prenons OA et OB pour axes d'un système de coordonnées x, y, en général obliquangle. Posons $OA = h$, $OC = h'$, $OB = k$, $OD = k'$; les coordonnées x_0, y_0 du centre de gravité G seront

$$x_0 = \frac{h - h'}{3}, \qquad y_0 = \frac{k - k'}{3}.$$

Désignons encore par J le point d'intersection des deux médianes de la figure (c'est à dire des droites joignant les points milieux des côtés opposés); les coordonnées de J seront

$$x_1 = \frac{h - h'}{4}, \qquad y_1 = \frac{k - k'}{4}.$$

Ces expressions font voir que les trois points O, G, J sont situés sur une même ligne droite et que $OG = \frac{4}{3} OJ$, ce qui fournit un moyen simple pour construire le centre de gravité d'un quadrilatère. Pour cela il suffit, en effet, de joindre l'intersection des diagonales à celle des médianes par une droite et de prolonger celle-ci d'un tiers de sa longueur.

L'aire du triangle barycentrique GAB a pour expression

$$\begin{vmatrix} 1 & h & 0 \\ 1 & 0 & k \\ 1 & \frac{h-h'}{3} & \frac{k-k'}{3} \end{vmatrix} \cdot \frac{\sin\vartheta}{2},$$

ϑ étant l'angle compris entre les axes coordonnés. En développant le déterminant, on trouve

$$GAB = \frac{hk + hk' + h'k}{3} \cdot \frac{\sin\vartheta}{2}.$$

Or, les produits

$$\frac{hk\sin\vartheta}{2}, \quad \frac{hk'\sin\vartheta}{2}, \quad \frac{h'k\sin\vartheta}{2}$$

représentent évidemment les aires des triangles *diagonaux* OAB, OAD, OBC; on aura donc

$$GAB = \frac{1}{3}(OAB + OAD + OBC).$$

On obtient des formules analogues pour les autres triangles barycentriques GBC, GCD, GDA et l'on est ainsi conduit au théorème suivant:

Dans un quadrilatère quelconque chacun des triangles barycentriques dont il se compose, est égal à la moyenne arithmétique de trois triangles diagonaux adjacents, dont celui du milieu a la même base que le triangle barycentrique considéré.

Ce théorème donne lieu à d'autres conséquences remarquables. Désignons par F l'aire du quadrilatère, par a, b, c, d les quatre triangles diagonaux qui ont pour bases resp. les côtés AB, BC, CD, DA du quadrilatère, et par α, β, γ, δ les triangles barycentriques correspondants, nous aurons, d'après le théorème précédent,

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a+b+d}{3} = \frac{F-c}{3}, \\ \beta &= \frac{b+c+a}{3} = \frac{F-d}{3}, \\ \gamma &= \frac{c+d+b}{3} = \frac{F-a}{3}. \\ \delta &= \frac{d+a+c}{3} = \frac{F-b}{3}. \end{aligned} \tag{1}$$

d'où

$$
\begin{aligned}
a &= F - 3\gamma\,, \\
b &= F - 3\delta\,, \\
c &= F - 3\alpha\,, \\
d &= F - 3\beta\,.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

On a d'ailleurs $a : b = d : c$ ou

$$ac = bd\,.$$

En y substituant les valeurs (2) et observant que $F = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, il vient

$$(F - 3\alpha)(F - 3\gamma) = (F - 3\beta)(F - 3\delta)$$

ou, en réduisant,

$$3(\alpha\gamma - \beta\delta) = F \cdot (\alpha + \gamma - \beta - \delta) = (\alpha + \gamma)^2 - (\beta + \delta)^2\,,$$

ce qui donne

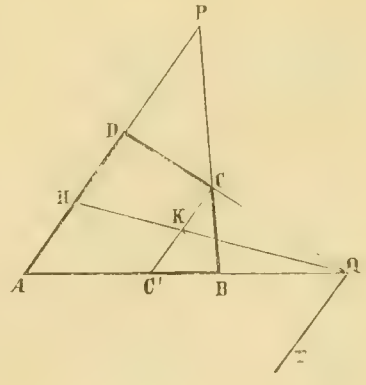
$$\alpha^2 + \gamma^2 - \alpha\gamma = \beta^2 + \delta^2 - \beta\delta. \tag{3}$$

C'est là une relation importante entre les triangles barycentriques d'un quadrilatère, qui nous sera utile dans la suite.

Les équations (1) et (2) font voir que a est resp. inférieur, égal ou supérieur à γ, suivant que a est inférieur, égal ou supérieur à c. Or, si $a = c$, les côtés BC et AD sont parallèles, mais si $a > c$, ils concourent vers un point situé au-delà de la base du triangle c. On peut donc affirmer également que *si deux triangles barycentriques, ayant pour bases deux côtés opposés d'un quadrilatère, sont équivalents, les deux autres côtés du quadrilatère seront parallèles, mais que, si les triangles sont inégaux, les côtés dont il s'agit, convergeront vers la base du plus petit triangle.*

6. Considérons le quadrilatère complet obtenu en prolongeant les côtés opposés du quadrilatère donné $ABCD$ jusqu'à leur rencontre en P et Q. Joignons Q au milieu H du côté AD par la droite QH et menons la corde CC' parallèle à DA; cette corde sera aussi divisée en parties égales en K par la droite QH. Cela posé, le trapèze $ADCC'$ aura son centre de gravité sur la bissectrice HK de ses côtés parallèles, tandis que le triangle BCC' aura le sien au-dessous de cette bissectrice

Fig. 2.



sur la droite KB, d'où il suit que le centre de gravité G du quadrilatère entier $ABCD$ se trouvera au-dessous de la droite QH. Menons par Q une droite QT parallèle à DA; cette droite sera conjuguée harmonique de QH par rapport aux rayons QD et QA. Le conjugué harmonique de QG par rapport aux mêmes rayons sera donc compris entre QT et QA de manière à rencontrer les prolongements des côtés DA et CB au-dessous de la base inférieure AB.

Pour mieux distinguer les deux directions d'un côté quelconque d'un quadrilatère, nous appellerons l'une d'elles *ascendante* et l'autre *descendante*, en entendant par la première direction celle qui vise le point de concours du côté dont il s'agit, avec le côté opposé, et par la seconde la direction inverse. Et dans la même acception du mot nous dirons que le prolongement d'un côté est ascendant vers l'une des extrémités et descendant vers l'autre. Cela posé, la proposition que nous venons de démontrer, peut s'énoncer ainsi:

Étant donné un faisceau harmonique de quatre rayons, dont deux conjugués coïncident respectivement avec deux côtés opposés d'un quadrilatère et dont le troisième passe par le centre de gravité de son aire, le quatrième rayon, conjugué de celui-ci, coupera les prolongements descendants des deux autres côtés.

Inversement on peut affirmer que le centre de gravité du quadrilatère ne saurait se trouver sur un rayon dont le conjugué par rapport à deux côtés opposés du quadrilatère rencontre le prolongement ascendant de l'un ou l'autre des deux autres côtés.

Étant donné un faisceau harmonique de quatre plans dont deux conjugués contiennent respectivement deux côtés opposés du quadrilatère et le troisième passe par un point de son intérieur, on sera également autorisé à conclure que ce point ne saurait être centre de gravité du quadrilatère, dès qu'on aura démontré que le quatrième plan rencontre le prolongement ascendant de l'un ou l'autre des deux autres côtés.

Si le sommet Q s'éloigne à l'infini, les quatre rayons du faisceau harmonique dont il est centre, deviennent parallèles; mais il n'y a du reste rien à changer dans le théorème précédent ni dans ses corollaires.

Si les cotés AD et BC sont parallèles, le centre de gravité G se trouve sur le rayon bissecteur de ces côtés; le conjugué de ce rayon par rapport aux deux bases du quadrilatère est alors parallèle aux mêmes côtés, de sorte qu'il ne rencontre leurs prolongements ni dans un sens ni dans l'autre.

Dans le cas particulier où les points B, C, Q se confondent et que le quadrilatère se réduit à un triangle QAD, le centre de gravité G se trouve également sur la bissectrice QH même et le conjugué harmonique de QG par rapport aux rayons QA et QD est parallèle à AD. Pour prouver alors que

le centre de gravité du triangle ne peut se trouver sur une certaine droite QX ou dans un certain plan passant par elle, il suffit de faire voir que le quatrième rayon ou le quatrième plan du faisceau harmonique déterminé par les droites QA, QD, QX ou par les plans qui les contiennent, rencontre le prolongement du côté AD soit dans un sens soit dans l'autre.

Nous ferons dans la suite un fréquent usage de ces remarques.

7. *Centre de gravité d'un polygone.* — Les polygones ayant plus de quatre côtés ne présentent pas en général de propriétés bien marquantes relatives à leurs centres de gravité. Cependant on peut signaler une circonstance assez remarquable concernant les polygones circonscrits à un cercle. Elle est contenue dans le théorème suivant:

Un polygone étant circonscrit à un cercle, les centres de gravité de son aire et de son périmètre se trouvent sur un même rayon du cercle, leurs distances au centre étant respectivement comme 2 : 3.

Soit P un tel polygone et O le centre du cercle inscrit. Considérons les triangles dans lesquels le polygone est partagé par les droites qui en joignent les sommets au centre O. Si par les centres de gravité de ces différents triangles on mène des droites parallèles aux côtés correspondants du polygone P, on construit par là un autre polygone P' conforme au premier avec le point O comme centre de similitude, et l'on voit immédiatement que le centre de gravité de l'aire de P coïncide avec celui du périmètre de P'. Or, à cause de la similitude projective des polygones P et P' les centres de gravité de leurs périmètres respectifs doivent se trouver sur un même rayon à des distances du centre proportionelles aux dimensions linéaires des deux figures, lesquelles sont entre elles comme 3 : 2. On a donc, G étant le centre de gravité de l'aire et G' celui du périmètre du polygone donné, $OG = \frac{2}{3} OG'$, c. q. f. d.

8. *Centre de gravité d'un polyèdre circonscrit à une sphère.* — En comparant le polyèdre donné avec un autre semblable et homothétique dont les dimensions linéaires sont $^3/_4$ de celles de la première figure, on arrive par un raisonnement, analogue à celui du n° précédent, à établir la proposition suivante:

Un polyèdre étant circonscrit à une sphère, les centres de gravité de son volume et de sa surface totale se trouvent sur un même rayon de la sphère, leurs distances respectives au centre étant comme 3 : 4.

Nous signalons encore le théorème suivant relatif aux polyèdres dont il s'agit:

Si toutes les faces du polyèdre sont touchées dans leurs centres de gravité respectifs par la sphère inscrite, les centres de gravité du volume et de la surface totale du polyèdre coïncideront avec le centre de la sphère.

Pour le démontrer, nous nous proposons d'évaluer la distance du centre de gravité G du polyèdre à un plan arbitraire C mené par le centre O de la sphère. Soit A une des faces du polyèdre, a son centre de gravité, α l'angle formé par le rayon Oa avec la normale au plan C prise dans un sens déterminé. Le centre de gravité de la pyramide qui a la face A pour base et le centre O pour sommet, est situé sur Oa à une distance de O qui est $^3/_4$ du rayon R de la sphère. Le moment du volume de la pyramide par rapport au plan C sera donc

$$\frac{RA}{3} \cdot \frac{3}{4} R \cos \alpha = \frac{R^2}{4} A \cos \alpha .$$

Or, $A \cos \alpha$ n'est autre chose que la projection de la face A sur le plan C, prise avec le signe + ou −, suivant que α est inférieur ou supérieur à 90°. En prenant la somme de ces expressions relatives à toutes les faces, le résultat doit évidemment être nul, puisque la somme des projections positives couvre exactement celle des projections négatives. Il en résulte que le moment du volume du polyèdre entier par rapport au plan C est aussi nul, c'est-à-dire que le centre de gravité G se trouve dans ce plan. Cela ayant lieu pour tout plan passant par O, il faut donc que G coïncide avec O. En vertu du théorème précédent on en conclut immédiatement que le centre de gravité de la surface du polyèdre coïncide aussi avec le centre de la sphère.

La réciproque de cette proposition n'est pas vraie en général. Ainsi p. ex. une pyramide régulière double a toujours son centre de gravité au centre de la sphère inscrite, quand même celle-ci ne touche pas les faces dans leurs centres de gravité.

III. Applications à différentes classes de polyèdres.

9. Après ces considérations préliminaires nous arrivons au sujet principal de notre recherche. En passant successivement en revue différentes classes de polyèdres, nous allons examiner s'il y a parmi ceux qui appartiennent à une classe donnée, un ou plusieurs qui satisfassent aux conditions générales du maximum, lesquelles exigent que le polyèdre soit circonscrit à une sphère et

touché par elle aux centres de gravité de ses faces. Pour abréger, nous appellerons un tel polyèdre *maximal*, sans nous préoccuper, pour le moment, s'il est ou non un vrai maximum.

Pyramides.

Nous ferons remarquer tout d'abord que deux faces triangulaires d'un polyèdre quelconque, ayant une arête commune et étant touchées par une sphère dans leurs centres de gravité respectifs, sont nécessairement égales dans toutes leurs parties. Cela est une conséquence immédiate de la position symétrique des points de contact par rapport à l'arête commune et de ce qu'un triangle est déterminé lorsqu'on en connaît un côté et le centre de gravité.

D'après cela les triangles latéraux d'une pyramide maximale, quel que soit leur nombre, sont tous égaux et conformes. On en conclut d'une part que la base de la pyramide est équilatérale, et de l'autre que les droites qui joignent les points milieux des côtés de la base au sommet de la pyramide et qui se confondent avec des génératrices du cône inscrit, sont aussi égales entre elles. Ces points milieux se trouvent donc sur la circonférence d'un cercle auquel la base est circonscrite, d'où il suit que celle-ci est un polygone régulier et que la pyramide elle-même est régulière.

Nous savons d'ailleurs (n° 8) que le centre de gravité de la pyramide maximale doit coïncider avec le centre de la sphère inscrite. La hauteur de la pyramide sera donc égale au quadruple du rayon de la sphère; et comme l'apothème de la base doit être le tiers de la hauteur d'un triangle latéral, on trouve, en prenant pour unité le rayon de la sphère, que cet apothème est $= \sqrt{2}$, quel que soit le nombre des côtés de la pyramide.

Pyramide tronquée.

10. Considérons une pyramide tronquée T circonscrite à une sphère. Désignons par S le sommet de la pyramide complète dont elle fait partie, par B la base supérieure (celle qui est plus rapprochée de S) et par D la base inférieure du tronc T. Soit L l'intersection des plans des deux bases et l leur corde de contact avec la sphère. Cette corde étant prolongée en haut (au-delà de la base B) entre dans la pyramide détachée SB et doit nécessairement, en sortant de celle-ci, rencontrer une des faces latérales de la pyramide tronquée dans son prolongement vers le sommet S. (Elle pourrait rencontrer à la fois

deux faces latérales, en passant par leur arête commune, ou même toutes ces faces, si elle passait par le sommet S; mais il n'est pas nécessaire de distinguer ces cas.) Soit F la face dont il s'agit, S' le point où elle est rencontrée par la corde l, et f son point de contact avec la sphère. Menons par L deux plans A et C, dont le premier passe par S' et le second par f. Dès lors S' sera pôle du plan C par rapport à la sphère; car le pôle de ce plan doit se trouver sur la polaire réciproque de L, c'est-à-dire sur la droite l, et en même temps sur le plan polaire du point f, qui est celui de la face F même. Il en résulte que la corde l est coupée harmoniquement par les plans A et C et que, par conséquent, les quatre plans A, B, C, D constituent un faisceau harmonique. Deux de ces plans, B et D, contiennent respectivement les deux bases du quadrilatère F; quant au plan A, qui passe entre la base supérieure et le sommet S, il doit évidemment couper les prolongements ascendants des deux autres côtés du quadrilatère, d'où il suit (n° 6) que le point de contact f, qui est situé dans le plan C, conjugué de A, ne saurait être en même temps centre de gravité de la face F.

Il est donc impossible que la pyramide tronquée soit une figure maximale, à moins que le sommet S ne s'éloigne à l'infini. Dans ce cas particulier on aurait affaire à une figure prismatique, dont il sera question plus loin (n° 14).

Pyramide double.

11. Une pyramide double de $2n$ faces consiste en deux pyramides simples, construites de part et d'autre d'une base commune de n côtés. Pour qu'une telle figure puisse être circonscrite à une sphère qui en touche les faces dans leurs centres de gravité respectifs, il faut que ces faces, étant triangulaires, soient toutes égales et conformes. Il en résulte en particulier que les côtés de la base commune des deux pyramides simples, doivent être égaux et tangents en leurs points milieux à un cercle qui est section commune des cônes inscrits aux deux pyramides, d'où l'on conclut que celles-ci sont régulières et égales dans toutes leurs parties.

Pour les dimensions de cette figure on trouve, en prenant le rayon de la sphère pour unité linéaire, les valeurs suivantes:

$$\text{demi-axe de la pyramide double} = \sqrt{3},$$

$$\text{hauteur d'un triangle latéral} = \frac{3}{2}\sqrt{2},$$

$$\text{apothème de la base} = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$\text{arête de la base} = \sqrt{6}\,\text{tang}\frac{\pi}{n},$$

$$\text{arête latérale d'une face} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(9 + 3\,\text{tang}^2\frac{\pi}{n}\right)},$$

$$\text{volume de la pyramide double} = \sqrt{3}\cdot n\,\text{tang}\frac{\pi}{n}.$$

En désignant par α l'angle formé par une arête latérale avec l'axe de la figure et par φ l'inclinaison d'une face sur cet axe, on trouve encore

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{tang}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\pi}{n}}.$$

Il est assez remarquable que la longueur de l'axe et l'inclinaison φ sont indépendants du nombre des faces.

Pour $n = 3$, c'est-à-dire pour la double-pyramide maximale à six faces, on a $\text{tang}\frac{\pi}{n} = \sqrt{3}$ et l'on trouve, entre autres, les valeurs suivantes:

$$\text{arête de la base} = 3\sqrt{2},$$
$$\text{arête latérale} = 3,$$

d'où l'on conclut que les trois arêtes latérales de chaque moitié de la figure sont perpendiculaires entre elles. Le volume de cette figure est $= 9$.

Pour $n = 4$ on a $\text{tang}\frac{\pi}{n} = 1$, et l'on obtient tant pour l'arête de base que pour une arête latérale la même valeur $\sqrt{6}$. La figure est alors un octaèdre régulier; son volume est $= 4\sqrt{3}$.

Double-pyramide tronquée.

12. Une double-pyramide tronquée à $2n + 2$ faces est composée de deux pyramides tronquées simples construites des deux cotés d'une base commune de n côtés. Nous considérons ici le seul cas où la figure dont il s'agit, est régulière, c'est-à-dire où les pyramides tronquées composantes sont égales et con-

formes, chacune d'elles faisant partie d'une pyramide régulière dont elle est découpée par un plan parallèle à la base. La surface du polyèdre entier consiste alors de deux bases parallèles et égales, dont chacune est un polygone régulier de n côtés, et de $2n$ trapèzes, qui sont de même tous égaux et conformes. On peut toujours régler la distance des bases de telle sorte que la figure soit circonscrite à une sphère, et dès lors il suffit évidemment de donner aux faces latérales une inclinaison convenable sur l'axe, c'est-à-dire sur la droite qui joint les centres des deux bases, pour que leurs points de contact avec la sphère coïncident avec leurs centres de gravité.

Considérons en général une double-pyramide tronquée régulière circonscrite à une sphère de rayon 1 et désignons par φ l'inclinaison d'une face latérale sur l'axe de la figure. On trouve pour son volume l'expression

$$V = \frac{2}{3} n \operatorname{tang} \frac{\pi}{n} \cdot \frac{3 - 3 \sin \varphi + \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Les deux bases d'une telle figure seront toujours touchées dans leurs centres de gravité par la sphère inscrite. Pour qu'il en soit de même des faces trapézoïdales, il faut que l'angle φ satisfasse à la condition

$$3 \sin^2 \varphi - 8 \sin \varphi + 3 = 0,$$

qui donne

$$\sin \varphi = \frac{4 - \sqrt{7}}{3}, \qquad \varphi = 26^0\, 50'.1.$$

L'expression du volume devient alors

$$V = \frac{n}{3} \operatorname{tang} \frac{\pi}{n} \cdot (2 + \sqrt{7}).$$

Pour $n = 3$ on a $\operatorname{tang} \frac{\pi}{n} = \sqrt{3}$ et le volume de la figure, qui est en ce cas une double-pyramide tronquée octaédrique maximale, se réduit à

$$V = \sqrt{3}\,(2 + \sqrt{7}) = 8.0467 \cdots$$

Nous nous bornons pour le présent à ces indications succinctes, les doubles-pyramides tronquées ne constituant guère une classe assez importante pour nécessiter un examen plus complet.

Prisme à bases parallèles.

13. Nous supposons toujours que la figure à examiner soit circonscrite à une sphère. Joignons les centres de gravité des deux bases par une droite. Pour que les bases, étant parallèles, puissent être touchées par la sphère inscrite dans leurs centres de gravité respectifs, elles doivent être perpendiculaires à cette droite et, par conséquent, aux arêtes du prisme. La figure est donc un prisme droit, et comme la sphère doit aussi toucher chaque rectangle latéral en son centre de gravité, il faut que ces rectangles soient égaux.

Un prisme maximal est donc nécessairement régulier et tel que sa hauteur est le double de l'apothème de la base.

Prisme à bases quelconques.

14. Les centres de gravité des deux bases se trouvent sur une droite qui est parallèle aux arêtes latérales du prisme. Pour que cette droite soit corde de contact de la sphère inscrite avec les deux bases, il faut que celles-ci soient également inclinées sur elle, et que leur intersection L lui soit perpendiculaire. Ainsi le plan diamétral mené par L doit être perpendiculaire aux arêtes latérales et diviser la figure prismatique en deux parties symétriques.

Cela posé, supposons d'abord que le prisme soit *triangulaire*. Imaginons les faces du prisme divisées en triangles ayant pour bases les arêtes et pour sommets les points de contact des faces respectives avec la sphère. Un de ces triangles, appartenant à une face quelconque, est égal au triangle voisin de la face adjacente avec lequel il a même arête pour base commune. Ainsi les triangles dont se compose la base supérieure (le prisme étant supposé vertical), sont respectivement égaux aux triangles supérieurs des trois faces latérales, et ceux de la base inférieure sont égaux aux triangles inférieurs des mêmes faces. Or, en admettant que les points de contact sont en même temps centres de gravité des faces respectives, les trois triangles dont se compose chacune des bases, sont équivalents, et comme les bases elles-mêmes sont égales à cause de leur position symétrique, il s'ensuit que les six triangles barycentriques supérieurs et inférieurs des trois faces latérales sont tous equivalents entre eux.

Désignons maintenant les triangles barycentriques restants des faces latérales, je veux dire ceux qui ont respectivement pour bases les trois arêtes la-

térales du prisme et qui sont égaux deux à deux, par a_1, a_2, a_3, en sorte que a_1 et a_2 appartiennent à une des faces, a_2 et a_3 à une autre et a_3, a_1 à la troisième, nous aurons entre ces triangles, en appliquant la formule générale (3) (p. 13) relative aux triangles barycentriques d'un quadrilatère, les relations suivantes

$$a_1^2 + a_2^2 - a_1 a_2 = a_2^2 + a_3^2 - a_2 a_3 = a_3^2 + a_1^2 - a_3 a_1,$$

qu'on peut mettre sous la forme:

$$(a_1 + a_2 - a_3)(a_1 - a_2) = 0,$$
$$(a_2 + a_3 - a_1)(a_2 - a_3) = 0,$$
$$(a_3 + a_1 - a_2)(a_3 - a_1) = 0.$$

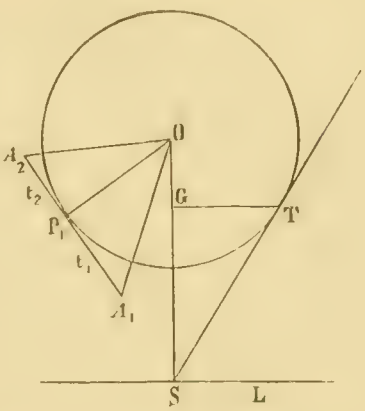
On satisfait à ces relations d'abord en supposant $a_1 = a_2 = a_3$, égalité qui ferait conclure que les deux bases sont parallèles et par suite, eu égard à leur symétrie, perpendiculaires aux arêtes. Mais pour savoir s'il y a d'autre solution possible, nous admettons que, les trois quantités n'étant pas toutes égales, a_1 est la plus grande et a_3 la plus petite d'entre elles. Alors la première équation exige que $a_1 = a_2$ et la troisième, réduite par là à $a_3(a_3 - a_1) = 0$, que $a_3 = 0$, et par ces valeurs la seconde équation se trouve aussi identiquement vérifiée. Or, la disparition du triangle a_3 signifie que la figure cesse d'être prismatique et qu'elle se réduit à une pyramide quadrangulaire. Laissant de côté cette dernière solution comme étant hors de la question actuelle, nous pouvons donc affirmer *qu'une figure prismatique triangulaire ne saurait remplir les conditions générales du maximum, que s'il est un prisme droit.*

Nous savons d'ailleurs (n° 13) qu'en ces conditions le prisme doit au surplus être régulier.

15. Pour en revenir au cas général, où le nombre n des faces latérales de la figure prismatique est quelconque, nous considérons la section du prisme faite par un plan central C, qui passe par l'intersection L des deux bases. Elle forme évidemment un polygone circonscrite à un grand cercle de la sphère. Abaissons du centre O de ce cercle la perpendiculaire OS sur L, menons la droite ST tangent au cercle au point T, et de ce point la perpendiculaire TG sur la droite OS. Le point G se trouve sur la corde de contact des deux bases; en d'autres termes, c'est la projection commune sur le plan central de leurs points de contact avec la sphère.

Désignons par A_1, A_2, A_3, ... les sommets de la section centrale, par P_1, P_2, P_3, ... les points où ses côtés successifs sont touchés par le cercle inscrit, par h_1, h_2, h_3, ... les perpendiculaires abaissées de A_1, A_2, A_3, ... sur la droite L, par μ_1, μ_2, μ_3 ... les angles formés par les rayons OP_1, OP_2, OP_3, ... avec la droite OS et comptés de celle-ci, en tournant de gauche à droite, de 0 à 2π, par t_1, t_2 les deux segments A_1P_1, P_1A_2 du côté A_1A_2, par t_2, t_3 les segments A_2P_2, P_2A_3 du côté A_2A_3 etc., $(t_{n+1} = t_1)$.

Fig. 3.



Le point de contact P_1 étant aussi, d'après l'hypothèse, centre de gravité du trapèze compris entre les arêtes latérales qui passent par A_1 et A_2 et que nous désignerons pour un moment par k_1 et k_2, on a, d'après un théorème connu, $t_1 : t_2 = k_1 + 2k_2 : k_2 + 2k_1$, d'où l'on tire, en observant que les arêtes k_1 et k_2 sont proportionnelles aux perpendiculaires h_1 et h_2,

$$(1) \qquad \frac{t_1}{h_1 + 2h_2} = \frac{t_2}{2h_1 + h_2} = \frac{t_1 + t_2}{3(h_1 + h_2)} = \frac{t_1 - t_2}{h_2 - h_1}.$$

Tant que $\mu_1 < \pi$, on a $h_2 > h_1$ et par suite $t_1 > t_2$. Pour $\mu_1 > \pi$ c'est le contraire qui a lieu. La formule (1) nous apprend en outre qu'en faisant varier $\frac{h_1}{h_2}$ de 0 à 1, le rapport $\frac{t_2}{t_1}$ varie de $\frac{1}{2}$ à 1. En appliquant le même raisonnement aux côtés successifs du polygone central $A_1A_2A_3\ldots$, on voit qu'en suivant le contour de ce polygone dans le sens indiqué, le premier segment de chaque côté est plus grand que le second tant que le point de contact se trouve à gauche du diamètre vertical, mais plus petit, lorsqu'il se trouve de l'autre côté. Aux extrémités de ce diamètre, c'est à dire dans les cas particuliers où l'on aurait pour un certain côté du polygone $\mu = 0$ ou $\mu = \pi$, les deux segments seraient égaux.

Nous avons admis que les faces latérales du prisme sont touchées par la sphère dans leurs centres de gravité respectifs. S'il en était de même des deux bases, le point G serait centre de gravité de l'aire du polygone $A_1A_2A_3\ldots$ Cela est-il possible et dans quel cas? C'est ce que nous allons examiner.

Soit $OS = s$; en prenant le rayon de la sphère pour unité, on a $OG = \frac{1}{s}$ et

$$(2) \qquad \begin{aligned} h_1 &= s - \cos\mu_1 - t_1 \sin\mu_1 , \\ h_2 &= s - \cos\mu_1 + t_2 \sin\mu_1 . \end{aligned}$$

L'aire du triangle $A_1 O A_2$ est $\frac{t_1 + t_2}{2}$ et la distance de son centre de gravité à la droite L

$$\frac{h_1 + h_2 + s}{3} = s - \frac{2\cos\mu_1 + (t_1 - t_2)\sin\mu_1}{3} ;$$

le moment de son aire par rapport à l'axe L sera donc

$$\frac{t_1 + t_2}{2}\left(s - \frac{2\cos\mu_1 + (t_1 - t_2)\sin\mu_1}{3}\right).$$

On trouve des expressions analogues pour les moments des triangles $A_2 O A_3$, $A_3 O A_4, \ldots$ En faisant la somme de toutes ces expressions et observant que le terme

$$\Sigma (t_i + t_{i+1}) \cos\mu_i , \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots n) ,$$

qui n'est autre chose que la projection du périmètre du polygone central $A_1 A_2 A_3 \ldots$ sur le diamètre horizontal du cercle inscrit, s'évanouit identiquement, on obtient, pour le moment de l'aire totale de ce polygone par rapport à l'axe L, la valeur

$$s \sum \frac{t_i + t_{i+1}}{2} - \sum \frac{(t_i^2 - t_{i+1}^2)\sin\mu_i}{6} .$$

D'autre part, en désignant par σ la distance du centre de gravité du polygone à l'axe L, le moment dont il s'agit, s'exprime aussi par

$$\sigma \sum \frac{t_i + t_{i+1}}{2} .$$

On a donc, en égalant ces deux expressions,

$$(s - \sigma)\, \Sigma (t_i + t_{i+1}) = \sum \frac{(t_i^2 - t_{i+1}^2)\sin\mu_i}{3} .$$

Pour trouver la valeur de s exprimée en t et μ, nous nous reportons aux équations (1), qui donnent, en substituant pour h_1 et h_2 leurs valeurs (2),

$$\frac{t_1 + t_2}{3\,(2\,s - 2\cos\mu_1 - (t_1 - t_2)\sin\mu_1)} = \frac{t_1 - t_2}{(t_1 + t_2)\sin\mu_1}.$$

On en tire:

$$s = \cos\mu_1 + \frac{2\,(t_1^2 - t_1\,t_2 + t_2^2)}{3\,(t_1 - t_2)}\sin\mu_1,$$

et en général

$$s = \cos\mu_i + \frac{2\,(t_i^2 - t_i\,t_{i+1} + t_{i+1}^2)}{3\,(t_i - t_{i+1})}\sin\mu_i.$$

Cette équation montre de nouveau que $t_i - t_{i+1}$ doit s'annuler en même temps que $\sin\mu_i$, et vice versâ, tant que s reste fini (s étant nécessairement > 1), mais que, si s est infini, $t_i - t_{i+1}$ doit être constamment nul, quel que soit i.

Supposons que s soit fini. Multiplions les deux membres de l'équation précédente par $(t_i^2 - t_{i+1}^2)\sin\mu_i$ et faisons la somme, il vient:

$$s\,\Sigma\,(t_i^2 - t_{i+1}^2)\sin\mu_i = \Sigma\,M_i\,(t_i + t_{i+1}),$$

où l'on a fait pour abréger

$$M_i = \frac{t_i - t_{i+1}}{2}\sin 2\mu_i + \frac{t_i^2 - t_i\,t_{i+1} + t_{i+1}^2}{3}(1 - \cos 2\mu_i). \tag{3}$$

En comparant cette formule avec la dernière équation de la page 24, on trouve

$$s\,(s - \sigma) = \frac{1}{3}\frac{\Sigma\,M_i\,(t_i + t_{i+1})}{\Sigma\,(t_i + t_{i+1})}. \tag{4}$$

Nous allons examiner de plus près la quantité M_i afin de déterminer pour elle une limite supérieure. Posons pour simplifier,

$$A = \frac{t_i - t_{i+1}}{2}, \quad B = \frac{t_i^2 - t_i\,t_{i+1} + t_{i+1}^2}{3},$$

en sorte que

$$M_i = A\sin 2\mu_i - B\cos 2\mu_i + B.$$

Puisque

$$(A \sin 2\mu_i - B \cos 2\mu_i)^2 = A^2 + B^2 - (A \cos 2\mu_i + B \sin 2\mu_i)^2,$$

on aura, quel que soit μ_i,

$$M_i < \sqrt{A^2 + B^2} + B.$$

On a d'ailleurs, en désignant par t le plus grand des deux segments t_i, t_{i+1} et observant que l'autre est $> \frac{t}{2}$,

$$|A| < \frac{t}{4}, \quad B < \frac{t^2}{3}$$

et par suite, à fortiori,

$$M_i < \sqrt{\frac{t^2}{16} + \frac{t^4}{9}} + \frac{t^2}{3}.$$

Pour $t = 2$ le second membre de cette inégalité se réduit à $\frac{\sqrt{73} + 8}{6}$, quantité qui est inférieure à $\frac{17}{6}$. Pour des valeurs plus petites de t le second membre devient encore moindre. On pourrait en resserrer la limite davantage, mais il nous suffit de savoir qu'on aura constamment $M_i < 3$, tant qu'aucun des segments $t_1, t_2, \ldots t_n$ n'est supérieur à 2.

A cette condition on aura donc aussi

$$\Sigma M_i (t_i + t_{i+1}) < 3 \Sigma (t_i + t_{i+1})$$

et l'équation (4) donnera $s(s - \sigma) < 1$, ou

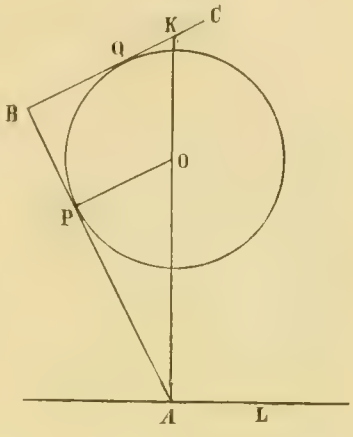
$$s - \frac{1}{s} < \sigma.$$

En observant que $s - \frac{1}{s}$ est l'ordonnée du point G, comptée à partir de l'axe L, tandisque σ représente l'ordonnée du centre de gravité du polygone central, l'inégalité précédente nous dit que ces deux points sont distincts, et fait ainsi conclure à l'impossibilité du maximum dans l'hypothèse actuelle, c'est-à-dire lorsque tous les segments t_i sont inférieurs à 2.

Or, on peut démontrer facilement que si le nombre n des côtés du polygone est supérieur à 3, aucune des quantités $t_1, t_2, \ldots t_n$ ne peut atteindre la valeur 2. Soient, en effet, AB et BC (Fig. 4) deux côtés consécutifs du polygone et admettons que l'extrémité A du premier se trouve sur l'axe L même et que $AP = 2$. On aura alors $PB = BQ = 1$ et l'angle B sera 90^0. Si l'on

prolonge la droite AO jusqu'à ce qu'elle rencontre le côté BC en un point K, les triangles ABK et APO seront conformes, d'où il résulte que $BK : IO = BA : PA$, c'est-à-dire $BK : 1 = 3 : 2$, ou $BK = \frac{3}{2}$. Mais BC est $> \frac{3}{2}$, puisque $BQ = 1$ et $QC > \frac{1}{2}$. Donc le point C doit se trouver sur le prolongement de la droite BK, en sorte que les deux côtés AB et BC du polygone, vus du centre, embrassent ensemble plus d'une demi-circonférence. Il en est de même des deux côtés consécutifs qui, partant de A, suivent l'autre côté du cercle. Ainsi ces quatre côtés sous-tendraient ensemble un angle au centre supérieur à 360^0.

Fig. 4.



Si l'extrémité A du premier côté, au lieu de se trouver sur l'axe L, était située au-dessus de lui, on aurait, en supposant $AP = 2$, $PB = BQ > 1$, $QC > \frac{1}{2}$, et ce que nous venons de prouver à l'égard de la somme des angles au centre, aurait lieu à plus forte raison.

Il est donc bien certain que si le polygone central est un quadrilatère, aucun des segments $t_1, t_2, t_3 \ldots$ ne peut atteindre et encore moins surpasser la valeur 2; et à plus forte raison cela ne peut avoir lieu, si le nombre des côtés n est > 4.

D'après cela nous sommes autorisé à conclure qu'une figure prismatique à plus de trois faces latérales ne peut satisfaire aux conditions du maximum, tant que l'intersection L des bases se trouve à distance finie. Pour qu'elle puisse être maximale, il faut que s soit infini, c'est à dire que les deux bases du prisme soient parallèles. Cela étant, la figure rentre dans un cas déjà examiné.

Les raisonnements qui précèdent, ne s'appliquent pas au cas où $n = 3$. Mais comme ce cas a déjà été discuté, nous n'avons pas à y revenir.

En résumé: *Parmi les figures prismatiques circonscrites à une sphère et ayant un nombre de côtés quelconque, le prisme régulier est la seule dont toutes les faces soient touchées par la sphère dans leurs centres de gravité respectifs.*

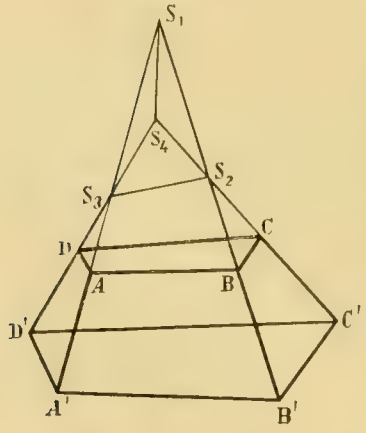
Les raisonnements précédents ne perdent rien de leur validité, quand même l'une des arêtes latérales s'évanouit, et ils prouvent que les faces de la figure prismatique ne sauraient dans ce cas être touchées par la sphère dans leurs centres de gravité, tant que $n > 3$. Mais il n'en est plus de même, lorsque $n = 3$, la figure se réduisant alors, par l'évanouissement d'une arête la-

térale, à une pyramide quadrangulaire, laquelle peut, aussi bien que le prisme triangulaire régulier, remplir les conditions dont il s'agit.

Hexaèdre dont toutes les faces sont des quadrilatères.

16. En prenant à volonté une paire de faces opposées pour bases, nous envisageons les quatre autres comme faces latérales et leurs plans comme plans latéraux. Sauf dans des cas particuliers, dont il sera question plus tard, ces quatre plans déterminent en général un tétraèdre. Quant à la disposition de celui-ci, il faut distinguer trois cas: 1) les quatre sommets du tétraèdre se trouvent tous au-delà de l'une des bases de l'hexaèdre en sorte que toutes les faces latérales de celui-ci convergent vers la même base; 2) trois des sommets se trouvent en dehors de l'une et le quatrième en dehors de l'autre base, ce qui veut dire que trois faces latérales convergent vers la première et une vers la seconde base; 3) les sommets du tétraèdre se trouvent deux à deux en dehors de chaque base, de manière que deux faces latérales opposées convergent vers l'une et les deux autres vers l'autre base. Considérant la sphère que nous supposons inscrite à l'hexaèdre, nous pouvons caractériser les différents cas d'une autre manière, en disant que dans le premier elle est ex-inscrite au tédraèdre formé par les quatre plans latéraux, de manière à en toucher deux faces intérieurement et les deux autres extérieurement; que dans le second cas elle est de même ex-inscrite au tétraèdre, mais de manière à toucher trois faces intérieurement et la quatrième extérieurement, et qu'enfin dans le troisième cas le tétraèdre est circonscrit à la sphère. Nous allons traiter ces cas successivement.

Fig. 5.



1:o *Le tétraèdre se trouve en entier au-delà de l'une des bases.* Soient $ABCD$ et $A'B'C'D'$ (fig. 5) les deux bases, l'une supérieure et l'autre inférieure, de l'hexaèdre et admettons que le tétraèdre $S_1 S_2 S_3 S_4$ formé par les plans latéraux se trouve en entier au-dessus de la base supérieure. Désignons par L l'intersection des deux bases et par l leur corde de contact avec la sphère inscrite. Ces deux droites constituent, comme on sait, une paire de polaires réciproques relativement à la sphère. La corde l étant prolongée au-dessus de la base supérieure entre dans l'espace

cunéiforme (pyramide triangulaire tronquée) limité par cette base et par les quatre plans latéraux, et pour en sortir de nouveau elle doit nécessairement traverser un de ces derniers plans en un point P. Désignons par F la face latérale dont c'est le plan, et par f son point de contact avec la sphère. Quant au point P, nous faisons remarquer qu'il est pôle du plan mené par L et f. En effet ce pôle doit se trouver sur la polaire réciproque de L, qui est la corde l, et en même temps sur le plan polaire du point f, c'est-à-dire sur le plan F. Il en résulte que les deux plans menés par L dont l'un passe par P et l'autre par f, sont conjugués harmoniques par rapport aux deux bases de l'hexaèdre. Or le plan LP rencontre évidemment les prolongements ascendants des arêtes latérales de la face F, puisqu'il passe entre la base supérieure et le point de rencontre S de ces arêtes, à moins qu'il ne passe par ce point même. D'après le théorème du n^0 6 on peut en conclure que le point de contact f ne peut être en même temps centre de gravité du quadrilatère F.

Nous avons supposé tacitement que les deux bases de l'hexaèdre se rencontrent à distance finie. Si elles étaient parallèles, les deux plans conjugués harmoniques passant par P et f seraient aussi parallèles avec eux, mais la démonstration précédente n'en serait pas autrement affectée.

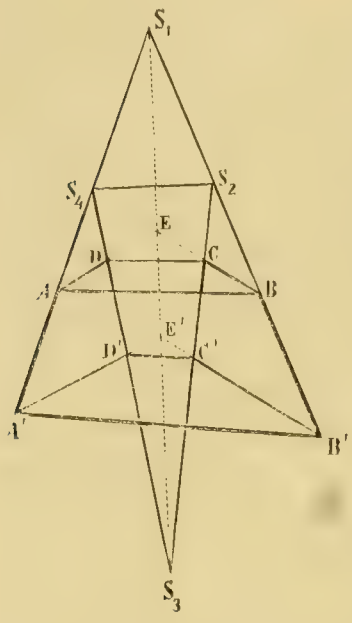
Il est donc impossible que toutes les faces latérales de la figure considérée soient touchées en leurs centres de gravité respectifs par la sphère inscrite, tant que les sommets du tetraèdre $S_1 S_2 S_3 S_4$, formé par leurs plans, sont tous à distance finie. Il en est de même encore si l'un ou deux seulement des sommets, tels que S_1 et S_1, s'éloignent à l'infini, pourvu que les autres restent à distance finie. Cela reviendrait à supposer qu'une face ou que deux faces opposées, telles que AB' et CD', eussent leurs arêtes latérales respectivement parallèles, ce qui ne changerait pas essentiellement les conditions du problème.

Pour que la condition dont il s'agit, relative aux centres de gravité des faces latérales, puisse être remplie, il faut donc que celles-ci soient toutes parallèles à une même droite, c'est-à-dire que la figure soit prismatique, ce qui ramène la question à un cas déjà examiné.

2:o. *Trois sommets du tétraèdre se trouvent en dehors de l'une des bases et le quatrième en dehors de l'autre.* — Soient $S_1 S_2 S_3 S_4$ (fig. 6) le tétraèdre formé par les quatre plans latéraux et supposons que les trois sommets S_1, S_2, S_4 se trouvent au-dessus de la base supérieure $ABCD$ et le quatrième S_3 au-dessous de la base inférieure $A'B'C'D'$. Les plans des deux bases doivent nécessairement couper la droite $S_1 S_3$ en certains points E, E', puisqu'ils passent l'un et l'autre, d'après l'hypothèse, entre les sommets S_1 et S_3. Quant à leur intersec-

tion L, elle peut rencontrer la droite $S_1 S_3$ en un point T ou passer à l'intérieur d'elle, entre cette droite et la face CD', ou bien extérieurement au trièdre (S_1), c'est-à-dire à l'angle solide formé par les trois plans latéraux qui se croisent en S_1. Nous pouvons laisser de côté les deux premiers cas, parce que dans l'un et l'autre, en considérant les faces AB' et CD' comme bases de l'hexaèdre, on aurait affaire à une figure dont les autres faces convergent vers l'une de celles-ci (CD') et qui rentre, par conséquent, dans la forme que nous venons de traiter. Il suffit donc d'examiner le cas où la droite L est extérieure au trièdre (S_1).

Fig. 6.

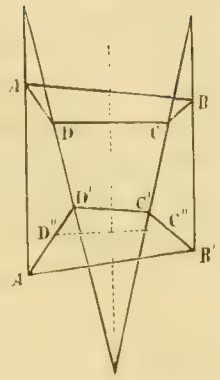


Cela posé, soit l la corde de contact de la sphère avec les deux bases $AC, A'C'$. Prolongée au-dessus de la base supérieure cette corde doit évidemment rencontrer un des trois plans latéraux qui se croisent au sommet S_1, en un point P situé entre ce sommet et le plan AC. Supposons que ce soit le plan de la face BC' et désignons par f le point de contact de cette face avec la sphère. Si l'on mène par la droite L deux plans dont l'un passe par P et l'autre par f, ces plans formeront avec les deux bases un faisceau harmonique. Or, dans le cas actuel, la droite L étant extérieure au trièdre (S_1), le plan LP rencontre nécessairement les trois arêtes de ce trièdre au-dessus de la base supérieure et par conséquent le prolongement ascendant au moins de l'une des arêtes latérales de la face BC', d'où il résulte que le point de contact f ne peut pas être en même temps centre de gravité de cette face. Si le point P se trouvait sur un des deux autres plans du trièdre, on prouverait de même que la face latérale correspondante de l'hexaèdre ne pourrait pas être touchée par la sphère en son centre de gravité. Cela n'est donc pas possible pour toutes les trois faces dont il s'agit, à moins que le sommet S_1 ne s'éloigne à l'infini, de sorte que les trois faces deviennent parallèles à la corde l. Dans ce cas le plan mené par la droite L perpendiculairement à la même corde divise en parties égales l'angle dièdre formé par les deux bases.

Admettons que cela a lieu et menons par CD (fig. 7) un plan parallèle à la corde l. Ce plan coupera la base inférieure suivant une droite $C''D''$ parallèle à $C'D'$ de manière que le quadrilatère $A'B'C''D''$ sera égal et conforme à

la base supérieure $ABCD$. A cause de leur position symétrique ces deux figures auront leurs centres de gravité sur une même droite parallèle à la corde l. Pour que les centres de gravité des deux bases puissent coïncider avec leurs points de contact avec la sphère, lesquels se trouvent sur la corde l, il faudrait donc que la base inférieure $A'B'C'D'$ et le quadrilatère $A'B'C''D''$ eussent le même centre de gravité, ce qui est évidemment impossible, à moins que $C''D''$ ne coïncide avec $C'D'$, c'est-à-dire que la figure considérée soit prismatique et par conséquent se réduise à un cube.

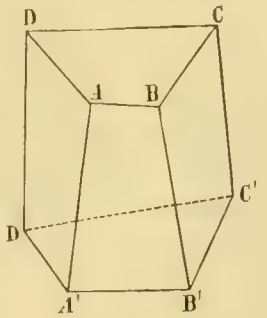
Fig. 7.



3:o. *Deux sommets du tétraèdre se trouvent en dehors de l'une des bases et les deux autres en dehors de l'autre.* — C'est ce qui arrive, lorsque le tétraèdre, formé par les plans latéraux, est circonscrit à la même sphère que la figure donnée. Celle-ci fait alors partie du tétraèdre, dont elle est taillée moyennant deux plans qui en détachent deux arêtes opposées et qui forment les bases de l'hexaèdre.

Désignons toujours par $ABCD$ (fig. 8) la base supérieure et par $A'B'C'D'$ la base inférieure de l'hexaèdre. Dans le cas actuel une paire de faces latérales opposées, soit AB' et CD', convergent vers la base supérieure et l'autre paire, BC' et DA', vers la base inférieure. Nous devons admettre que la figure a une disposition analogue relativement à une autre paire quelconque de faces opposées, prises pour bases, c'est à dire que des quatre autres faces de l'hexaèdre deux opposées convergent vers l'une de ces bases et les deux autres vers l'autre. Car s'il en était autrement et qu'il existât une paire de bases telle, que les quatre autres faces ou trois d'entre elles convergeassent vers l'une de ces bases, on aurait affaire à un des cas déjà examinés.

Fig. 8.



En admettant que l'hexaèdre est circonscrit à une sphère et que les points de contact de toutes ses faces coïncident avec leurs centres de gravité respectifs, il s'agit d'examiner ce qui en résulte pour la forme de la figure. Imaginons des droites joignant les sommets de chaque face avec son centre de gravité et qui la partagent ainsi en quatre triangles barycentriques. Deux faces adjacentes ont toujours deux de ces triangles égaux et semblables, à savoir ceux qui ont leur intersection pour base commune.

Désignons par a, b, α, α' les triangles barycentriques de la face latérale AB' qui ont pour bases respectivement les arêtes AA', BB', AB et $A'B'$. Dans la face latérale BC' les triangles correspondants seront désignés par b, c, β, β', dans la face CD' par c, d, γ, γ' et dans la face DA' par d, a, δ, δ'. Dès lors les triangles barycentriques de la base supérieure seront $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et ceux de la base inférieure $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$. Cela posé, on aura (d'après l'équ. (3), p. 13) entre les différents triangles barycentriques les relations suivantes:

$$(1)\qquad \begin{aligned} a^2 + b^2 - ab &= \alpha^2 + \alpha'^2 - \alpha\alpha', \\ b^2 + c^2 - bc &= \beta^2 + \beta'^2 - \beta\beta', \\ c^2 + d^2 - cd &= \gamma^2 + \gamma'^2 - \gamma\gamma', \\ d^2 + a^2 - da &= \delta^2 + \delta'^2 - \delta\delta', \end{aligned}$$

et encore

$$(2)\qquad \begin{aligned} \alpha^2 + \gamma^2 - \alpha\gamma &= \beta^2 + \delta^2 - \beta\delta, \\ \alpha'^2 + \gamma'^2 - \alpha'\gamma' &= \beta'^2 + \delta'^2 - \beta'\delta'. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que les faces antérieure et postérieure (AB' et CD') convergent vers la base supérieure et celles de droite et de gauche (BC' et DA') vers la base inférieure; cela nous donnera les inégalités

$$\alpha' > \alpha, \quad \gamma' > \gamma, \quad \beta > \beta', \quad \delta > \delta'.$$

Admettons de plus que des faces AB', CD', AC, $A'C'$ les deux premières convergent vers la droite (c'est à dire vers BC') et les deux autres vers la gauche (= vers DA'), on aura en outre

$$a > b, \quad d > c, \quad \beta > \delta, \quad \beta' > \delta'.$$

Supposons enfin que des quatre faces BC', DA', AC, $A'C'$ les deux premières convergent vers l'arrière (= vers CD') et les deux autres vers le devant (= vers AB'), on aura encore

$$b > c, \quad a > d, \quad \gamma > \alpha, \quad \gamma' > \alpha'.$$

A la limite, c'est-à-dire lorsque deux arêtes opposées d'une face, au lieu de concourir, deviennent parallèles, l'inégalité correspondante des triangles barycentriques se change en égalité.

Comparés entre eux, les trois groupes d'inégalités qui précèdent, peuvent être résumés par les formules suivantes:

$$a > b > c, \quad a > d > c,$$
$$\beta > \delta > \delta', \quad \beta > \beta' > \delta',$$
$$\gamma' > \alpha' > \alpha, \quad \gamma' > \gamma > \alpha,$$

en sorte que a est la plus grande et c la plus petite des quantités a, b, c, d, que β est la plus grande et δ' la plus petite dans le groupe $\beta, \delta, \beta', \delta'$ et qu'enfin γ' est la plus grande et α la plus petite parmi les quantités $\alpha, \gamma, \alpha', \gamma'$, tandis que dans chacun de ces groupes la grandeur relative des deux termes moyens reste indécise.

Considérons maintenant les deux premières des équ. (1). A cause de l'inégalité $a > b > c$, on a $a^2 + b^2 - ab > b^2$ et $b^2 + c^2 - bc < b^2$ et par suite $a^2 + b^2 - ab > b^2 + c^2 - bc$. On a donc aussi, eu égard aux équations dont il s'agit,

$$\alpha^2 + \alpha'^2 - \alpha\alpha' > \beta^2 + \beta'^2 - \beta\beta'.$$

En retranchant de cette inégalité, membre à membre, la seconde des équations (2)

(3) $$\alpha'^2 + \gamma'^2 - \alpha'\gamma' = \beta'^2 + \delta'^2 - \beta'\delta',$$

il vient

$$(\alpha - \gamma')(\alpha + \gamma' - \alpha') > (\beta - \delta')(\beta + \delta' - \beta').$$

Or, les inégalités précédentes font voir que les facteurs $\alpha + \gamma' - \alpha'$ et $\beta + \delta' - \beta'$ sont essentiellement positifs, le premier étant $> \alpha$ et le second $> \delta'$. Les signes des deux membres de la dernière formule dépendent donc des facteurs $\alpha - \gamma'$ et $\beta - \delta'$, dont le premier est négatif et le second positif. D'après cela cette formule impliquerait une contradiction évidente. Pour la faire disparaître, le seul moyen est de supposer $\alpha = \gamma'$ et $\beta = \delta'$, ce qui entraine les égalités plus générales

$$\alpha = \alpha' = \gamma = \gamma' \text{ et } \beta = \beta' = \delta = \delta'.$$

Celles-ci admises, l'équation (3) exige en outre que $\alpha' = \beta'$ et que, par suite, les huit triangles barycentriques $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$ soient tous égaux. Sans aller plus loin, nous pouvons en conclure déjà que les arêtes latérales doivent toutes être parallèles, c'est-à-dire que la figure doit être prismatique; et comme elle ne saurait alors satisfaire aux conditions du maximum sans être régulière (p. 27), il faut qu'elle soit un cube.

Ainsi il est démontré que *parmi les hexaèdres à faces quadrangulaires circonscrits à une sphère, le cube est le seul dont toutes les faces soient touchées par celle-ci dans leurs centres de gravité respectifs.*

Autres formes hexaédriques.

17. Outre les hexaèdres qui appartiennent aux classes de solides examinées jusqu'ici (pyramides simples, pyramides doubles, hexaèdres à faces quadrangulaires), il en existe encore quelques autres formes moins régulières, que nous allons passer en revue.

a) *Figure limitée par quatre quadrilatères et deux triangles.* — Une telle figure peut être regardée comme cas limite d'un hexaèdre à faces quadrangulaires, dont elle résulte par la suppression d'une arête. Elle présente, relativement à la disposition des plans latéraux, les mêmes particularités que celui-ci et on peut lui appliquer sans changements essentiels les raisonnements du n° précédent, afin de prouver qu'elle ne saurait être maximale.

Supposons d'abord que la figure considérée dérive d'un hexaèdre de la première espèce (fig. 5) par la suppression d'une arête. Cela pourrait être une arête latérale, telle que AA', ou bien un côté de la base supérieure, soit AD. Dans le premier cas les faces AB' et DA' se réduiraient à des triangles et il n'y aurait du reste rien de changé. La corde de contact des bases devrait toujours rencontrer le plan de l'une des faces latérales au-dessus de la base supérieure et il en résulterait l'impossibilité que cette face fût touchée par la sphère en son centre de gravité. Dans le second cas les points A, D et S_3 se confondraient en un seul. L'espace cunéiforme situé au-dessus de la base supérieure et dont S_2S_3 est l'arête, se changerait en une pyramide triangulaire, d'où la corde de contact l ne pourrait sortir sans rencontrer un des trois plans latéraux AB', BC', CD', ce qui ferait conclure, comme auparavant, à l'impossibilité du maximum.

Supposons maintenant que l'hexaèdre dont on a supprimé une arête, appartienne à la seconde espèce, représentée par la fig. 6. Cette arête ne pourrait être que le côté $C'D'$ de la base inférieure, ou une arête latérale, telle que AA' ou BB' [1]), ou encore un des côtés AD ou BC de la base supérieure. La suppression du côté $C'D'$ n'affecterait en rien la démonstration précédente. Si les points A et A' venaient à se confondre, les faces latérales AB' et DA' se réduiraient à des triangles; l'intersection des bases L, passant alors par A, serait du reste extérieure au trièdre (S_1), de sorte qu'un plan mené par L et

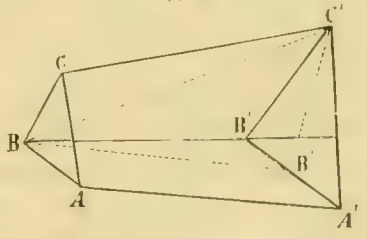
[1]) Si l'une des arêtes CC' ou DD' s'évanouissait, on retomberait, en prenant AB' pour base inférieure, sur le cas précédent.

par le point P où la corde de contact l rencontre la surface de ce trièdre, couperait nécessairement, entre autres, les prolongements supérieurs des arêtes $D'D$ et $B'B$ appartenant aux deux faces triangulaires. En tenant compte de cette remarque, on pourrait du reste se servir du même raisonnement que précédemment. Enfin si les points A, D et par suite aussi S_1 coïncidaient, ce qui changerait la base supérieure et la face AD' en triangles, on aurait toujours à supposer l'intersection L extérieure au trièdre (S_1) (puisqu'on aurait sans cela, en prenant la face AB' pour base inférieure, affaire à une variété du premier cas (fig. 5)) et l'on verrait que si le point P tombait sur le plan de la face triangulaire AD', le plan LP couperait au moins le prolongement supérieur de l'arête $A'A$ de cette face, ce qui suffirait pour prouver que le centre de gravité de celle-ci ne saurait alors coïncider avec son point de contact. Le reste de la démonstration serait le même qu'auparavant.

Admettons enfin que la figure considérée constitue un cas particulier d'un hexaèdre de la troisième espèce, représentée par la figure (8); nous pouvons supposer qu'elle en résulte par la suppression de l'arête CC', ce qui ne contredit pas les hypothèses précédemment établies sur l'hexaèdre dont il s'agit. Nous aurons alors $c = 0, b = \beta = \beta', d = \gamma = \gamma'$; mais il n'y aura du reste rien à changer dans les relations qui existent entre les triangles barycentriques, et l'on en déduira, comme auparavant, l'égalité des huit triangles $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$. Or, il nous suffit des deux égalités $\alpha = \alpha'$ et $\delta = \delta'$ pour savoir que les trois arêtes AA', BB' et DD' sont parallèles. La figure se réduit donc à un tronc de prisme tétragonal, dont les deux bases ont un sommet commun, et nous savons déjà (p. 27) qu'une telle figure ne peut jamais satisfaire aux conditions du maximum.

b) *Figure limitée par deux quadrilatères et quatre triangles.* — On peut s'imaginer une telle figure taillée d'une pyramide triangulaire tronquée (fig. 9), en faisant passer par la diagonale BC' d'une face latérale un plan coupant l'arête $A'B'$ en un point B''. Admettons, s'il est possible, que la figure dont il s'agit, est circonscrite à une sphère et que celle-ci touche chacune des faces de la figure en son centre de gravité. Comme les quatre faces triangulaires ont deux à deux une arête commune, ils seront tous équivalents (n° 9) et il en sera de même des triangles barycentriques dont ils se composent. D'autre part, la face quadrangulaire $ABB''A'$ est entourée de trois faces triangulaires ABC,

Fig. 9.



$BB''C'$ et $A'B''C'$ de manière à avoir une arête commune avec chacune d'elles, d'où il suit qu'elle a trois triangles barycentriques équivalents. Mais dès lors le quatrième est aussi égal à chacun des trois autres (en vertu de l'équ. (3) p. 13) et la figure est un parallélogramme. Par une raison pareille l'autre face quadrangulaire $AA'C'C$ doit aussi être un parallélogramme, d'où il résulte que les arêtes BB'' et CC' sont parallèles et que les plans des faces triangulaires BCC' et $BC'B''$ doivent se confondre. Il est donc impossible que chacune d'elle puisse être touchée par la sphère en son centre de gravité. D'ailleurs la figure cesse d'être un hexaèdre. Par conséquent elle ne saurait remplir les conditions exigées.

c) *Figure limitée par deux pentagones, deux quadrilatères et deux triangles* et d) *figure limitée par un pentagone, deux quadrilatères et trois triangles.*

Dans ces deux figures la base pentagonale a une arête commune avec chacune des autres faces. Quant à la seconde figure, elle se déduit de la première par l'évanouissement d'une arête.

Quoiqu'il semble certain que ni l'une, ni l'autre de ces figures ne saurait satisfaire aux conditions du maximum, je n'ai pas jusqu'ici, malgré plusieurs tentatives, réussi à le démontrer d'une manière générale et rigoureuse. Je suis donc obligé de laisser à d'autres ce problème, qui paraît avoir un certain intérêt pour compléter la théorie des hexaèdres.

III. Conditions supplémentaires. Résultats définitifs.

18. Jusqu'ici nous nous sommes occupés de certaines classes de polyèdres uniquement dans le but de reconnaître lesquels d'entre eux possèdent la propriété d'être circonscrits à une sphère qui touche chacune de leurs faces en son centre de gravité. Cette propriété est, comme nous savons, une condition nécessaire pour qu'un polyèdre, étant donné le nombre et l'étendue totale des faces, ait le plus grand volume. Mais nous savons aussi qu'elle n'est pas toujours suffisante. On peut bien regarder l'existence du maximum comme évidente à priori, puisque le volume d'un corps dont la surface totale est donnée, ne peut pas croître au-dessus de toute limite, et si parmi les polyèdres, ayant un certain nombre de faces, il n'y avait qu'un seul qui satisfît à ladite condition, on aurait le droit de conclure immédiatement qu'il est un vrai maximum. C'est le cas des solides limités par quatre plans. Parmi eux il n'y

a, en effet, qu'un seul, le tétraèdre régulier, dont les faces soient touchées en leurs centres de gravité par la sphère inscrite. On peut donc, par cette seule raison, affirmer que celui-ci a plus grand volume que tout autre tétraèdre de même surface. Mais lorsque le nombre des faces n est supérieur à 4, il existe en général plusieurs polyèdres qui remplissent la condition dont il s'agit, et comme il est à présumer que pour chaque valeur de n il n'y a qu'un seul maximum, on est dès lors obligé de recourir à une analyse spéciale pour écarter les solutions étrangères. En supposant que les polyèdres soient circonscrits à une sphère donnée, il s'agit alors de rechercher lequel d'entre eux a soit le moindre volume, soit la moindre surface totale. C'est ce que nous allons faire, en nous bornant toutefois aux cas où le nombre des faces ne dépasse pas six.

Figures limitées par cinq plans.

19. Parmi les pentaèdres circonscrits à une sphère donnée il y en a deux qui satisfont à la condition relative au contact barycentrique des faces que doit remplir le polyèdre dont le volume est un minimum; ce sont le prisme triangulaire régulier dont la hauteur est le double de l'apothème de la base, et la pyramide régulière à base carrée dont la hauteur égale la diagonale de la base. En désignant par R le rayon de la sphère, on trouve pour les volumes de ces deux figures les valeurs suivantes:

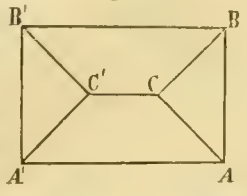
$$\text{volume du prisme} = 6\sqrt{3}\,R^3 = 10{,}392\,R^3,$$

$$\text{volume de la pyramide} = \frac{32}{3}\,R^3 = 10{,}667\,R^3.$$

La seconde figure ayant un plus grand volume que la première, on peut en inférer qu'elle n'est pas un vrai minimum et qu'il doit y en avoir quelque voie de déformation continue par laquelle on peut passer de la seconde figure à la première, tout en faisant décroître constamment le volume.

Afin d'établir une liaison de cette espèce entre les deux pentaèdres dont il s'agit, nous concevons une figure prismatique triangulaire (fig. 10), dont une face latérale AB' est rectangulaire et dont les quatre autres faces sont deux à deux égales et symétriquement inclinées sur elle. Nous admettons que cette figure est circonscrite à une sphère de rayon 1 et que ses deux bases $ABC, A'B'C'$ sont touchées par la sphère en leurs centres de gravité. Soit s la perpendiculaire abaissée du sommet C (ou C') sur la face

Fig. 10.



opposée AB'; on peut considérer s comme seul paramètre variable. Si les deux bases deviennent parallèles, la figure se change en un prisme droit à base équilatérale et l'on a $s = 3$. Si, au contraire, les sommets C, C' des deux bases coïncident, en sorte que la figure se tranforme en une pyramide régulière, on trouve $s = 4$. Lorsque la valeur de s varie continuellement de 3 à 4 ou vice versâ, la figure passe successivement de l'un de ces états limites à l'autre. Désignons en général par V le volume de la figure considérée. Pour une valeur quelconque de s, comprise entre les limites indiquées, on trouve

$$\frac{AB}{2} = \sqrt{\frac{s}{s-2}}, \qquad \frac{AA'}{2} = \sqrt{\frac{s}{6-s}}, \qquad \frac{CC'}{2} = (4-s)\sqrt{\frac{s}{6-s}},$$

et par suite

$$V = \frac{2AA' + CC'}{3} \cdot \frac{AB.s}{2} = \frac{2}{3} s^2 \sqrt{\frac{6-s}{s-2}}.$$

En prenant la dérivée logarithmique des deux membres, on en tire

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{ds} = \frac{2}{s} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6-s} + \frac{1}{s-2}\right) = \frac{2(s-3)(4-s)}{s(s-2)(6-s)}.$$

Cette expression s'évanouit tant pour $s = 3$ que pour $s = 4$, mais entre ces limites elle reste constamment positive, ce qui prouve que le volume croît continuellement à partir de la valeur qui correspond à $s = 3$, c'est-à-dire de $V = 6\sqrt{3}$, à celle qui correspond à $s = 4$ et qui est $V = \frac{32}{3}$. On voit par là que la première valeur seule peut être un vrai minimum, mais que le second ne l'est pas. Ainsi il est démontré que de tous les pentaèdres circonscrits à une sphère donnée le prisme triangulaire régulier a le moindre volume. Et comme le minimum dans ces conditions correspond à un maximum de volume, étant donnée la surface du polyèdre (n° 1), ce résultat nous permet de formuler la proposition suivante:

Parmi les pentaèdres de surface totale équivalente le prisme triangulaire régulier circonscriptible à une sphère, c'est-à-dire dont la hauteur est le double de l'apothème de la base, a le plus grand volume.

C'est là un des théorèmes les plus simples qui se rattachent aux recherches célèbres de M. Steiner, mais dont la démonstration complète n'avait pas été donnée jusqu'ici.

Figures limitées par six plans.

20. Parmi ces figures nous avons rencontré précédemment trois qui jouissent de la propriété d'être circonscrites à une sphère qui touche leurs faces dans leurs centres de gravité respectifs; ce sont: 1) le cube, 2) la pyramide pentagonale régulière dont la hauteur est le quadruple du rayon de la sphère inscrite, et 3) la double-pyramide trigonale régulière ayant deux angles solides tri-rectangles. Les volumes de ces trois figures, en prenant le rayon de la sphère pour unité linéaire, sont respectivement: pour le cube $V = 8$, pour la pyramide simple $V = \frac{40}{3} \operatorname{tang} 36^0 = 9.687\ldots$ et pour la pyramide double $V = 9$. Cette comparaison fait voir déjà que ni la pyramide simple, ni la pyramide double ne représente un minimum absolu parmi les hexaèdres circonscrits à une sphère donnée. Mais il reste à examiner si l'une ou l'autre est un minimum relativement aux figures voisines qui s'en déduisent par un déplacement très petit sur la sphère des points de contact des plans limites.

Considérons en général une pyramide régulière de n côtés ayant la propriété relative aux centres de gravité des faces que nous venons de signaler. Soit s la hauteur de la pyramide, h celle d'un triangle latéral, a la longueur d'une arête latérale, b le côté et p l'apothème de la base; on obtient successivement

$$s = 4\,, \qquad p = \sqrt{2}\,, \qquad h = 3\sqrt{2}\,,$$

$$b = 2\sqrt{2} \operatorname{tang} \frac{\pi}{n}\,, \qquad a = \sqrt{18 + 2 \operatorname{tang}^2 \frac{\pi}{n}}.$$

Désignons par β l'angle dièdre formé par une face latérale avec la base et par σ l'angle extérieur de deux faces latérales contiguës; on trouve encore

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{s}{p} = 2\sqrt{2}\,,$$

$$\operatorname{tang} \frac{\sigma}{2} = \frac{bh}{3a} = \frac{4 \operatorname{tang} \frac{\pi}{n}}{a}\,,$$

d'où

$$\cot \sigma = \frac{9 - 7 \operatorname{tang}^2 \frac{\pi}{n}}{4a \operatorname{tang} \frac{\pi}{n}}.$$

Cela posé, faisons rouler un des plans latéraux sur la sphère de manière que le point de contact se déplace suivant un méridien d'un arc infiniment petit ε, et proposons nous d'évaluer le changement qui en résulte pour le volume de la figure donnée. Ce mouvement peut se décomposer en deux autres: 1:o une rotation d'un angle ε autour d'un axe parallèle à la base, passant par le centre de gravité de la face latérale déterminée par le plan dont il s'agit, et 2:o une translation du plan parallèlement à lui même d'une quantité $\frac{\varepsilon^2}{2}$ vers l'extérieur. Or, il est facile de voir que par le premier de ces déplacements le volume diminue, quel que soit le sens de la rotation, d'une quantité dont l'expression, en négligeant des infiniment petits d'un ordre supérieur à 2, est

$$(2a\cot\sigma - b\cot\beta)\frac{h^2}{18}\varepsilon^2 = \frac{9\left(1-\operatorname{tang}^2\frac{\pi}{n}\right)}{2\operatorname{tang}\frac{\pi}{n}}\cdot$$

Par le second déplacement il augmente au contraire de

$$\frac{hb}{2}\cdot\frac{\varepsilon^2}{2} = 3\operatorname{tang}\frac{\pi}{n}\cdot\varepsilon^2\,.$$

L'accroissement total du volume, dû à ces deux déplacements, sera donc

$$\Delta V = \frac{15\operatorname{tang}^2\frac{\pi}{n} - 9}{2\operatorname{tang}\frac{\pi}{n}}\cdot\,^{1})$$

---

[1]) Pour un déplacement quelconque très petit cc' du point de contact c d'une face latérale A de la pyramide dont il s'agit, la variation du volume devient, en négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur à 2,

$$\Delta V = M\xi^2 + N\eta^2,$$

où l'on a désigné par ξ et η les projections de cc' sur deux axes rectangulaires situés dans le plan A et passant par le point c, dont l'un est parallèle à la base et l'autre est dirigé vers le sommet de la pyramide, les coefficients M et N ayant les valeurs suivantes:

$$M = \frac{3\left(\operatorname{tang}\frac{\pi}{n} + \operatorname{tang}^3\frac{\pi}{n}\right)}{2}, \qquad N = \frac{15\operatorname{tang}^2\frac{\pi}{n} - 9}{2\operatorname{tang}\frac{\pi}{n}}.$$

De ces deux coefficients le premier est toujours positif, tandis que le second devient négatif pour $n > 4$.

Cette expression est positive ou négative, suivant que $\operatorname{tang}\frac{\pi}{n}$ est $>$ ou $<\sqrt{\frac{3}{5}}$, c'est-à-dire suivant que $\frac{\pi}{n}$ est $>$ ou $< 37^0\,45'.7$. Ainsi elle est certainement négative pour toute valeur de l'entier n supérieure à 4. Une pyramide circonscrite à une sphère et dont la base a plus de quatre côtés, peut donc toujours être déformée en un polyèdre de même nombre de faces, circonscrit à la même sphère et ayant moindre volume que la pyramide donnée. Nous avons vu précédemment (n^0 19) qu'il en est de même d'une pyramide quadrangulaire. Il n'y a donc parmi les pyramides circonscrites à une sphère donnée que le tétraèdre régulier qui soit un vrai minimum. Il en résulte, en particulier, qu'il faut exclure la pyramide pentagonale, lorsqu'il s'agit de trouver le maximum d'un hexaèdre à surface donnée.

21. Quant à la pyramide double, on peut démontrer en général et sans aucun calcul qu'une telle figure, supposée circonscrite à une sphère, ne saurait jamais, quel qu'en soit le nombre des faces, avoir moindre volume que tout autre polyèdre voisin ayant le même nombre de faces et circonscrit à la même sphère.

Considérons en effet une double pyramide régulière dont les $2n$ faces sont touchées dans leurs centres de gravité respectifs par la sphère inscrite. Soient P et P' les deux pyramides simples, chacune de n côtés, dont elle est composée. Concevons que, P' restant invariable, la pyramide P tourne autour de l'axe commun des deux pyramides d'un angle ω inférieur à $\frac{2\pi}{n}$. Les deux bases, tout en restant dans le même plan, ne coïncideront plus; les sommets $A, B, C\ldots$, appartenant à la pyramide P, se trouveront à l'extérieur de la figure P', et réciproquement les sommets $A', B' C', \ldots$ de la seconde pyramide seront extérieurs à la première. En prolongeant les plans latéraux de la figure P', chacun d'eux détachera de la figure P une petite pyramide triangulaire ayant pour sommet un des points $A, B, C, \ldots$, et inversement les plans latéraux de la figure P détacheront de la figure P' des pyramides ayant pour sommets respectifs les point $A', B', C', \ldots$ Le polyèdre se trouvera ainsi diminué des $2n$ petites pyramides detachées, qui seront d'ailleurs toutes égales entre elles. Ajoutons que chacune de ces pyramides croîtra évidemment à partir de 0 jusqu'à une certaine limite, lorsque ω varie de 0 à $\frac{\pi}{n}$, et diminuera ensuite jusqu'à 0, quand ω varie de $\frac{\pi}{n}$ à $\frac{2\pi}{n}$. Il en résulte que la pyramide double, comparée à d'autres polyèdres

de même nombre de faces et circonscrits à la même sphère, n'est pas un minimum. Par la déformation que nous venons d'indiquer, elle diminue, en effet, continuellement jusqu'à une certaine valeur, qu'elle acquiert lorsque $\omega = \frac{\pi}{n}$.

Considérons en particulier la double-pyramide régulière formée par deux trièdres tri-rectangles. Si l'on fait tourner l'un de ces trièdres de 60^0, ses faces deviendront respectivement parallèles à celles de l'autre trièdre et la figure se réduira à un cube.

D'après cela il ne reste des trois espèces de figures régulières à six faces, relevées plus haut, que le cube qui, étant donnée sa surface totale, puisse être un vrai maximum, et l'on ne saurait douter qu'il ne le soit en effet. Mais pour en avoir la démonstration complète, il faudrait encore prouver que parmi les hexaèdres que nous avions du omettre dans notre recherche préliminaire (p. 36), à savoir ceux qui comptent parmi leurs faces deux pentagones ou un pentagone et un quadrilatère, il n'y a aucun qui, étant circonscrit à une sphère, soit touché par elle aux centres de gravité de ses faces respectives. Tant que cette preuve fait défaut, il reste une lacune regrettable dans la théorie des maxima et minima des hexaèdres.

Remarques sur les octaèdres.

22. Si l'on rencontre parmi les hexaèdres des formes dont la discussion présente des difficultés sérieuses, celles-ci augmentent encore considérablement lorsque le nombre des faces devient plus grand. Pour les octaèdres la variété et la complication des formes est déjà si grande, qu'on doit renoncer à l'idée d'une recherche complète de leurs maxima et minima. C'est pourquoi nous devons nous borner à quelques observations relatives aux cas les plus simples.

Parmi les figures examinées précédemment nous avons rencontré quatre espèces d'octaèdres qui jouissent de la propriété d'être circonscrits à une sphère touchant leurs faces dans leurs centres de gravité. Ce sont: 1) la pyramide heptagonale régulière dont la hauteur est le quadruple du rayon de la sphère; 2) une double-pyramide triangulaire tronquée; 3) le prisme hexagonal régulier dont la hauteur est le double de l'apothème de la base, et 4) l'octaèdre régulier. En prenant pour unité linéaire le rayon de la sphère et comparant entre eux les volumes de ces quatre figures, qui sont alors:

pour la pyramide simple . . . . $\frac{56}{3}\operatorname{tang}\frac{\pi}{7} = 8.9894\ldots$,

„ la double-pyramide tronquée . $\sqrt{3}\,(2+\sqrt{7}) = 8.0467\ldots$,

„ le prisme . . . . . $4\sqrt{3} = 6.9282\ldots$,

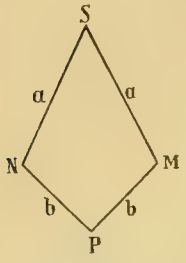
„ l'octaèdre régulier . . . . $4\sqrt{3} = 6.9282\ldots$,

on voit tout d'abord que les deux premières figures ne sauraient entrer en ligne de compte, lorsqu'il s'agit de trouver le plus petit octaèdre circonscrit à une sphère donnée. En effet, nous savons déjà (n^0 20) qu'une pyramide circonscrite à une sphère et dont la base a plus de trois côtés, est toujours susceptible d'une déformation qui en diminue le volume, et nous verrons tout à l'heure (n^0 24) qu'il en est de même d'une double-pyramide tronquée. Considérant ensuite le prisme et l'octaèdre régulier, il y a une chose qui attire l'attention, c'est qu'étant circonscrites a une sphère donnée, ces deux figures ont exactement le même volume, ce qui fait penser que ni l'une ni l'autre n'est un vrai minimum. Ce résultat peut paraître un peu inattendu, surtout à l'égard de l'octaèdre, qui appartient au groupe des cinq polyèdres réguliers, parce qu'on serait sans doute tenté à admettre à priori qu'un tel polyèdre dût se rapprocher de la sphère inscrite, quant à son volume, plus que tout autre polyèdre d'un même nombre de faces. On se l'explique cependant en observant que l'octaèdre régulier appartient à la classe des doubles-pyramides régulières, et en se rappelant qu'une telle figure peut toujours être déformée, si l'on en fait tourner l'une des moitiés autour de l'axe, en une autre de même nombre de faces mais de moindre volume [1]).

23. Nous allons étudier de plus près cette tranformation. Considérons, en général, une double pyramide régulière Π de $2n$ faces, touchées en leurs centres de gravité par la sphère inscrite au rayon 1, et imaginons-nous qu'on fasse tourner l'une des pyramides simples dont elle se compose, d'un angle $\frac{\pi}{n}$ autour de l'axe de la figure. Dans cette nouvelle position les plans tangents détermineront un nouveau polyèdre Π^* également de $2n$ faces, qui sont encore égales et conformes. Chacune d'elles est un quadrilatère ayant deux paires de

[1]) Nous apprenons par là qu'il faut se garder de donner une trop grande extension au théorème énoncé par M. Steiner (Journal de Crelle, vol. XXIV p. 230) dans les termes suivants: „Parmi tous les corps de sa classe l'octoèdre régulier a le plus grand volume, la surface étant donnée, et la plus petite surface, le volume étant donné". La „classe" ne doit comprendre ici que les doubles-pyramides quadrangulaires.

Fig. 11.



cotés égaux $SM = SN = a$ et $PM = PN = b$ (fig. 11). S est l'une des extrémités de l'axe; soit S' l'autre extrémité et posons $SS' = 2s$; on aura $s = \sqrt{3}$. Les n arêtes qui partent de S, ainsi que les n autres qui partent de S', sont toutes égales à a, mais situées dans des plans méridionaux différents, les plans qui contiennent les n premières arêtes divisant par moitié les angles dièdres des plan diamétraux qui contiennent les n dernières. Les extrémités des arêtes a sont réunies deux à deux par les arêtes b au nombre de $2n$, qui forment un contour en zig-zag autour de la figure.

Désignons par d la diagonale SP, par α et φ respectivement les angles que les droites a et d font avec l'axe SS', et par 2ϑ l'angle MSN; le triangle SPS', dans lequel le côté PS' est $= a$ et les angles $S = \varphi$, $S' = \alpha$, donnera

$$a \sin\alpha = d \sin\varphi ,$$

$$a \cos\alpha + d \cos\varphi = 2s ,$$

d'où

$$\frac{a}{\sin\varphi} = \frac{d}{\sin\alpha} = \frac{2s}{\sin(\alpha + \varphi)}$$

et par suite

$$a = \frac{2s \sin\varphi}{\sin(\alpha + \varphi)} ,$$

$$d = \frac{2s \sin\alpha}{\sin(\alpha + \varphi)} .$$

Cherchons à déterminer le centre de gravité G du quadrilatère $SMPN$. Il est évidemment situé sur la diagonale SP et l'on trouve

$$SG = \frac{a \cos\vartheta + d}{3} = \frac{2s (\sin\varphi \cos\vartheta + \sin\alpha)}{3 \sin(\alpha + \varphi)} .$$

On a d'ailleurs, comme pour la double-pyramide maximale (n° 11), les angles φ, α, ϑ restant invariables,

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} , \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{n}} , \qquad \operatorname{tang}\vartheta = \frac{\operatorname{tang}\frac{\pi}{n}}{\sqrt{3}} ,$$

d'où

$$\sin\varphi\cos\vartheta + \sin\alpha = \frac{1 + \cos\frac{\pi}{n}}{\sqrt{1 + 2\cos^2\frac{\pi}{n}}},$$

$$\sin(\alpha + \varphi) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1 + \cos\frac{\pi}{n}}{\sqrt{1 + 2\cos^2\frac{\pi}{n}}},$$

et par suite

$$SG = \frac{2s}{\sqrt{6}} = \sqrt{2}.$$

La distance du centre de gravité au sommet S est donc pour le quadrilatère $SMPN$ la même que pour la face correspondante de la double-pyramide, d'où il suit que le point G coïncide avec le point de contact du quadrilatère. Ainsi la figure transformée Π^* a encore la propriété d'être touchée par la sphère inscrite aux centres de gravité des faces respectives.

En désignant par V^* le volume de cette figure, on trouve successivement

$$V^* = \frac{2n}{3}\, ad\sin\vartheta = \frac{8n\,s^2}{3} \cdot \frac{\sin\alpha\sin\varphi\sin\vartheta}{\sin^2(\alpha + \varphi)} = 4\sqrt{3} \cdot \frac{n\sin\frac{\pi}{n}}{\left(1 + \cos\frac{\pi}{n}\right)^2}.$$

En comparant ce volume à celui de la double-pyramide Π, qui est (n^0 11)

$$V = \sqrt{3}\, n \operatorname{tang}\frac{\pi}{n},$$

on trouve pour leur rapport l'expression

$$\frac{V^*}{V} = \frac{4\cos\frac{\pi}{n}}{\left(1 + \cos\frac{\pi}{n}\right)^2} = 1 - \operatorname{tang}^4\frac{\pi}{2n}.$$

Pour $n = 4$ la figure Π^* est un octaèdre à faces quadrilatères, qui sont toutes égales et conformes. On pourrait l'appeler octaèdre *demi-régulier*. Son volume est $4\sqrt{3}\left(1 - \operatorname{tang}^4\frac{\pi}{8}\right) = 16\sqrt{3}\,(3\sqrt{2} - 4) = 6.7241\ldots$ et elle est ainsi in-

férieure à chacun des octaèdres considérés précédemment. Mais la question de savoir si elle a réellement le moindre volume de tous les octaèdres circonscrits à une même sphère, constitue un problème très compliqué, dont la solution se fera probablement attendre encore longtemps.

24. Une déformation analogue à celle que nous venons de faire subir à la pyramide double, peut être appliquée à la double-pyramide tronquée régulière pour en diminuer le volume. Considérons en particulier une figure de cette espèce composée de deux pyramides triangulaires tronquées et ayant par suite huit faces, dont deux opposées sont des triangles équilatéraux et les six autres des trapèzes. Supposons que cette figure soit circonscrite à une sphère qui en touche les faces dans leurs centres de gravité. Si l'on fait tourner l'une des pyramides tronquées composantes d'un angle $\frac{\pi}{3} = 60^0$ autour de l'axe, on formera un nouvel octaèdre limité encore par deux bases triangulaires, mais où les six trapèzes latéraux seront remplacés par des pentagones. Par cette déformation le volume aura diminué, bien que les faces latérales ne soient plus touchées par la sphère dans leurs centres de gravité. En réglant convenablement l'inclinaison des faces latérales sur l'axe, on parviendra cependant à faire coïncider les centres de gravité de toutes les faces avec leurs points de contact. Par cette seconde déformation le volume sera encore diminué. Néanmoins le volume de la figure maximale (d'après la définition du n:o 9) à laquelle on arrive de cette manière, est encore supérieur à celui de l'octaèdre régulier et, par conséquent, il ne représente pas un vrai minimum. Nous nous contentons de ces indications générales, les calculs numériques qui s'y rapportent, n'ayant pas assez d'intérêt pour trouver place ici.

Remarque sur l'icosaèdre.

25. Dans son mémoire déjà cité (Journal de Crelle, Bd. 24, p. 236) M. Steiner, en parlant des problèmes relatifs aux maxima et minima des polyèdres qui restent encore à résoudre, avance entre autres l'hypothèse suivante: „Il n'y a pas de doute que le dodécaèdre et l'icosaèdre réguliers sont des maxima parmi les corps qui sont respectivement de la même espèce et qui ont des surfaces totales équivalentes". Or cette hypothèse, quelque légitime qu'elle paraisse au premier coup d'oeuil, est pourtant sujette à une restriction en tant qu'il s'agit de l'icosaèdre.

Considérons en effet un icosaèdre régulier J. Soient S et S' deux sommets diamétralement opposés, l'un supérieur et l'autre inférieur, de la figure. Les cinq triangles superficiels dont S est sommet commun, ont leurs bases situées dans un même plan P, qui partage ainsi l'icosaèdre en deux parties inégales: une supérieure A et une inférieure B, dont la première est une pyramide pentagonale régulière. Imaginons-nous qu'on fasse tourner celle-ci autour de l'axe SS' d'un petit angle ω et qu'on étende ensuite d'une part les faces de la pyramide A et de l'autre celles du tronc B qui s'appuient par leurs bases sur le plan P; les premières faces enlèveront les coins saillants du tronc B en forme de cinq petites pyramides quadrangulaires, et les dernières ceux de la pyramide A en forme de cinq pyramides triangulaires, et l'on obtiendra ainsi un nouvel icosaèdre de moindre volume que le premier. Les parties enlevées seront au maximum et le solide restant par suite au minimum, lorsque l'angle ω est $= \frac{\pi}{5} = 36^0$. En appliquant le même procédé à la partie du solide environnant le sommet S', on formera définitivement une figure J' limitée par 20 pentagones et circonscrite à la même sphère que l'icosaèdre régulier, mais ayant un volume moindre. Ces pentagones sont de deux espèces, les dix d'entre eux qui environnent les sommets S et S', formant un groupe de figures égales et semblables et les dix autres formant un groupe différent. Je me suis donné la peine de calculer le lieu du centre de gravité d'un des premiers pentagones, afin de savoir s'il coïncide avec son point de contact avec la sphère. Le résultat a été négatif, le premier point étant plus éloigné du pôle voisin (S ou S') que le second. Le polyèdre transformé J', bien qu'il ait un volume moindre que l'icosaèdre régulier J, n'est donc pas une figure maximale.

Pour le présent nous en resterons là, sans aborder la question de savoir quel est, parmi les icosaèdres de même surface totale, celui dont le volume soit un maximum. Nous ferons seulement remarquer que ce n'est pas, en tout cas, l'icosaèdre régulier.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ.
TOM. XXIV. № 9.

UEBER

OXYTRIMETHYLBERNSTEINSÄURE

UND

IHRE ABKÖMMLINGE

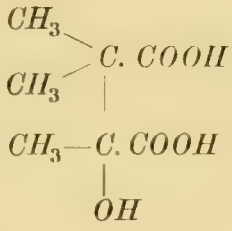
VON

GUST. KOMPPA

[ERSTE MITTHEILUNG]

VORGETRAGEN AM 23 MAJ 1898.

Aus mehreren Gründen, die ich in einer früheren Publication [1]) angegeben habe, wollte ich Oxytrimethylbernsteinsäure oder wie man sie auch nennen könnte Trimethyläpfelsäure:



für synthetische Zwecke darstellen. Da die säure aber selbst ein interessantes Beispiel einer eigenthümlichen dynamischen Gleichgewichtslage bietet, habe ich sie einer genaueren Untersuchung unterzogen. Von einer Säure, die keinen Wasserstoff beim Kohlenstoff gebunden enthält, sondern nur Alkyle und reactionsfähige Gruppen — *OH* und *COOH* — konnte man nämlich abnorme Reactionen erwarten, verursacht durch die grosse intramolekulare Spannung. Bei der Untersuchung bin ich auch wirklich auf mehrere solche Reactionen gestossen; wie z. B. die Substitution von Hydroxyl mit Halogenen und insbesondere die Trockendestillation der Säure und die Einwirkung von Natronlauge auf das Acetyltolil, welche Reactionen theoretisch sehr interessante Resultate gegeben haben.

Die Oxytrimethylbernsteinsäure erhielt ich in guter Ausbeute durch Addition von nascirender Blausäure zum Dimethylacetessigester und Verseifung des entstandenen Oxynitrils mit concentrirten Salzsäure; wie die folgenden Reactionen zeigen:

---

[1]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. 29, 1619.

$$\begin{array}{l} CH_3.CO \\ | \\ (CH_3)_2\!:\!C.COOC_2H_5 \end{array} + HCN = \begin{array}{l} OH \\ | \\ CH_3.C.CN \\ | \\ (CH_3)_2\!:\!C.COOC_2H_5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} OH \\ | \\ CH_3.C.CN \\ | \\ (CH_3)_2\!:\!C.COOC_2H_5 \end{array} + 3H_2O = \begin{array}{l} OH \\ | \\ CH_3.C.COOH \\ | \\ (CH_3)_2\!:\!C.COOH. \end{array} + NH_3 + C_2H_5.OH.$$

Nach einigen Vorversuchen zeigte es sich, dass die beste Ausbeute durch folgendes Verfahren zu erreichen ist: In einer starkwandigen Flasche wurden 18 g Dimethylacetessigester in ca. 40 g Aether gelöst, diese Lösung mit 9,2 g ($1^1/_4$ Mol.) pulv. Kaliumcyanid (98 bis 99 p Ct) versetzt und zu dieser, mit Eis abgekühlten Mischung 11,4 ccm 37 p Ct ($1^1/_4$ Mol.) Salzsäure in kleinen Portionen zugefügt und jedesmal tüchtig umgeschüttelt. Die fest verschlossene Flasche lässt man dann etwa eine Woche stehen. Die ätherische Lösung wird abgegossen und noch einmal mit denselben Quantitäten Kaliumcyanid und Salzsäure auf gleiche Weise behandelt.

Die abgegossene ätherische Lösung wird jetzt unter Abkühlung mit circa zweifacher Menge conc. Salzsäure versetzt, über Nacht bei gewöhnlicher Temperatur stehen gelassen und erst darauf in einem mit langem Luftkühler versehenen Kolben auf dem Wasserbade allmählich einen ganzen Tag erhitzt, am Ende im Wasserbade eingesenkt. Die Lösung wurde dann auf dem Wasserbade ganz zur Trockne eingedampft, pulverisirt und in einem *Soxhlet*-Apparat mit Aether extrahirt. Nach dem Abdestilliren des Aethers wurde die zurückgebliebene rohe Säure in heissem Wasser gelöst, durch Filtriren von etwas ungelöstem Oel befreit und die Lösung auf dem Wasserbade eingedampft. Beim Erkalten oder wenigstens im Vacuum über Schwefelsäure erstarrt sie zu einer etwas gelblichen Krystallmasse, die ca. 14,5 g wog und schon aus ziemlich reiner Ozytrimethylbernsteinsäure bestand. Wurde das Lösungsmittel aus der ätherischen Lösung der Rohsäure nur zum Theil abdestillirt, krystallisirte aus der koncentrirten Lösung sehr reine Säure in harten, schönen, derben Krystallen. Aus der Mutterlauge erhielt man dann die darin gebliebene unreinere Säure auf obengenannte Weise.

Ganz rein erhält man die Säure duch mehrmalige Umkrystallisation aus kochendem Essigäther, wobei doch sehr viel Material veloren geht und ist die

ganze Operation ungewöhnlich zeitraubend. Zweckmässig ist es auch bei der Krystallisation leicht kochendes, trockenes Ligroin tropfenweise zu zufügen. Hat man schon ziemlich reine Säure kann man sie vielleicht doch bequemer aus heissem Wasser umkrystallisiren, trotzdem sie darin so leicht löslich ist.

Die reine Säure bildet grosse, wasserhelle, rhombische Krystalle, deren Schmelzpunkt mit der Schnelligkeit des Erhitzens auf folgende Weise variirt: 10 Sek. pro 1° Fp. 155—156° und 5 Sek. pro 1° Fp. 158—159°. Bei diesen Bestimmungen habe ich die eigenthümliche Beobachtung gemacht, dass der Schmelzpunkt nach einigem Stehen sinkt. So schmolz z. B. die obige reine Säure nach zwölfstündigem Verweilen im Exsic.cator bei 151° (10″ pro 1°), obgleich die ausgeführte Analyse keinen Unterschied in der Zusammensetzung bemerken liess. Nach noch längerem Stehen sank der Schmelzpunkt noch mehr, obgleich dabei keine Gewichtsabnahme zu bemerken war. Auch kam es einigemal vor, dass eine Säure höher v o r einer Umkrystallisation aus Essiggester schmolz, als n a c h derselben. Ich glaube dass diese Abnormität auf einer minimalen Anhydrisirung, welche schon sehr bald einen Gleichgewichtszustand erreicht, beruht, was bei einer Säure mit so vielen Substituenten leichtverständlich wäre. Beim Erhitzen im Capillarrohr scheint die Säure bei ca. 190—200° Wasser abzuspalten, dies geschieht aber nicht bei einer genau bestimmbaren Temperatur.

Diese Säure ist auch deshalb von besonderem Interesse, dass Tiemann [1]) vor drei Jahren dieselbe Säure unter den Oxydationsprodukten des Pinens resp. der Pinonsäure und α- Campholensäure, zu erhalten glaubte. Hr Tiemann hält auch die von J. Kachler [2]) bei Oxydation des Camphers erhaltene Säure „C_7 H_{10} N_5 oder C_7 H_{12} O_5“ für Oxytrimethylbernsteinsäure.

Tiemann giebt für die aus Benzol umkrystallisirte Säure den Schmelzpunkt 141° an und *Kachler*'sche aus Wasser krystallisirte Säure schmolz bei 145°. Ich bekomme aus Wasser in kugeligen Aggregaten eigenthümlich vereinigte rhombische Tafeln, die höchstens bei 156—157° (5 Sek. pro 1°) schmelzen, und nicht „kugelige Aggregate sehr feiner Nadeln“ wie *Kachler*. Weiter hat Kachler angegeben, dass die Baryumsalzlösung seiner Säure mit Kupferacetallösung eine Fällung giebt; ich habe dagegen weder aus Baryumsalz noch aus dem Ammoniumsalz meiner Säure mit demselben Fällungsmittel einen Niederschlag erhalten, und da die obengenanten Verfasser keine weitere Cha-

[1]) Ber d. deutsch. chem. Ges. 28, 1351 und 2173.
[2]) Annal. d. Chemie 191. 153.

rakterisierung ihrer Säuren angegeben haben [1]), kann man nicht mit Sicherheit sagen, ob die drei Säuren identisch sind oder nicht. Es wäre aber jetzt sehr leicht, die TIEMANN'sche Säure — durch Darstellung der von mir gut charakterisierten Derivate der Säure, insbesondere durch das Tolil, dessen Acetylderivat oder durch das Anil — mit meiner synthetischen Säure zu indentifisiren.

Bei der Analyse gaben 0,1854 g Säure: 0,3233 g CO_2 und 0,1102 g H_2O.

	Berechnet für: $C_7H_{12}O_5$	Gefuuden:
C	47,73 p Ct	47,55 p Ct
H	6,82 „	6,60 „

Die Oxytrimethylbernsteinsäure ist leicht löslich in Wasser, Alkohol und in heissem Essigäther, etwas schwerer in kaltem Essigäther und Aether, sehr schwer löslich in heissem Benzol und unlöslich in Ligroin.

Die Lösung des *Ammoniumsalzes*, welches letztgenannte, auf gewöhnliche Weise dargestellt, in Wasser sehr leicht löslich ist und flache, concentrische Nadeln bildet, giebt:

mit *Silbernitrat* einen weissen, amorphen Niederschlag, welcher in kaltem ebenso wie in heissem Wasser unlöslich ist. Durch Kochen mit Wasser wird er zersetzt. Bei der Analyse gab er 55,34 p Ct Silber, während für das normale *Silbersalz* $C_7H_{10}O_5Ag_2$ 55,38 p Ct sich berechnet;

mit *Kupferacetat*lösung keine Fällung;

mit *Kupfersulfat*lösung dagegen nach einiger Zeit einen blaugrünen, krystallinischen Niederschlag;

mit *Eisenchlorid* nach kurzer Zeit eine gelbraune, gallertartige Masse;

mit *Calciumchlorid* weder in der Kälte noch in der Hitze eine Fällung;

mit *Bleinitrat*lösung in der Kälte keine, nach dem Aufkochen aber einen weissen krystallinischen, schwer löslichen Niederschlag. Diese ist die meist charakteristische qualitative Reaction der Oxytrimethylbernsteinsäure.

Calciumsaltz. Die wässrige Lösung der Säure wurde mit überschüssigem Calciumcarbonat erwärmt und längere Zeit stehen gelassen. Das Filtrat giebt nach dem Koncentriren und Kochen einen weissen Niederschlag, von dem Formel: $C_7H_{10}O_5Ca + \frac{1}{2}H_2O$, wie die folgenden Bestimmungen zeigen.

---

[1]) TIEMANN fügt doch hinzu, dass seine Säure mit Jodwasserstoffsäure erhitzt Trimethylbernsteinsäure giebt.

I. 0,1466 *g* luftgetrocknetes Salz gaben bei 4-stündigem Erhitzen bis 170°; 0,0061 *g* Wasser ab.

II. 0,1462 g luftgetr. Salz verloren nach 3-stündigem Erhitzen bis 165°: 0,0060 *g* im Gewichte.

III. 0,1405 *g* wasserfreies Salz gaben nach dem Glühen 0,0361 *g* *Ca O*.

	Ber. für:	Gefunden:			
	$C_7 H_{10} O_5 Ca + \frac{1}{2} H_2 O$	I	II	III	
$H_2 O$	4,04 p Ct	4,16	4,10	—	p Ct
Ca	18,60 „	—	—	18,35	„

Das Salz ist unlöslich in Wasser, geht aber nach längerer Berührung damit in Lösung, wobei es offenbar Krystallwasser aufnimmt und in ein leichtlösliches Salz übergeht. Lässt man daher das Filtrat langsam abdunsten, so trocknet es nur zu einer spröden, glasigen Masse ein, welche in Wasser sehr leicht löslich ist.

Das *Anil*,

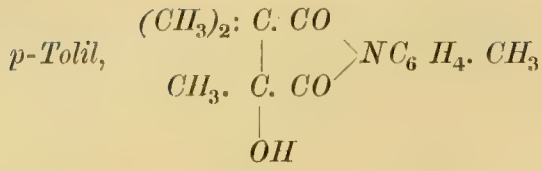
$$\begin{array}{l} (CH_3)_2 : C.\ CO \\ \qquad\quad | \qquad\quad \diagup NC_6 H_5 \\ CH_3.\ C.\ CO \\ \qquad\quad OH \end{array}$$

der Säure wurde durch Kochen der Oxysäure mit überschüssigem Anilin, bis kein Wasser mehr wegging, dargestellt. Nach dem Verreiben der erstarrten Masse mit verdünnter Salzsäure und einmaligem Umkrystallisiren aus sehr verdünntem Alkohol besass die Substanz schon constanten Schmelzpunkt 145°. Die ausgeführte Stickstoffbestimmung gab folgendes Resultat:

0,2298 *g* Substanz gaben 12,8 ccm *N* bei 766 mm Druck und 22° Temp.

	Berechnet für:	Erhalten:
	$C_{13} H_{25} NO_3$	
N	6,01 p Ct	6,40 p Ct

Das Anil bildet kleine Nadeln, die in den gewöhnlichen Lösungsmitteln ausser Wasser und Ligroin leicht löslich sind.



$$p\text{-}Tolil,\quad \begin{array}{l} (CH_3)_2 : C.\ CO \\ \qquad\quad\ \ | \qquad\quad \rangle NC_6\ H_4.\ CH_3 \\ CH_3.\ C.\ CO \\ \qquad\quad\ \ | \\ \qquad\quad OH \end{array}$$

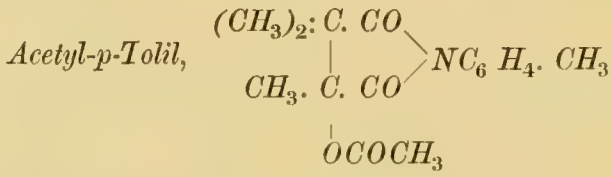
Durch Kochen der Oxytrimethylbernsteinsäure und p-Toluidin in äquivalenten Mengen, solange noch Wasser abgeht, und durch Verreiben mit verd. Salzsäure, erhält man das Tolil, welches aus Alkohol umkrystallisirt schöne Nadeln bildet, die bei 185° schmelzen.

Bei der Analyse gaben

0,1648 *g* Substanz 0,1018 *g* $H_2\ O$ und 0,4095 *g* CO_2:

	Ber. für:	Gefunden:
	$C_{14}\ H_{17}\ O_4\ N$	
C	68,02 p Ct	67,77 p Ct
H	6,88 „	6,86 „

Behandelt man das p-Tolil in der Kälte oder Wärme mit überschüssigem Acetylchlorid, so erhält man einen aus heissem Alkohol sehr schön krystallisirenden Körper — flache Nadeln — der bei 131° schmilzt und ein



$$Acetyl\text{-}p\text{-}Tolil,\quad \begin{array}{l} (CH_3)_2 : C.\ CO \\ \qquad\quad\ \ | \qquad\quad \rangle NC_6\ H_4.\ CH_3 \\ CH_3.\ C.\ CO \\ \qquad\quad\ \ | \\ \qquad\quad OCOCH_3 \end{array}$$

ist, wie folgende Analyse zeigt:

0,1457 *g* Substanz gaben 0,0869 *g* $H_2\ O$ und 0,3529 *g* CO_2.

	Ber. für:	Gefunden:
	$C_{16}\ H_{19}\ NO_4$	
C	66,44 p Ct	66,05 p Ct
H	6,57 „	6,63 „

Diese beiden letztgenannten Körper — p-Tolil und Acetyl-p-Tolil — sind in kaltem Alkohol schwer, in heissem viel leichter löslich (doch schwieriger als das Anil), die sehr leicht krystallisiren und die man auch aus sehr unreiner Säure durch einmaliges Krystallisiren aus Alkohol vollkommen rein erhält.

Sie sind daher für den Nachweis und für die Identificirung der Oxytrimethylbernsteinsäure ganz besonders geeignet. Auch die Ueberführung des Tolils in dessen Acetylverbindung geht leicht und glatt von Statten.

Die Einwirkung von Alkalien auf das Acetyltolil hat sehr eigentümliche Resultate gegeben, über welche aber in einer besonderen Abhandlung berichtet wird. So viel kann hier nur erwähnt werden, dass bei dieser Reaction die Anhäufung von Substituenten eine wichtige Rolle spiel.

Acetylirtes Anhydrid der Oxytrimethylbernsteinsäure.

$$(CH_3)_2\text{: } C.\ CO$$
$$\quad\quad\quad

$$\begin{array}{l} (CH_3)_2 : C.\,CO \\ \quad\quad\quad\;\; | \\ CH_3 .\, C.\,CO \\ \quad\quad\quad\;\; | \\ \quad\quad\quad OCOCH_3 \end{array} \Big\rangle O + H_2\, NC_6\, H_4\, CH_3 = \begin{array}{l} (CH_3)_2 : C.\,CO\underline{OH} \\ \quad\quad\quad\;\; | \\ CH_3 .\, C.\,CON\underline{H}C_6\, H_4\, CH_3 \\ \quad\quad\quad\;\; | \\ \quad\quad\quad OCOCH_3 \end{array} =$$

$$= \begin{array}{l} (CH_3)_2 : C.\,CO \\ \quad\quad\quad\;\; | \\ CH_3 .\, C.\,CO \\ \quad\quad\quad OCOCH_3 \end{array} \Big\rangle NC_6\, H_4\, CH_3 + H_2\, O.$$

Beim Auslaugen des Einwirkungsproduktes von Acetylchlorid auf die unreine Säure mit heissem Ligroin (siehe oben) erhielt ich einen Rückstand, der aus heissem Wasser umkrystallisirt feine Nädelchen bildet, die bei 142° schmelzen. Der gleiche Körper bildet sich auch, wenn man das Einwirkungsproduct von Acetylchlorid auf unreine Säure direct in wenig Wasser giesst und die durch Reiben mit einem Glasstabe erstarrte Masse aus heissem Wasser krystallisirt. Dabei geht wahrscheinlich das zugleich entstandene Acetylanhydrid ganz einfach in die ursprüngliche Säure über, welche in der Mutterlauge bleibt, wogegen nur der neue Körper auskrystallisirt.

Bei der Analyse hat der Körper folgende Werthe gegeben:

		I	II	
Gefunden:	C	54,30,	54,80	p Ct.
	H	5,50,	6,80	„

Was der Körper für eine Zusammensetzung besitzt, habe ich bis jetzt noch nicht ermitteln können; aus ganz reiner Säure entsteht aber davon garnichts. In Sodalösung löst es sich leicht — jedoch ohne Kohlendioxydentwickelung — und wird aus dieser Lösung mit Säuren wieder unverändert ausgefällt. Er scheint auch unverändert destillirbar zu sein.

Etylester der Säure,

$$\begin{array}{l} (CH_3)_2 : C.\,COOC_2\, H_5 . \\ \quad\quad\quad\;\; | \\ CH_3 .\, C.\,COOC_2\, H_5 \\ \quad\quad\quad\;\; . \\ \quad\quad\quad OH \end{array}$$

Da bei dem Esterificiren der Säure auf gewöhnliche Weise mit Salzsäure und Alkohol immer nur ein Theil derselben in den normalen Ester übergeführt wird, musste ich, so lange ich nur kleine Mengen der Säure besass, den Ester aus dem Silbersalz und Etyljodid darstellen.

Zu diesem Zwecke wurden 18 gr Silbersalz mit etwas mehr als äquivalenter Menge Etyljodid in einem zugeschmolzenen Rohre einige Zeit auf 100° erhitzt. Die Reaktion ging sehr leicht von Statten und fing schon beim Zuschmelzen des Rohres an. Der gelbidete Ester wurde vom Silberjodid abfiltrirt, das letztgenannte mehreremals mit Aether abgespült und die vereinigten Filtraten erst mit Sodalösung und dann mit Wasser gewaschen. Aus der mit Chlorcalcium getrockneten ätherischen Lösung wurde das Lösungsmittel abdestillirt und der Rückstand in Vacuum fraktionirt. Bei einem Drucke von 9 mm ging der aller grösste Theil bei 122—123° über.

Bei der Analyse gaben

0,1944 *g* Substanz: 0,1482 *g* H_2O und 0,4030 *g* CO_2.

	Ber. für: $C_{11}H_{20}O_5$	Gefunden:
C	56,85 p Ct	56,53 p Ct
H	8,62 „	8,47 „

Das specif. Gewicht des so erhaltenen Esters war: $D\,{}^{18}_{18} = 1{,}066$.

Später, als ich grössere Mengen von der Oxytrimethylbernsteinsäure zur Verfügung hatte, habe ich auch den Ester durch Einleiten von Chlorwasserstoffgas in die alkoholische Lösung der Säure dargestellt. Eine solche mit HCl gesättigte Lösung liess man dann etwa eine Woche bei gew. Temperatur stehen. Sie wurde darnach in Eiswasser gegossen. Der theilweise abgeschiedene Ester wurde in Aether aufgenommen, die aetherische Lösung gut mit Sodalösung und Wasser gewaschen, mit Chlorcalcium getrocknet und der Aether abdestillirt. Beim Destilliren in Vacuum ging beinahe Alles bei 139—140° unter 23 mm. Druck über. Aus der Sodalösung wurde der saure Ester und die unveränderte Säure durch Zusatz von Salzsäure und Extrahiren mit Aether gewonnen. Nach dem Verseifen mit Kalilauge wurde aus diesem Gemisch die nicht in normalen Ester übergeführte Säure regenerirt.

Der auf diese Weise gewonnene normale Ester gab bei einer Verbrennung folgendes Resultat:

0,1516 *g* substantz gaben 0,1169 *g* H_2O und 0,3163 *g* CO_2.

	Ber. für: $C_{11}H_{20}O_5$	Gefunden:
C	56,85 p Ct	56,90 p Ct
H	8,62 „	8,57 „

Das specif. Gewicht war $D_{20}^{20} = 1{,}0629$.

Er bildet ein farbloses, leichtbewegliches und nicht unangenehm riechendes Oel. Der Siedepunkt des ganz reinen Esters ist bei 8 mm 119°.

Chlortrimethylbernsteinsäure-aethylester,

$$\begin{array}{l} (CH_3)_2 : C.\ COOC_2\,H_5. \\ \quad\quad\quad\ \ | \\ CH_3.\ C.\ COOC_2\,H_5. \\ \quad\quad\quad\ \ \cdot \\ \quad\quad\quad\ Cl \end{array}$$

Wie bekannt hat P. Walden [1]) bei seinen schönen Untersuchungen über optisch active Halogenverbindungen eine elegante Methode zum Ersatz der Oxygruppe in Säureestern durch Chlor und Brom (ohne dass der Ester dabei Verseift oder anders verändert wird) ausgearbeitet. Die Methode beruht auf die Enwirkung der Phosphorhalogen-Verbindungen auf die Chloroformlösung des Esters. Nach dieser Methode wurde der Oxytrimethylbernsteinsäureester auf folgende Weise in den Ester der entsprechender Chlorsäure übergeführt:

10 g Oxytrimethylbernsteinsäureester wurden in 50 g Chloroform gelöst und diese Lösung mit 9,5 g Phosphorpentachlorid versetzt. Bei gew. Temperatur konnte keine Reaktion wahrgenommen werden. Die Mischung wurde daher im Wasserbade allmählich bis 83° erwärmt, bei welcher Temperatur die Reaction sehr lebhaft vor sich ging. Sobald die Chlorwasserstoff-Entwickelung aufgehört hatte, wurde die Lösung unter guter Abkühlung mit kaltem Wasser versetzt und geschüttelt, mit Sodalösung gewaschen und mit Chlorcalcium getrocknet. Nach dem das Chloroform wegdestillirt war, wurde der Rückstand in Vacuum destillirt. Dabei ging Alles unter einem Druck von 12 mm zwischen 114,5—115,5° über. Die Ausbeute war beinahe quantitativ.

Bei der Analyse wurden Werthe erhalten die gut mit der erwarteten Formel übereinstimmen:

	Ber. für:	Gefunden:	
	$C_{11}\,H_{19}\,O_4\,Cl$	I	II
C	52,69 p Ct	52,78	52,53 p Ct
H	7,58 „	7,39	7,49 „

[1]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. 28, 1287 und 2766.

Der neue Ester bildet eine farblose, leichtbewegliche und angenehm riechende Flüssigkeit.

Sehr eigenthümliche Resultate gab die Verseifung des Esters mit Salzsäure. Ich erhielt näml. dabei nicht die gewartete freie Chlortrimethylbernsteinsäure sondern eine neue Halogenfreie Verbindung, die auch nicht mit der Oxytrimethylbernsteinsäure identisch war. Diese Verbindung ist noch nicht erschöpfend untersucht worden, ich glaube aber schon jetzt vermuthen zu können, dass hier eine β-Lactoncarbonsäure vorliegt. Damit ständen auch diese Resultate in bestem Einklange mit den sehr intressanten Beobachtungen, welche ich bei der Destillation der Oxytrimethylbernsteinsäure bei gew. Druck gemacht habe. Ueber diese in theoretischer Hinsicht viel versprechenden Verhältnisse werde ich in einer zweiten Mittheilung genauer berichten.

Ich muss hier noch hervorheben, dass der Ersatz des Hydroxyls im Ester der Oxytrimethylbernsteinsäure mit dem Chlor nicht mit solcher Leichtigkeit [1]) vorging wie Walden (loc. cit.) es bei den anderen Oxysäureestern beobachtet hat. Viel grössere Schwierigkeiten machte die Substitution des Hydroxyls gegen Brom.

Die genauere Untersuchung zeigte, dass bei Einwirkung von Phosphorpentabromid auf die Chloroformlösung des Oxysäureesters kein einfacher Ersatz des Hydroxyls mit Brom vorgegangen, sondern dass hier viel mehr ein komplicirteres Gemisch entstanden war, aus welchem weder durch Fraktioniren in Vacuum noch durch Verseifen mit Bromwasserstoffsäure und Umkrystallisiren der Verseifungsproducte etwas einheitliches zu erhalten war.

Auch durch die Einwirkung des Phosphorpentabromids auf die Chloroformlösung der freien Oxytrimethylbernsteinsäure konnte die Oxygruppe nicht mit dem Brom ersetzt werden. Es entstand dabei warscheinlich nur das Bromid der Trimethyläpfelsäure:

$$(CH_3)_2 : C.\,COBr$$

$$CH_3 . C.\,COBr$$

$$OH$$

Man sieht also, meiner Meinung nach, wie hier die vielen Alkylen die Substituirbarkeit des Hydroxyls gegen andere Gruppen erschweren, und auf die

[1]) Garnicht bei gew. Temperatur.

Weise, dass die Reaction desto weniger normal abläuft je grösser das einzutretende Radical ist; das ist, es macht sich hier geltend derselbe Kampf um den Platz im Raume wie insbesondere V. MEYER durch seine schönen Arbeiten auf den anderen Gebieten gezeigt hat.

Helsingfors im Mai 1898.

Laboratorium des Polytechnikums.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ.
TOM. XXIV. № 10.

ÜBER EINE VERALLGEMEINERUNG

DER RIEMANNSCHEN FUNCTION $\zeta(s)$

VON

HJ. MELLIN.

Über eine Verallgemeinerung der Riemannschen Function $\zeta(s)$.

I.

Eine Methode zur Erweiterung des Convergenzbereiches von $\zeta(s, w)$.

1. Durch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

wird bekanntlich für $R(s) > 1$ eine analytische Function $\zeta(s)$ definirt, von welcher zuerst Riemann zeigte, dass sie eine in der ganzen s-Ebene eindeutige und mit Ausnahme des Punktes $s = 1$, wo sich eine einfache Unendlichkeitsstelle mit dem Residuum 1 findet, regulär sich verhaltende Function ist. Die Aufmerksamkeit der Mathematiker ist neuerdings wieder auf diese Function durch die Beweise gelenkt worden, welche die Herren Hadamard und de la Vallée Poussin für einen Theil des die Nullstellen von $\zeta(s)$ betreffenden, in der Riemann'schen Arbeit unerledigten Satzes erbracht haben. Unter solchen Umständen dürften die nachfolgenden Untersuchungen, deren Gegenstand die allgemeinere, ebenfalls mehrfach erörterte Function

$$\zeta(s, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(w+n)^s} \tag{1}$$

ist, einiges Interesse darbieten können, obwohl sie sich in anderen Richtungen bewegen.

Unter Zuhülfenahme der Bernoulli'schen Functionen soll zunächst in elementarer Weise gezeigt werden, dass diese Function in eine Reihe entwickelt

werden kann, welche nicht nur für $R(s) > 1$, sondern auch in einem beliebigen endlichen Theile der Halbebene $R(s) < 1$ gleichmässig convergirt und somit die analytische Fortsetzung von $\zeta(s, w)$ über das Gebiet $R(s) > 1$ hinaus darstellt.

Die BERNOULLI'sche Function $m$ter Ordnung kann in der Form

$$\varphi(w, m) = w^m - \frac{m}{2} w^{m-1} + \binom{m}{2} B_1 w^{m-2} - \binom{m}{4} B_2 w^{m-4} + \binom{m}{6} B_3 w^{m-6} - \ldots$$

dargestellt werden, wo m eine positive ganze Zahl bedeutet und rechter Hand kein von w freies Glied vorkommen darf, so dass also $\varphi(0, m) = 0$. Dieses Polynom besitzt die Eigenschaft

$$\varphi(w + 1, m) - \varphi(w, m) = m w^{m-1} \tag{2}$$

und ist als ganze rationale Function durch die genannten Eigenschaften vollständig bestimmt.

Die BERNOULLI'schen Functionen erster, zweiter bis einschliesslich $(2k + 2)$-ter Ordnung können offenbar aus einem einzigen Ausdrucke

$$\varphi_k(w, s) = w^s - \frac{s}{2} w^{s-1} + \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^{\nu-1} \binom{s}{2\nu} B_\nu w^{s-2\nu} \tag{3}$$

erhalten werden indem man der Reihe nach $s = 1, 2, \ldots, 2k + 2$ setzt und das für gerade Werthe von s auftretende constante Glied jedesmal fortlässt, d. h. es ist

$$\begin{aligned}
\varphi_k(w, 1) &= \varphi(w, 1) - \frac{1}{2} \\
\varphi_k(w, 2n + 1) &= \varphi(w, 2n + 1), \qquad n = 1, 2, \ldots, k, \\
\varphi_k(w, 2n) &= \varphi(w, 2n) + (-1)^{n-1} B_n, \; n = 1, 2, \ldots, k,
\end{aligned}$$

und schliesslich

$$\varphi_k(w, 2k + 2) = \varphi(w, 2k + 2).$$

Da also die Differenz $\varphi_k(w + 1, s) - \varphi_k(w, s)$ *mit* $\varphi(w + 1, s) - \varphi(w, s)$ *für* $s = 1, 2, \ldots, 2k + 2$ *übereinstimmt, so sieht man vermöge* (2) *ein, dass die Gleichung*

$$\varphi_k(w+1,s) - \varphi_k(w,s) - sw^{s-1} = 0 \tag{4}$$

für ein unbestimmtes w *die Wurzeln* $s = 0, 1, 2, \ldots, 2k+2$ *besitzt.*

Dies vorausgeschickt, lautet nun die zu beweisende Formel folgenderweise

$$-s\zeta(1-s,w) = \varphi_k(w,s) + \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\varphi_k(w+n+1,s) - \varphi_k(w+n,s) - s(w+n)^{s-1}\right\}. \tag{5}$$

Für $R(s) < 0$ ist die Gültigkeit dieser Formel unmittelbar ersichtlich, da die rechte Seite als Summe der beiden für $R(s) < 0$ convergenten Reihen

$$-s\zeta(1-s,w) = -\sum_{n=0}^{\infty} s(w+n)^{s-1}$$

und

$$0 = \varphi_k(w,s) + \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\varphi_k(w+n+1,s) - \varphi_k(w+n,s)\right\}$$

aufgefasst werden kann. Es kann aber bewiesen werden, dass die rechte Seite von (5) eine in jedem endlichen Bereiche von s, wo die Ungleichheit $R(s) < 2k+2$ gilt, gleichmässig convergirende Reihe ist.

Aus (3) leuchtet ein, dass das allgemeine Glied von (5) in eine Reihe der Form

$$\varphi_k(w+n+1,s) - \varphi_k(w+n,s) - s(w+n)^{s-1} = C_1(s)(w+n)^{s-1} + \ldots$$
$$+ C_\lambda(s)(w+n)^{s-\lambda} + \ldots$$

entwickelt werden kann, wo C_λ eine in s ganze rationale Function bedeutet, deren Gradzahl höchstens gleich λ sein kann. Setzt man s gleich irgend einer der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 2k+2$, so verschwindet jedesmal vermöge (4) die linke und somit auch die rechte Seite, und zwar für alle Werthe von $w+n$. Die Coefficienten C_λ sind also alle gleich der Null für $s = 0, 1, 2, \ldots, 2k+2$. Die $2k+2$ ersten unter ihnen, deren Gradzahl nicht grösser ist als $2k+2$, müssen mithin identisch verschwinden, wodurch sich ergiebt

$$\varphi_k(w+n+1,s) - \varphi_k(w+n,s) - s(w+n)^{s-1} = (w+n)^{s-2k-3}\,\mathfrak{P}\left(\frac{1}{w+n}, s\right),$$

wo $\mathfrak{P}$ eine nach positiven ganzzahligen Potenzen von $\frac{1}{w+n}$ und s fortschreitende Reihe bezeichnet, welche für $\left|\frac{1}{w+n}\right| < 1$ convergirt. Beschränkt man s auf ein beliebiges endliches Gebiet, so kann $\left|\mathfrak{P}\left(\frac{1}{w+n}, s\right)\right|$ für $n = m, m+1, \ldots, \infty$ nicht über eine gewisse endliche Grenze M wachsen, falls m so gross ist, dass $R(w+m) > 1$. Gilt für das Gebiet, auf welches s beschränkt wird, zugleich die Ungleichheit $R(s) < 2k+2-\varepsilon$, wo ε eine beliebig kleine positive Zahl, so hat man

$$\sum \left| \varphi_k(w+n+1, s) - \varphi_k(w+n, s) - s(w+n)^{s-1} \right| < \sum \frac{M}{|w+n|^{1+\varepsilon}}.$$

Die Reihe (5) convergirt also unbedingt und gleichmässig in jedem endlichen Theile der Halbebene $R(s) < 2k+2$.

Ersetzt man in (5) s durch $-s$, so bekommt man die in der Halbebene $R(s) > -2(k+1)$ convergirende Reihenentwickelung

$$(6)\quad s\zeta(1+s, w) = \varphi_k(w, -s) + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{s}{(w+n)^{s+1}} + \varphi_k(w+n+1, -s) - \varphi_k(w+n, -s) \right\},$$

$$R(s) > -2(k+1).$$

Da man k beliebig gross annehmen kann, so ergiebt sich, dass $s\zeta(1+s, w)$ als Function von s den Charakter einer ganzen transcendenten Function besitzt.

Bemerkenswerth ist, dass die Werthe, welche diese Function $s\zeta(1+s, w)$ für 0 und alle negativen ganzzahligen Werthe von s annimmt, rational in w ausgedrückt werden können.

Denn weil das allgemeine Glied von (6) vermöge (4) für die im Convergenzbereiche dieser Reihe gelegenen Werthe $s = 0, -1, -2, \ldots, -2k-1$ verschwindet, so ergiebt sich für $s = 0$ und $s = -1$

$$(7)\quad \lim_{s=0} s\zeta(1+s, w) = 1 \text{ und } \zeta(0, w) = \frac{1}{2} - w,$$

sowie

$$(8)\quad n\zeta(1-n, w) = -\varphi_k(w, n) = -\varphi(w, n) + (-1)^n B_{\frac{n}{2}},$$

für $n = 2, 3, \ldots, 2k+1$, wo unter $B_{\frac{n}{2}}$ für ein ungerades n die Null zu verstehen ist. Da man k beliebig gross annehmen darf, so gilt diese Formel für alle positiven ganzzahligen Werthe von n, welche ≥ 2 sind.

Setzt man $w = 1$, so findet man unter Berücksichtigung von $\varphi(1, n) = 0$, dass die RIEMANN'sche Function $\zeta(s) = \zeta(s, 1)$ für negative ganzzahlige Werthe von s die folgenden Werthe annimmt

$$\zeta(-2n) = 0, \quad \zeta(-2n+1) = (-1)^n \frac{B_n}{2n},$$

was gewöhnlich mit Hülfe der Functionalgleichung von $\zeta(s)$ bewiesen wird.

Die hier gebrauchte Methode zur Erweiterung des Convergenzbereiches der Reihe (1) hat eine auffallende Ähnlichkeit mit derjenigen, welcher sich Herr MITTAG-LEFFLER beim Beweise seines bekannten Satzes bedient. Übrigens ist sie noch einer Verallgemeinerung fähig, wodurch sie auf jede Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[R(w+n)]^s}$$

anwendbar wird, unter $R(w)$ eine in w ganze rationale Function verstanden. In ihrer einfachsten Form gehört sie Herrn JENSEN an, welcher (Comptes rendus, T. 104) zeigt, dass man die in der Halbebene $R(s) > 0$ convergirende Reihenentwickelung hat

$$(s-1)\zeta(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (n+1)^{1-s} - n^{1-s} + (s-1)n^{-s} \right\}.$$

II.

Die Coefficienten in der Entwickelung von $\zeta(s, w)$ nach Potenzen von $s + n$ als Functionen von w.

2. Entwickelt man $\zeta(s, w)$ in der Umgebung einer Stelle $s = r$, wobei r der Einfachheit halber eine ganze Zahl sei, in eine nach ganzen Potenzen von $s - r$ fortschreitende Reihe, so ergeben sich als Coefficienten gewisse eigenthümliche Functionen von w. Ein besonderes Interesse bieten diejenigen Coefficienten dar, welche zu den Stellen $r = 1, 0, -1, -2, \ldots, -n, \ldots$ gehören, weil sie nicht durch Differentiation aus der ursprünglichen Reihe (1) erhalten werden können, da dieselbe für $R(s) < 1$ überhaupt nicht mehr convergirt. Mit diesem Missstande ist die Reihe (6) zwar nicht behaftet, dafür liefert sie aber insbesondere für die höheren Ableitungen sehr complicirte Ausdrücke. Im Nachfolgenden soll indes ein Weg angegeben werden, auf dem man die betreffenden Functionen vollständig erlangen kann, welche vermöge der einfachen Functionalgleichungen, denen sie genügen, und des Zusammenhanges, in welchem sie zu einander und der Reihe (1) stehen, bemerkenswerth sind. Es verdient schon hier angeführt zu werden, dass die Gamma- und die trigonometrischen Functionen als ein sehr kleiner Theil unter den Transcendenten enthalten sind, auf die man bei einer eingehenderen Untersuchung jener Reihe geführt wird.

Es bietet keine Schwierigkeit dar, für die Coefficienten der Entwickelung von $\zeta(s, w)$ nach Potenzen von $s - 1$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, für die Coefficienten der beständig convergirenden Potenzreihe

$$f(s, w) = 1 - (s-1)\,\zeta(s, w) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(1, w)}{\lfloor \nu} (s-1)^{\nu}$$

einfache Ausdrücke zu ermitteln, wenn man sich der folgenden für $R(s) > 0$ convergenten Reihe bedient

$$(s-1)\,\zeta(s,w) = w^{1-s} + \sum_{n=0}^{\infty}\left\{(s-1)\,(w+n)^{-s} + (w+n+1)^{1-s} - (w+n)^{1-s}\right\},$$

welche als der einfachste specielle Fall von (6) zu betrachten ist. Es ergiebt sich offenbar

$$(-1)^{\nu-1} f^{(\nu)}(1,w) = \log^{\nu} w + \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\log^{\nu}(w+n+1) - \log^{\nu}(w+n) - \nu\frac{\log^{\nu-1}(w+n)}{w+n}\right\}$$

$$= \lim_{m=\infty}\left\{\log^{\nu}(w+m+1) - \nu\sum_{n=0}^{m}\frac{\log^{\nu-1}(w+n)}{w+n}\right\}.$$

Wir setzen nun $\psi_\nu(w) = \dfrac{f^{(\nu+1)}(1,w)}{\nu+1}$, d. h.

$$\psi_\nu(w) = (-1)^{\nu}\lim_{m=\infty}\left\{\frac{\log^{\nu+1}(w+m)}{\nu+1} - \sum_{n=0}^{m}\frac{\log^{\nu}(w+n)}{w+n}\right\} \tag{9}$$

oder, da $\lim_{m=\infty}\left\{\log^{\nu}(w+m) - \log^{\nu} m\right\} = 0$ ist:

$$\psi_\nu(w) = (-1)^{\nu}\lim_{m=\infty}\left\{\frac{\log^{\nu+1} m}{\nu+1} - \sum_{n=0}^{m}\frac{\log^{\nu}(w+n)}{w+n}\right\} \tag{10}$$

und betrachten diese Functionen als selbständige Transcendenten, *auf die wir die sämmtlichen Coefficienten aller übrigen oben besprochenen Reihen*

$$\zeta(s,w) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\zeta^{(\nu)}(-n,w)}{\lfloor\nu}(s+n)^{\nu} \tag{11}$$

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ \infty$$

zurückführen werden.

Die Grössen $\psi_\nu(w)$ kann man offenbar auch durch die Gleichung

$$\frac{1}{s-1} - \zeta(s,w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_\nu(w)}{\underline{\nu}} (s-1)^\nu \tag{12}$$

definiren. Insbesondere ist

$$\psi_\nu(w) = \lim_{m=\infty} \left\{ \log(w+m) - \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{w+n} \right\} = \psi(w)$$

mit der logarithmischen Ableitung von $\Gamma(w)$ identisch. Dies hat neulich Herr LERCH in anderer Weise gezeigt und in Übereinstimmung hiermit haben wir die Bezeichnung der folgenden Coefficienten von (12) gewählt. Auf diejenigen speciellen Ausdrücke, in welche die $\psi_\nu(w)$ bei der Annahme $w=1$ übergehen, ist schon früher Herr JENSEN (Comptes Rendus T. 104, 1887) gekommen und Herr GRAM (Vetenskapernes Selskabs Ofversigter, Kjöbenhavn, 1895) hat eine Menge derselben mit grosser Genauigkeit berechnet.

Unabhängig von den obigen Ausdrücken (9) und (10) lässt sich nun auf Grund zweier fundamentalen Eigenschaften der Function $\zeta(s,w)$ zeigen, dass die $\psi_\nu(w)$ sowie auch die Grössen $\zeta^{(\nu)}(-n,w)$ sehr einfache Functionalgleichungen befriedigen, und dass diese auf jene Grössen zurückgeführt werden können. Aus der Form der Reihe (1) erhellt sofort, dass $\zeta(s,w)$ die beiden Eigenschaften besitzt

$$\zeta(s,w+1) = -w^{-s} + \zeta(s,w), \tag{13}$$

$$\frac{\partial \zeta(s-1,w)}{\partial w} = -(s-1)\,\zeta(s,w). \tag{14}$$

Aus der ersteren Gleichung folgt durch Differentation nach s

$$\zeta^{(\nu)}(s,w+1) = (-1)^{\nu+1} w^{-s} (\log w)^\nu + \zeta^{(\nu)}(s,w). \tag{15}$$

Diese zunächst nur für die Halbebene $R(s)>1$ bewiesenen Gleichungen müssen doch auf Grund eines bekannten functionentheoretischen Principes überhaupt für alle Werthepaare s,w gelten, in deren Umgebung sich $\zeta(s,w)$ regulär verhält. Vom Gebiete der Grösse s braucht somit höchstens nur $s=1$ ausgeschlossen zu werden, weil dieser Punkt die einzige im Endlichen gelegene singuläre Stelle von $\zeta(s,w)$ als Function von s ist. Die in den Reihen (11) vorkommenden Functionen besitzen also vermöge (15) die Eigenschaften

$$(16)\qquad \left\{\begin{array}{l} \zeta^{(\nu)}(0, w+1) = (-1)^{\nu+1}(\log w)^{\nu} + \zeta^{(\nu)}(0, w), \\ \zeta^{(\nu)}(-1, w+1) = (-1)^{\nu+1} w (\log w)^{\nu} + \zeta^{(\nu)}(-1, w), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \zeta^{(\nu)}(-n, w+1) = (-1)^{\nu+1} w^{n} (\log w)^{\nu} + \zeta^{(\nu)}(-n, w), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, \infty,$$

woraus zugleich erhellt, dass nicht die zu einer und derselben Reihe, sondern die zur selben Ordnungszahl ν gehörigen Functionen einander am nächsten stehen.

Die Functionalgleichungen der Grössen $\psi_{\nu}(w)$ ergeben sich, wenn man beachtet, dass die bei der Definition derselben benutzte Function $f(s, w)$ vermöge (14) in der Form

$$f(s, w) = 1 - (s-1)\zeta(s, w) = 1 + \frac{\partial \zeta(s-1, w)}{\partial w}$$

geschrieben werden kann, woraus weiter folgt

$$(17)\qquad \psi_{\nu}(w) = \frac{f^{(\nu+1)}(1, w)}{\nu+1} = \frac{1}{\nu+1}\frac{\partial \zeta^{(\nu+1)}(0, w)}{\partial w}.$$

Differentiirt man nun die Gleichung (15), nachdem ν durch $\nu+1$ ersetzt worden, nach w und setzt sodann $s=0$, so erhält man die Functionalgleichung

$$\psi_{\nu}(w+1) = \frac{(-\log w)^{\nu}}{w} + \psi_{\nu}(w)$$

$$\nu = 0,\ 1,\ 2, \ldots, \infty.$$

Durch wiederholte Anwendung derselben folgt

$$\psi_{\nu}(w+m) + \frac{(-\log m)^{\nu+1}}{\nu+1} = \psi_{\nu}(w) - (-1)^{\nu}\left\{\frac{(\log m)^{\nu+1}}{\nu+1} - \sum_{n=0}^{m-1}\frac{\log^{\nu}(w+n)}{w+n}\right\}.$$

Nach (10) nähert sich die rechte Seite bei wachsendem m der Grenze Null an.

Hiernach besitzt die Function $\psi_\nu(w)$ die beiden Eigenschaften

$$(18)\qquad \begin{cases} \psi_\nu(w+1) = \dfrac{(-\log w)^\nu}{w} + \psi_\nu(w) \\ \lim\limits_{m=\infty} \left\{ \psi_\nu(w+m) + \dfrac{(-\log w)^{\nu+1}}{\nu+1} \right\} = 0 \end{cases}$$

durch welche sie auch umgekehrt, wie man leicht findet, vollständig bestimmt ist.

Nimmt man in (16) $\nu = 1$ an, so bekommt man die Gleichungen

$$(19)\qquad \begin{cases} \zeta'(0, w+1) = \log w + \zeta'(0, w), \\ \zeta'(-1, w+1) = w \log w + \zeta'(-1, w), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \zeta'(-n, w+1) = w^n \log w + \zeta'(-n, w), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Setzt man nun

$$\Gamma(w) = e^{\zeta'(0, w) - \zeta'(0, 1)},$$

so ist

$$\Gamma(w+1) = w\,\Gamma(w)\ ,\ \Gamma(1) = 1,$$

und es lässt sich in der That beweisen, dass die so definirte Function mit der EULER'schen Gammafunction identisch ist. Setzt man weiter

$$\Gamma_1(w) = [\Gamma(w)]^{1-w}\, e^{\zeta'(-1, w)},$$

so hat man eine Function mit der Eigenschaft

$$\Gamma_1(w+1) = \frac{\Gamma_1(w)}{\Gamma(w)}.$$

Hiernach entsteht die Frage, ob sich, von der Gammafunction ausgehend, eine unendliche Folge von Functionen derart bilden lässt, dass dieselben die Gleichungen

$$\Gamma_1(w+1) = \frac{\Gamma_1(w)}{\Gamma(w)},$$

$$\Gamma_2(w+1) = \frac{\Gamma_2(w)}{\Gamma_1(w)},$$

. . . . . .

$$\Gamma_n(w+1) = \frac{\Gamma_n(w)}{\Gamma_{n-1}(w)},$$

. . . . . .

erfüllen? In § 6 wird diese Frage bejahend beantwortet. Die $\Gamma_n(w)$ werden in der Form von unendlichen Producten erhalten, welche als Verallgemeinerungen des bekannten Ausdruckes der Gammafunction betrachtet werden können.

3. Es wurde schon erwähnt, dass nicht die zu einer und derselben Reihe (11), sondern die zur selben Ordnungszahl ν gehörigen Functionen $\zeta^{(\nu)}(-n, w)$ einander am nächsten stehen. Sieht man von dem Falle $\nu = 0$ ab, welcher schon in § 1 erledigt wurde, so befriedigen diejenigen Functionen die einfachsten Gleichungen (19), für welche $\nu = 1$ ist. Es soll nun nachgewiesen werden, dass dieselben auf die logarithmische Ableitung der Gammafunction mittelst der folgenden Formel zurückgeführt werden können

$$\zeta'(-n, w) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \binom{n}{\nu} (w-1)^{n-\nu} \int_1^w (w-1)^{\nu} \psi(w)\, dw + R_n(w), \tag{20}$$

wo R_n eine gewisse ganze rationale Function $(n+1)$ten Grades bezeichnet.

Durch wiederholte Anwendung von (14) ergiebt sich

$$\frac{\partial^n \zeta(s-n, w)}{\partial w^n} = (-1)^n (s-1)(s-2)\ldots(s-n)\,\zeta(s, w). \tag{21}$$

Differentiirt man in Bezug auf s und setzt sodann $s = 0$, so folgt mit Benutzung von (7) und (17)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^n \zeta'(-n, w)}{\partial^n w} &= \lfloor\underline{n}\, \zeta'(0, w) - \lfloor\underline{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \zeta(0, w) \\ &= \lfloor\underline{n} \int_1^w \psi(w)\, dw + \lfloor\underline{n}\, \zeta'(0, 1) - \lfloor\underline{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2} - w\right),\end{aligned}$$

und hieraus

$$\zeta'(-n, w) = \underline{n} \int_1^w \int_1^w \cdots \int_1^w \psi(w)\, dw^{n+1} + R_n(w), \tag{22}$$

wo R die die schon angegebene Bedeutung hat. Man findet zugleich, dass der Coefficient der höchsten Potenz von w in R gleich $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ ist. Zu der Formel (20) gelangt man nun unmittelbar, wenn man sich der folgenden allgemeinen Formel bedient

$$\underline{n} \int_a^w \int_a^w \cdots \int_a^w f(w)\, dw^{n+1} = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (w-a)^{n-\nu} \int_a^w (w-a)^\nu f(w)\, dw, \tag{23}$$

welche dadurch erhalten werden kann, dass man sich zuerst mittelst des Schlusses von n auf $n+1$ von der Gültigkeit der Gleichung

$$\int_a^w \int_a^w \cdots \int_a^w f(w)\, dw^{n+1} = \sum_{\nu=0}^{n} C_\nu (w-a)^{n-\nu} \int_a^w (w-a)^\nu f(w)\, dw$$

überzeugt und sodann durch die Annahme $f(w) = (w-a)^\varrho$ die Form der Coefficienten bestimmt.

Die Coefficienten der Entwickelung von $R_n(w)$ nach ganzen Potenzen von $w-1$ können folgenderweise ermittelt werden. Aus (22) folgt

$$R_n^{(\lambda)}(1) = \left(\frac{\partial^\lambda \zeta'(-n, w)}{\partial w^\lambda} \right)_{w=1}$$

für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n$, während nach dem Obigen

$$\frac{R_n^{(n+1)}(1)}{\underline{n+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}. \tag{24}$$

Weil infolge (14)

$$\frac{1}{\underline{\lambda}} \frac{\partial^\lambda \zeta(-s, w)}{\partial w^\lambda} = \binom{s}{\lambda} \zeta(-s+\lambda, w), \tag{25}$$

so ergiebt sich durch Differentation nach s

$$\frac{1}{\lfloor\lambda}\frac{\partial^\lambda \zeta'(-s,w)}{\partial w^\lambda} = \binom{s}{\lambda}\zeta'(-s+\lambda,w) - \binom{s}{\lambda}'\zeta(-s+\lambda,w),$$

wo $\frac{d}{ds}\binom{s}{\lambda} = \binom{s}{\lambda}'$ gesetzt wurde. Unter Berücksichtigung von (7), (8) und dem Umstande, dass $\zeta(s,1)$ gleich der RIEMANN'schen Function $\zeta(s)$ ist, erhält man also

$$\frac{R_n^{(n)}(1)}{\lfloor n} = \zeta'(0) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right), \tag{26}$$

$$\frac{R_n^{(n-\lambda)}(1)}{\lfloor n-\lambda} = \binom{n}{n-\lambda}\zeta'(-\lambda) - \binom{n}{n-\lambda}'\frac{(-1)^{\frac{\lambda+1}{2}}}{\lambda+1}B_{\frac{\lambda+1}{2}}, \tag{27}$$

wo unter $B_{\frac{n}{2}}$ für ein ungerades n die Null zu verstehen ist. Um schliesslich explicite Ausdrücke für die Grössen $\zeta'(-\lambda)$ zu erhalten, differentiire man die RIEMANN'sche Functionalgleichung

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s)$$

und setze s gleich einer positiven ganzen Zahl. Dann ergiebt sich

$$\zeta'(-2n) = (-1)^n\frac{\Gamma(2n+1)}{2(2\pi)^{2n}}\zeta(2n+1), \tag{28}$$

$$\zeta'(-2n+1) = (-1)^n\left[\frac{B_n}{2n}\log(2\pi) - \frac{B_n}{2n}\psi(2n) - 2\frac{\Gamma(2n)}{(2\pi)^{2n}}\zeta'(2n)\right]. \tag{29}$$

Diese beiden Formeln gelten für $n = 1, 2, \ldots, \infty$. Es erübrigt noch den Werth von $\zeta'(0)$ anzugeben. Um gleich ein allgemeineres Resultat zu erhalten, differentiiren wir die für $R(s) < 2$ convergirende Reihe

$$s\zeta(1-s,w) = -w^s + \frac{s}{2}w^{s-1} +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{s(w+n)^{s-1} + (w+n)^s - \frac{s}{2}(w+n)^{s-1} - (w+n+1)^s + \frac{s}{2}(w+n+1)^{s-1}\right\},$$

welche ein specieller Fall von (5) ist, und setzen $s = 1$. Dann ergiebt sich

$$\zeta(0,w)-\zeta'(0,w)=\frac{1}{2}-\left(w-\frac{1}{2}\right)\log w+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{1-\left(w+n+\frac{1}{2}\right)\log\frac{w+n+1}{w+n}\right\}.$$

Stellt man dies mit (7) und der bekannten Formel

$$\log\Gamma(w)=\log\sqrt{2\pi}-w+\left(w-\frac{1}{2}\right)\log w+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left(w+n+\frac{1}{2}\right)\log\frac{w+n+1}{w+n}-1\right\}$$

zusammen, so folgt

$$\zeta'(0,w)=\log\frac{\Gamma(w)}{\sqrt{2\pi}} \tag{30}$$

und als specieller Fall

$$\zeta'(0)=-\log\sqrt{2\pi}\,. \tag{31}$$

Die Formel (30) hat neuerdings Herr LERCH unter Benutzung einer von Herrn HERMITE gemachten Bemerkung in anderer Weise hergeleitet.

4. Wir gehen nunmehr zu dem allgemeinen Falle über, wo es sich um die Zurückführung der Functionen $\zeta^{(\nu)}(-n,w)$ auf die Transcendenten $\psi_\nu(w)$ handelt.

Differentiiren wir die Formel (25) m Mal nach s und setzen sodann s und λ beide gleich n, so erhalten wir unter Benutzung von (7) und (17)

$$\frac{1}{\underline{n}}\frac{\partial^n\zeta^{(m)}(-n,w)}{\partial w^n}=\sum_{\mu=0}^{m}(-1)^{m-\mu}\binom{m}{\mu}\binom{n}{n}^{(m-\mu)}\zeta^{(\mu)}(0,w)=$$

$$=\sum_{\mu=1}^{m}(-1)^{m-\mu}\binom{m}{\mu}\binom{n}{n}^{(m-\mu)}\left[\mu\int_1^w\psi_{\mu-1}(w)\,dw+\zeta^{(\mu)}(0,1)\right]+(-1)^m\binom{n}{n}^{(m)}\left(\frac{1}{2}-w\right),$$

wo

$$\binom{s}{n}^{(\lambda)}=\frac{d^\lambda}{ds^\lambda}\binom{s}{n}.$$

Hieraus folgt

$$\zeta^{(m)}(-n,w)=\sum_{\mu=1}^{m}(-1)^{m-\mu}\binom{m}{\mu}\binom{n}{n}^{(m-\mu)}\mu\,\underline{n}\int_1^w\cdots\int_1^w\psi_{\mu-1}(w)\,dw^{n+1}+R_n(w), \tag{32}$$

und mit Benutzung von (23)

$$\zeta^{(m)}(-n, w) = \tag{33}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{m} (-1)^{m-\mu} \binom{m}{\mu} \binom{n}{n}^{(m-\mu)} \mu \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \binom{n}{\nu} (w-1)^{n-\nu} \int_{1}^{w} (w-1)^{\nu} \psi_{\mu-1}(w)\, dw + R_n(w),$$

wo R eine gewisse ganze rationale Function bezeichnet, deren Gradzahl höchstens gleich $n+1$ ist und in welcher der Coefficient von x^{n+1} den folgenden Werth hat

$$\frac{R_n^{(n+1)}(1)}{\lfloor n+1} = (-1)^{m-1} \binom{n}{n}^{(m)}.$$

Die übrigen Coefficienten in der Entwickelung von R nach Potenzen von $w-1$ können durch Rechnungen ermittelt werden, welche den im vorigen § angestellten analog sind. Den Ausgangspunkt bildet die aus (32) unmittelbar einleuchtende Formel

$$R_n^{(\lambda)}(1) = \left(\frac{\partial^{\lambda} \zeta^{(m)}(\quad n, w)}{\partial w^{\lambda}} \right)_{w=1}$$

$$\lambda = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Man gelangt zu dem Resultate, dass die Coefficienten von R linear durch diejenigen Werthe ausgedrückt werden können, welche

$$(2\pi)^{-s},\ \Gamma(s),\ (s-1)\,\zeta(s)$$

und ihre Ableitungen erster bis $m$ter Ordnung für positive ganzzahlige Werthe von s annehmen.

III.

Erweiterung der Theorie der Gammafunction.

5. Die Untersuchungen dieses Abschnittes haben den Zweck, eine Menge von unendlichen Producten und Partialbruchreihen hervorzuheben, welche mit den vorher erörterten Functionen $\zeta'(-n, w)$ im engsten Zusammenhange stehen. Es bietet sich dabei eine Gelegenheit dar, von bekannten Ergebnissen aus den Arbeiten von Weierstrass und Herrn Mittag-Leffler über die Darstellbarkeit von eindeutigen analytischen Functionen in bemerkenswerther Weise Gebrauch zu machen.

Handelt es sich darum, eine ganze transcendente Function $P(x)$ herzustellen, welche die Nullstellen

$$a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots \qquad \lim |a_\nu| = \infty$$

von den resp. Ordnungen

$$m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \ldots$$

besitzt, so nimmt man nach dem Vorgange von Weierstrass zunächst die positiven ganzen Zahlen

$$n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots$$

so an, dass die Reihe

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{m_\nu}{x - a_\nu} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{n_\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} m_\nu \left[\frac{1}{x - a_\nu} + \frac{1}{a_\nu} + \frac{x}{a_\nu^2} + \cdots + \frac{x^{n_\nu - 1}}{a_\nu^{n_\nu}}\right]$$

in jedem endlichen Bereiche von x gleichmässig convergirt. Die gesuchte Function wird dann — abgesehen von einem Factor der Form $e^{G(x)}$, wo G eine ganze Function — durch den Ausdruck

$$P(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) e^{\frac{x}{a_\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{n_\nu}} \right\}^{m_\nu}$$

dargestellt, und es ist zugleich

$$\frac{d}{dx} \log P(x) = \Phi(x).$$

Das obige bleibt im wesentlichen noch bestehen, wenn man die Forderung fallen lässt, dass die m_ν *positive ganze* Zahlen bedeuten sollen. Alsdann hört das Product $P(x)$ indes auf eine ganze Function zu sein, und insbesondere hört seine Eindeutigkeit auf, falls die m_ν nicht alle ganze Zahlen sind.

Von diesen allgemeinen Formeln gelangt man nun zu den von uns beabsichtigten unendlichen Producten und Partialbruchreihen, durch die folgenden Annahmen hinsichtlich der Grössen a und m. Man setze $a_\nu = -\nu$ und $m_\nu = g(\nu)$, unter $g(\varrho)$ eine beliebige in ϱ ganze rationale Function $n$ten Grades verstanden. Alsdann können sämmtliche n_ν offenbar gleich $n+1$ angenommen werden, wodurch man die folgenden Ausdrücke bekommt:

$$(34)\quad \Phi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{g(\nu)}{x+\nu}\left(\frac{-x}{\nu}\right)^{n+1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} g(\nu)\left[\frac{1}{x+\nu} - \frac{1}{\nu} + \frac{x}{\nu^2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{\nu^{n+1}}\right],$$

$$(35)\quad P(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\nu}\right)^2 + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{\nu}\right)^{n+1}} \right\}^{g(\nu)} =$$

$$= \prod_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{\nu}\right) e^{g_n\left(\frac{x}{\nu}\right)} \right\}^{g(\nu)}.$$

$$g_n(\varrho) = -\varrho + \frac{1}{2}\varrho^2 - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}\varrho^{n+1}, \quad \log P(x) = \int_0^x \Phi(x)\, dx.$$

Es ist nun bemerkenswerth, dass die logarithmischen Ableitungen (34) aller dieser Producte (35) von einander nicht wesentlich verschieden sind, weil sie durch die logarithmische Ableitung von $\Gamma(x+1)$ in einfacher Weise ausgedrückt werden können. Um dies zu zeigen, setze man

$$g(\varrho) = c_0 + c_1\varrho + \ldots + c_n\varrho^n$$

und beachte die Formel

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{x+\nu}\left(\frac{-x}{\nu}\right)^m = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{x+\nu} - \frac{1}{\nu} + \frac{x}{\nu^2} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{m-1}}{\nu^m}\right] =$$

$$= -\psi(x) - S_1 + S_2 x - \ldots + (-1)^m S_m x^{m-1} = -\psi(x) + \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{\psi^{(\nu)}(0)}{\lfloor \nu} x^\nu ,$$

wo

$$(36)\quad S_1 = \lim_{k=\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k} - \log k\right),\ S_\lambda = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\lambda} = \zeta(\lambda) = (-1)^\lambda \frac{\psi^{(\lambda-1)}(0)}{\lfloor \lambda - 1},$$

während wir mit Gauss

$$(37)\qquad \psi(x) = \psi(x+1) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = -S_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{x+\nu}\right)$$

gesetzt haben. Alsdann ergiebt sich

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{g(\nu)}{x+\nu}\left(\frac{-x}{\nu}\right)^{n+1} = \sum_{\mu=0}^{n} c_\mu (-x)^\mu \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{x+\nu}\left(\frac{-x}{\nu}\right)^{n+1-\mu}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{n} c_\mu (-x)^\mu \left[-\psi(x) + \sum_{\nu=0}^{n-\mu} \frac{\psi^{(\nu)}(0)}{\lfloor \nu} x^\nu\right],$$

d. h.

$$(38)\qquad \Phi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{g(\nu)}{x+\nu}\left(\frac{-x}{\nu}\right)^{n+1} = -g(-x)\,\psi(x) + r(x),$$

wo

$$(39)\qquad r(x) = \sum_{\mu=0}^{n} c_\mu (-x)^\mu \sum_{\nu=0}^{n-\mu} \frac{\psi^{(\nu)}(0)}{\lfloor \nu} x^\nu ,$$

und hiermit ist die Richtigkeit unserer Behauptung erwiesen.

Hieraus lässt sich weiter folgern, *dass die Logarithmen der obigen Producte* (35) — *bis auf additive ganze rationale Functionen — linear mit constanten Coefficienten durch dieselben Integrale*

$$\int_0^x x^\nu \psi(x)\,dx = \int_1^{x+1} (x-1)^\nu \psi(x)\,dx$$

ausgedrückt werden können, wie die Functionen $\zeta'(-n, x+1)$. Man siehe die Formel (20)

6. Die einfachste Function, welche aus (35) durch Specialisirung ($g=-1$) erhalten werden kann, ist offenbar die Gammafunction oder genauer $e^{S_1 x}\Gamma(x+1)$. Auf Grund dessen, was im vorangehenden § dargelegt wurde, könnte man ohne Mühe zeigen, dass überhaupt alle in (35) enthaltenen Functionen mit einander durch functionale Beziehungen verbunden sind, von denen $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ die einfachste ist. Die bemerkenswerthesten unter diesen Functionen erhält man aber indem man eine bereits in § 2 bei Gelegenheit der Functionen $\zeta'(-n, x)$ aufgeworfene Frage beantwortet. Da es hier als zweckmässiger erscheint, an die Stelle der Gammafunction die Gauss'sche Function $\Pi(x) = \Gamma(x+1)$ treten zu lassen, wollen wir die betreffende Aufgabe nunmehr folgenderweise formuliren:

Giebt es eine unendliche Folge von Functionen $\Pi(x), \Pi_1(x) \ldots, \Pi_n(x), \ldots,$ *welche — bis auf einen Factor der Gestalt* $e^{G(x)}$, *wo* G *eine ganze Function — in der Form* (35) *darstellbar sind und die durch die Gleichungen*

$$\Pi_1(x+1) = \frac{\Pi_1(x)}{\Pi(x)},$$

$$\Pi_2(x+1) = \frac{\Pi_2(x)}{\Pi_1(x)},$$

. . . . . .

$$\Pi_n(x+1) = \frac{\Pi_n(x)}{\Pi_{n-1}(x)},$$

. . . . . .

bezeichneten Eigenschaften besitzen?

Da die logarithmischen Ableitungen $\psi_n(x)$ der verlangten Functionen die Gleichungen

$$\Delta \Psi_n(x) = \Psi_n(x+1) - \Psi_n(x) = -\Psi_{n-1}(x),$$

$$n = 1, 2, \ldots, \infty,$$

erfüllen und — bis auf eine additive ganze Function — der Form (34) sein müssen, so wollen wir zuvörderst die Frage beantworten, ob es allgemein möglich sei, eine unendliche Folge von Partialbruchreihen der Gestalt

$$\Phi_n(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{K_\nu^{(n)}}{x+\nu} + g_\nu(x,n) \right], \tag{40}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \infty,$$

unter denen $\Phi_0(x)$ als gegeben betrachtet wird, so zu bestimmen, dass $\Delta\Phi_n(x)$ bis auf eine additive ganze Function gleich $-\Phi_{n-1}(x)$ ist. Nach dem Beweise des MITTAG-LEFFLER'schen Satzes weiss man, dass die ganzen rationalen Functionen $g_\nu(x,n)$ immer, d. h. welche Werthe auch die Constanten K bekommen, in mannigfaltiger Weise so bestimmt werden können, dass die betreffenden Partialbruchreihen in jedem endlichen Bereiche von x gleichmässig convergiren. Damit nun die Differenz

$$\Delta\Phi_n(x) = -\frac{K_1^{(n)}}{x+1} - g_1(x,n) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{K_\nu^{(n)} - K_{\nu+1}^{(n)}}{x+\nu+1} + g_\nu(x+1,n) - g_{\nu+1}(x,n) \right]$$

bis auf eine additive ganze Function gleich der Reihe

$$\Phi_{n-1}(x) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{K_\nu^{(n-1)}}{x+\nu} + g_\nu(x,n-1) \right]$$

sei, ist es offenbar nothwendig und hinreichend, dass

$$K_1^{(n)} = K_1^{(n-1)} \text{ und } K_{\nu+1}^{(n)} - K_\nu^{(n)} = K_{\nu+1}^{(n-1)} \text{ für } \nu = 1, 2, \ldots, \infty, \tag{41}$$

$$n = 1, 2, \ldots, \infty.$$

Durch diese Gleichungen werden die Constanten K aller folgenden Reihen eindeutig bestimmt, sobald die Constanten der Reihe $\Phi_0(x)$ gegeben sind. Es ist also immer und nur auf eine Weise möglich, die Constanten K derart zu bestimmen, dass die betreffenden Partialbruchreihen der in Frage stehenden Forderung genügen.

Nehmen wir jetzt $\Phi_0(x)$ im Besonderen gleich $\psi(x)$ an, so sind die Constanten $K_\nu^{(0)}$ nach (37) alle gleich -1, und es ergeben sich aus (41), indem man zugleich die Eigenschaften

$$\Delta\binom{n}{n} = 1\,,\quad \Delta\binom{s}{n} = \binom{s+1}{n} - \binom{s}{n} = \binom{s}{n-1}$$

der Binomialcoefficienten beachtet, für die Constanten der folgenden Reihen die Ausdrücke

$$K_\nu^{(n)} = -\binom{\nu+n-1}{n} = (-1)^{n+1}\binom{-\nu}{n},\ \nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ \infty,$$

$$n = 1,\ 2,\ \ldots,\ \infty.$$

Da also $K_\nu^{(n)}$ eine in ν ganze rationale Function $n$ten Grades ist, so genügt es in (40)

$$g_\nu(x, n) = \binom{\nu+n-1}{n}\left[\frac{1}{\nu} - \frac{x}{\nu^2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{\nu^{n+1}}\right]$$

anzunehmen, um die folgende in jedem endlichen Bereiche von x gleichmässig convergirende Partialbruchreihe zu erhalten

$$\Phi_n(x) = -\sum_{\nu=1}^{x}\binom{\nu+n-1}{n}\left[\frac{1}{x+\nu} - \frac{1}{\nu} + \frac{x}{\nu^2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{\nu^{n+1}}\right] = \tag{42}$$

$$= (-1)^{n-1}\sum_{\nu=1}^{x}\binom{\nu}{n}\frac{1}{x+\nu}\binom{-x}{\nu}^{n-1}.$$

welche die Eigenschaft

$$\Delta\Phi_n(x) = -\Phi_{n-1}(x) + H_n(x) \tag{43}$$

besitzt und als specieller Fall in (34) enthalten ist. Da die Gradzahl des Polynoms $g_\nu(x, n)$ von ν unabhängig ist, so reducirt sich offenbar die ganze Function $H_n(x)$ auf eine *rationale* Function $(n-1)$ten Grades.

Diese Function kann leicht ermittelt werden. Weil die Reihe (42) als specieller Fall in (34) enthalten ist, so kann sie nach der Formel (38) folgenderweise durch $\psi(x)$ ausgedrückt werden:

$$\Phi_n(x) = (-1)^n \binom{x}{n} \psi(x) + r_n(x), \tag{44}$$

wo

$$r_n(x) = (-1)^{n+1} \sum_{\mu=0}^{n} \frac{\binom{0}{n}^{(\mu)}}{\lfloor \mu} x^\mu \sum_{\nu=0}^{n-\mu} \frac{\psi^{(\nu)}(0)}{\lfloor \nu} x^\nu, \tag{45}$$

$$\binom{x}{n}^{(\nu)} = \frac{d^\nu}{dx^\nu} \binom{x}{n}.$$

Aus den Gleichungen (43) und (44) ergiebt sich nun mit Benutzung der für $\binom{x}{n}$ und $\psi(x)$ geltenden Differenzengleichungen

$$H_n(x) = (-1)^n \frac{1}{n} \binom{x}{n-1} + r_{n-1}(x) + \Delta r_n(x). \tag{46}$$

Da die logarithmischen Ableitungen der zu bestimmenden Functionen $\Pi_n(x)$ bis auf additive ganze Functionen resp. gleich den Reihen $\Phi_n(x)$ sind, so unterscheidet sich $\log \Pi_n(x)$ vermöge (44) von dem Integrale

$$\varphi_n(x) = (-1)^n \int_0^x \binom{x}{n} \psi(x)\, dx \tag{47}$$

nur um eine ganze Function. Um diese ganze Function zu erhalten, beachte man die Functionalgleichungen

$$\Delta \varphi_n(x) = -\varphi_{n-1}(x) + (-1)^n \frac{1}{n} \int_0^x \binom{x}{n-1} dx + \alpha_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \infty,$$

$$\alpha_n = (-1)^n \int_0^1 \binom{x}{n} \psi(x)\, dx, \tag{48}$$

welche mit Hülfe der für $\binom{x}{n}$ und $\psi(x)$ geltenden Differenzengleichungen leicht verificirt werden können. Andererseits lässt sich eine Folge von ganzen rationalen Function $G_n(x)$, von denen $G_0(x) = 0$ sei, so bestimmen, dass

$$\Delta G_n(x) = -G_{n-1}(x) - (-1)^n \frac{1}{n!}\int_0^x \binom{x}{n-1} dx - \alpha_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \infty. \tag{49}$$

Setzt man nun schliesslich

$$\log H_n(x) = \varphi_n(x) + G_n(x),$$

so ist in der That

$$\Delta \log H_n(x) = -\log H_{n-1}(x)$$

und somit

$$H_n(x+1) = \frac{H_n(x)}{H_{n-1}(x)}$$

für $n = 1, 2, \ldots, \infty$.

Beachtet man, dass der Ausdruck

$$y = \int_0^x \binom{x}{n} dx - \beta_n \binom{x}{1},$$

wo

$$\beta_n = \int_0^1 \binom{x}{n} dx, \tag{50}$$

eine Lösung der Differenzengleichung

$$\Delta y = \int_0^x \binom{x}{n-1} dx$$

darstellt, so ergeben sich aus den Differenzengleichungen (49) für die $G_n(x)$ der Reihe nach die folgenden Ausdrücke

$$G_1(x) = \int_0^x \binom{x}{1} dx - (\alpha_1 + \beta_1 s_1)\binom{x}{1} + C_1,$$

$$G_2(x) = -s_2 \int_0^x \binom{x}{2} dx + (\alpha_1 + \beta_1 s_1)\binom{x}{2} - (\alpha_2 - \beta_2 s_2 + C_1)\binom{x}{1} + C_2,$$

und allgemein

$$G_n(x) = (-1)^{n+1} s_n \int_0^x \binom{x}{n} dx \tag{50}$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^{n-\nu} [\alpha_{\nu+1} + (-1)^{\nu} \beta_{\nu+1} s_{\nu+1} + C_\nu] \binom{x}{n-\nu} + C_n \qquad (C_0 = 0)$$

$$= (-1)^{n+1} s_n \int_0^x \binom{x}{n} dx + \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^{n-\nu} [\alpha_{\nu+1} + (-1)^{\nu} \beta_{\nu+1} s_{\nu+1}] \binom{x}{n-\nu}$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{n-\nu} C_\nu \binom{x}{n-\nu},$$

wo

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \tag{51}$$

und die C unbestimmte Constanten bedeuten. Fasst man die C als willkürliche periodische Functionen von x auf, so stellen diese Ausdrücke die allgemeinsten Lösungen der Differenzengleichungen (49) dar. Wir wollen uns indes auf die allgemeinsten *rationalen* Lösungen beschränken; alsdann ist $G_n(x)$ eine ganze Function $(n+1)$ten Grades mit n unbestimmten Constanten.

Um endlich explicite Ausdrücke für die $H_n(x)$ zu erhalten, beachte man die aus (44) und (47) sich ergebende Formel

$$\varphi_n(x) = s_n(x) + \int_0^x \Phi_n(x)\, dx,$$

wo

$$s_n(x) = (-1)^n \sum_{\mu=0}^{n} \frac{\binom{0}{n}^{(\mu)}}{\lfloor \mu} x^{\mu+1} \sum_{\nu=0}^{n-\mu} \frac{\Psi^{(\nu)}(0)}{\lfloor \nu} \frac{x^\nu}{\mu+\nu+1}. \tag{52}$$

Alsdann folgt aus (42):

$$\log \Pi_n(x) = \varphi_n(x) + G_n(x) = s_n(x) + G_n(x) + \int_0^x \Phi_n(x)\,dx \tag{53}$$

$$= \pi_n(x) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{\nu+n-1}{n} \left\{ \log\left(1+\frac{x}{\nu}\right) - \frac{x}{\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\nu}\right)^2 + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{\nu}\right)^{n+1} \right\},$$

wo

$$\pi_n(x) = s_n(x) + G_n(x). \tag{54}$$

Es ist also schliesslich

$$\Pi_n(x) = \frac{e^{\pi_n(x)}}{\prod_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \left(1+\frac{x}{\nu}\right) e^{g_n\left(\frac{x}{\nu}\right)} \right\}^{\binom{\nu+n-1}{n}}}, \tag{55}$$

$$g_n\left(\frac{x}{\nu}\right) = -\frac{x}{\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\nu}\right)^2 - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{\nu}\right)^{n+1},$$

$$\binom{\nu+n-1}{n} = \frac{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+n-1)}{1.\,2\ldots n},$$

wo $\pi_n(x)$ eine ganze Function $(n+1)$ten Grades bezeichnet, welche n willkürliche Constanten (im allgemeinsten Falle periodische Functionen) $C_1, \ldots, C_n$ enthält. Wünscht man, dass die sämmtlichen $\Pi_n(x)$ für $x=0$ den Werth 1 annehmen sollen, so müssen alle C gleich der Null gesetzt werden.

Für die logarithmischen Ableitungen dieser Functionen erhält man nach dem Obigen die einfachen Ausdrücke

$$\psi_n(x) = G'_n(x) + (-1)^n \binom{x}{n} \psi(x), \tag{56}$$

$$n = 1,\ 2,\ \ldots,\ \infty.$$

Da die ψ_n die Gleichungen

$$\Delta\psi_n(x) = -\psi_{n-1}(x), \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots,\ \infty,$$

erfüllen, so erhält man für die $G'_n(x)$ die Differenzengleichungen

$$\Delta G'_n(x) = -G'_{n-1}(x) + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\binom{x}{n-1}, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots,\ \infty,$$

woraus — da $G'_0(x) = 0$ — sich ein Ausdruck der folgenden Form ergiebt

$$(57) \qquad G'_n(x) = (-1)^{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\binom{x}{n} + \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{n-\nu} K_\nu \binom{x}{n-\nu}.$$

Weil jede ganze Function $n$ten Grades mittelst der Binomialcoefficienten in der Form

$$g(x) = c_0 + c_1\binom{x}{1} + \ldots + c_n\binom{x}{n}$$

darstellbar ist, so kann man auf Grund des in § 5 Dargelegten und der obigen Ausdrücke für die logarithmischen Ableitungen der Π-Functionen ohne Mühe finden, *dass überhaupt alle in der allgemeinen Formel* (35) *enthaltenen Functionen — bis auf Factoren der Form* $e^{G(x)}$, *wo* G *eine ganze rationale Function — als Producte von* Π*-Functionen mit constanten Exponenten ausgedrückt werden können.*

Setzt man $\Gamma_n(x) = \Pi_n(x-1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$, so hat man eine unendliche Folge von Functionen mit den Eigenschaften

$$\Gamma_n(x+1) = \frac{\Gamma_n(x)}{\Gamma_{n-1}(x)}.$$

Es kann gezeigt werden, dass $\Gamma_n(x)$ in der Form

$$(58) \qquad \Gamma_n(x) = \frac{e^{\gamma_n(x)}}{x\prod_{\nu=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{\nu}\right)e^{-\frac{x}{\nu}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\nu}\right)^2-\ldots\pm\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{\nu}\right)^{n+1}}\right\}^{\binom{\nu+n}{n}}}$$

darstellbar ist, wo $\gamma_n(x)$ eine ganze rationale Function $(n+1)$ten Grades mit n unbestimmten Constanten bedeutet. Man kann diese Constanten beispielsweise so bestimmen, dass die sämmtlichen Gammafunctionen für $x = 1$ den Werth 1 annehmen.

7. Es ist nicht unsere Absicht, bei dieser Gelegenheit eine eingehendere Untersuchung der Eigenschaften der im vorangehenden § erörterten Functionen vorzunehmen. Ein besonderes Interesse bietet beispielsweise die Frage dar, wie sich die Π-Functionen oder überhaupt alle in der allgemeinen

Formel (35) enthaltenen Transcendenten, für unendlich grosse Werthe des Argumentes verhalten. Diese Frage kann vollständig mit Hülfe gewisser asymtotischen Formeln erledigt werden, unter denen die bekannte STIRLING'sche Formel als der einfachste specielle Fall zu betrachten ist. Der Weg, auf dem man die betreffenden Formeln, *bei denen complexe Werthe des Argumentes keineswegs ausgeschlossen sind*, erhalten kann, soll indes im § 11 dieser Arbeit angegeben werden. Im übrigen wollen wir uns gegenwärtig auf die folgende Darlegung des Zusammenhanges zwischen den in Frage stehenden und den trigonometrischen Functionen beschränken.

Zu dem Ende betrachten wir die Ausdrücke (34) und (35) für den Fall, dass der Index ν alle positiven und *negativen* ganzzahligen Werthe durchläuft. Um nicht den Werth $\nu = 0$ in exceptioneller Weise behandeln zu brauchen, ersetzen wir zugleich ν durch $w + \nu$, was auch schon bei den Untersuchungen des vorigen § hätte geschehen können. Wir betrachten also die Ausdrücke

$$\Phi(x,w) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{g(w+\nu)}{x+w+\nu}\left(\frac{-x}{w+\nu}\right)^{n+1} = \tag{59}$$

$$= \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} g(w+\nu)\left[\frac{1}{x+w+\nu} - \frac{1}{w+\nu} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{(w+\nu)^{n+1}}\right],$$

$$P(x,w) = \prod_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \left\{\left(1+\frac{x}{w+\nu}\right) e^{g_n\left(\frac{x}{w+\nu}\right)}\right\}^{g(w+\nu)}, \tag{60}$$

$$g_n(\varrho) = -\varrho + \tfrac{1}{2}\varrho^2 - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}\varrho^{n+1}, \quad \log P(x,w) = \int_0^x \Phi(x,w)\,dx.$$

Offenbar sind Φ und P periodische Functionen von dem Parameter w, falls die Coefficienten in $g(\varrho)$ von w unabhängig sind.

Auch hier ist der Umstand von Bedeutung, dass die logarithmischen Ableitungen (59) aller dieser Producte (60) von einander nicht wesentlich verschieden sind, weil sie durch $\operatorname{cotg}\pi(x+w)$ in einfacher Weise ausgedrückt werden können. Setzt man nämlich

$$g(\varrho) = c_0 + c_1\varrho + \ldots + c_n\varrho^n$$

und beachtet die Formel

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{1}{x+w+\nu}\left(\frac{-x}{w+\nu}\right)^m = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\left[\frac{1}{x+w+\nu} - \frac{1}{w+\nu} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{m-1}}{(w+\nu)^m}\right]$$

$$= \pi \operatorname{cotg} \pi (x+w) - \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{S^{(\nu)}(w)}{\underline{\nu}} x^\nu ,$$

wo

$$S(w) = \pi \operatorname{cotg} \pi w ,$$

so folgt

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{g(w+\nu)}{x+w+\nu}\left(\frac{-x}{w+\nu}\right)^{n+1} = \sum_{\mu=0}^{n} c_\mu (-x)^\mu \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{1}{x+w+\nu}\left(\frac{-x}{w+\nu}\right)^{n+1-\mu} =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{n} c_\mu (-x)^\mu \left[\pi \operatorname{cotg} \pi (x+w) - \sum_{\nu=0}^{n-\mu} \frac{S^{(\nu)}(w)}{\underline{\nu}} x^\nu\right],$$

d. h.

$$\Phi(x,w) = g(-x)\, \pi \operatorname{cotg} \pi (x+w) + r(x,w) , \tag{61}$$

wo

$$r(x,w) = -\sum_{\mu=0}^{n} c_\mu (-x)^\mu \sum_{\nu=0}^{n-\mu} \frac{S^{(\nu)}(w)}{\underline{\nu}} x \tag{62}$$

Es ist also

$$\prod_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \left\{\left(1+\frac{x}{w+\nu}\right) e^{g_n\left(\frac{x}{w+\nu}\right)}\right\}^{g(w+\nu)} = e^{s(x,w)+\int_0^x g(-x)\,\pi \operatorname{cotg} \pi (x+u)\,dx} , \tag{63}$$

wo

$$s(x,w) = \int_0^x r(x,w)\,dx = \sum_{\mu=0}^{n} c_\mu (-x)^{\mu+1} \sum_{\nu=0}^{n-\mu} \frac{S^{(\nu)}(w)}{\underline{\nu}} \frac{x^\nu}{\mu+\nu+1} . \tag{64}$$

Nimmt man in (63) $n=0$ und $g=-1$ an, so erhält man die Function

$$P_0(x,w) = \frac{e^{x\pi \operatorname{cotg} \pi w}}{\prod_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \left(1+\frac{x}{w+\nu}\right) e^{-\frac{x}{w+\nu}}} \cdot \frac{\sin \pi w}{\sin \pi (x+w)},$$

von welcher ausgehend eine unendliche Folge von Functionen mit den Eigenschaften

$$P_n(x+1,w) = \frac{P_n(x,w)}{P_{n-1}(x,w)}, \qquad n = 1, 2, \ldots \infty,$$

bestimmt werden kann. Durch diese können dann alle übrigen in der allgemeinen Formel (60) enthaltenen Transcendenten ausgedrückt werden.

8. Die in der vorliegenden Arbeit gebrauchten Methoden sind nicht auf den hier behandelten Gegenstand allein beschränkt. Es giebt in der That eine Menge von Reihen, welche ähnliche Untersuchungen veranlassen können, wie die Reihe (1). Als Beispiele mögen, ausser der schon in § 1 angeführten allgemeinen Reihe, die folgenden dienen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{q^\nu}{x}+\frac{x}{q^\nu}\right)^s}, \quad \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{1}{\left(\frac{q^\nu}{x}+\frac{x}{q^\nu}\right)^s}, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{x}{q^\nu}\right)^s}, \qquad q|<1,$$

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(x+\mu\omega+\nu\omega')^s}, \quad \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{1}{(x+\mu\omega+\nu\omega')^s},$$

sowie die noch allgemeineren Reihen, welche hieraus entstehen indem man die Ausdrücke

$$\frac{q^\nu}{x}+\frac{x}{q^\nu}, \quad 1+\frac{x}{q^\nu}, \quad x+\mu\omega+\nu\omega'$$

durch rationale Functionen derselben ersetzt.

Löst man das Problem, welches an der Spitze der Untersuchungen der beiden vorigen Paragraphen steht, für die Thetafunctionen, so gelangt man, wie wir es jetzt in aller Kürze andeuten wollen, zu einer erheblichen Menge von bemerkenswerthen Transcendenten, welche sich zu den Theta- beziehungsweise den elliptischen Functionen ähnlich verhalten, wie die in diesem Ab-

schnitte erörterten Transcendenten zu den Gamma- und den trigonometrischen Functionen, und von welchen die Theta- resp. die elliptischen Functionen sogar als die einfachsten speciellen Fälle betrachtet werden können.

Von dem aus der Theorie der Thetafunctionen bekannten Producte

$$P_0(x) = \prod_{\nu=0}^{\infty} \left\{ 1 + p^{2\nu+1} x \right\} \qquad |p| < 1$$

ausgehend, suchen wir zunächst eine unendliche Folge von Functionen der Form

$$P_n(x) = \prod_{\nu=0}^{\infty} \left\{ 1 + p^{2\nu+1} x \right\}^{g_n(\nu)}$$

derart zu bestimmen, dass

$$P_n\left(\frac{x}{p^2}\right) = P_{n-1}(x)\, P_n(x), \qquad n = 1, 2, \ldots, \infty. \tag{65}$$

Bezeichnet man die logarithmische Ableitung von P_n durch Φ_n, so ist

$$\Phi_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g_n(\nu)\, p^{2\nu+1}}{1 + p^{2\nu+1} x},$$

$$\Phi_n\left(\frac{x}{p^2}\right) - p^2 \Phi_n(x) = p^2 \Phi_{n-1}(x).$$

Damit nun der Ausdruck

$$\Phi_n\left(\frac{x}{p^2}\right) - p^2 \Phi_n(x) = \frac{g_n(0)}{1 + p^{-1} x} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{[g_n(\nu) - g_n(\nu-1)]\, p^{2\nu+1}}{1 + p^{2(\nu-1)+1} x}$$

gleich

$$p^2 \Phi_{n-1}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g_{n-1}(\nu)\, p^{2(\nu+1)+1}}{1 + p^{2\nu+1} x}$$

sei, muss

$$g_n(0) = 0 \text{ und } g_n(\nu) - g_n(\nu-1) = g_{n-1}(\nu-1), \quad \nu = 1, 2, \ldots, \infty,$$

$$n = 1, 2, \ldots, \infty.$$

Die Constanten g aller folgenden Reihen werden durch diese Gleichungen eindeutig bestimmt, sobald die Constanten der Reihe Φ_0 gegeben sind. Da diese Constanten in unserem Falle alle gleich 1 sind, so erhält man unter Berücksichtigung der bekannten Eigenschaften der Binomialcoefficienten

$$g_n(\nu) = \binom{\nu}{n}.$$

Für die Functionen Φ und P ergeben sich also die sehr einfachen, beständig convergirenden Ausdrücke

$$\Phi_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu}{n} \frac{p^{2\nu+1}}{1+p^{2\nu+1}x}, \tag{66}$$

$$P_n(x) = \prod_{\nu=0}^{\infty} \left\{1+p^{2\nu+1}x\right\}^{\binom{\nu}{n}} = \prod_{\nu=0}^{\infty} \left\{1+p^{2\nu+1}p^{\overline{2n}}x\right\}^{\binom{\nu+n}{n}}. \tag{67}$$

Setzt man nun andererseits

$$Q_0(x) = \prod_{\nu=0}^{\infty} \left\{1+\frac{p^{2\nu+1}}{x}\right\}$$

und stellt sich die Aufgabe, eine unendliche Folge von Functionen der Form

$$Q_n(x) = \prod_{\nu=0}^{\infty} \left\{1+\frac{p^{2\nu+1}}{x}\right\}^{g_n(\nu)}$$

so zu bestimmen, dass ebenfalls

$$Q_n\left(\frac{x}{p^2}\right) = Q_{n-1}(x)\, Q_n(x), \qquad n = 1, 2, \ldots, \infty, \tag{68}$$

so ergiebt sich durch die soeben angewandte Methode

$$Q_n(x) = \prod_{\nu=0}^{\infty} \left\{1+\frac{p^{2\nu+1}}{x}\right\}^{(-1)^n\binom{\nu+n}{n}} \tag{69}$$

Setzen wir nun $p = e^{\alpha}$, $x = e^{-2u}$ und

$$\Theta_n(u) = P_n\left(e^{-2u}\right) Q_n\left(e^{-2u}\right), \tag{70}$$

so besitzen alle diese Functionen die Periode πi und ausserdem ist

$$\Theta_n(u+a) = \Theta_{n-1}(u)\,\Theta_n(u), \qquad n = 1, 2, \ldots, \infty, \tag{71}$$

und hiermit kann unseres Problem für die Thetafunctionen als gelöst betrachtet werden, denn der Ausdruck

$$\Theta_0(u) = \prod_{\nu=0}^{\infty} \left\{1 + e^{(2\nu+1)a+2u}\right\}\left\{1 + e^{(2\nu+1)a-2u}\right\}$$

unterscheidet sich bekanntlich nur um einen constanten Factor von der gewöhnlichen Thetareihe:

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{a\nu^2+2\nu u}.$$

Setzt man weiter

$$F_n(u) = \frac{\Theta_n(u)}{\Theta_n\left(u+\frac{\pi i}{2}\right)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \infty,$$

so besitzen alle diese Functionen ebenfalls die Periode πi und die Eigenschaften

$$F_n(u+a) = F_{n-1}(u)\,F_n(u), \qquad n = 1, 2, \ldots, \infty.$$

Die erste von ihnen

$$F_0(u) = \frac{\Theta_0(u)}{\Theta_0\left(u+\frac{\pi i}{2}\right)}$$

ist aber zugleich eine *doppelt periodische* Function, welche von $\lambda\mathrm{am}\,(u)$ nicht wesentlich verschieden ist.

IV.

Asymtotische Formeln für die im vorigen Abschnitte eingeführten Transcendenten.

9. Die Function $\zeta(s, w)$ ist für die Theorie der bestimmten Integrale von hervorragender Bedeutung. In diesem Abschnitte sollen einige mit dieser Function im Zusammenhange stehende Integrale verwendet werden, die wir in der bisherigen Litteratur selten oder gar nicht angetroffen haben.

Unter den verschiedenen die RIEMANN'sche Function $\zeta(s)$ darstellenden Ausdrücken ist der folgende von Herrn JENSEN [1]) gegebene, seiner Allgemeingültigkeit und Einfachheit halber, insbesondere bemerkenswerth

$$(s-1)\,\zeta(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 z^{1-s}\,dz, \qquad 0<a<1.$$

Diese Formel kann leicht verallgemeinert werden, so dass eine für $\zeta(s, w)$ gültige Darstellung gewonnen wird. Mit Hülfe des CAUCHY'schen Satzes ergiebt sich zunächst für $R(s)>1$ und $R(w)>0$

$$\zeta(s, w) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} z^{-s}\,\pi \operatorname{cotg} \pi (z-w)\,dz, \quad R(w-1)<a<R(w),$$

wo a jedenfalls auch >0 sein muss. Während aber die rechte Seite nur für $R(s)>1$ einen Sinn hat, erhält man daraus durch partielle Integration das folgende in jedem endlichen Bereiche von s gleichmässig convergirende Integral

[1]) L'intermédiaire des Mathématiciens, T. II. N:o 9. S. 346. Sept. 1895.

$$(72) \qquad (s-1)\,\zeta(s,w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\left(\frac{\pi}{\sin\pi\,(z-w)}\right)^2 z^{1-s}\,dz\,,$$

$$a>0\,,\quad R(w-1)<a<R(w)\,.$$

Mit Benutzung dieses Ausdruckes kann eine von Herrn HURWITZ[1]) herrührende Verallgemeinerung der RIEMANN'schen Functionalgleichung folgenderweise erhalten werden, wobei zugleich vorausgesetzt werden muss, dass w eine reelle die Bedingung $0<w\leq 1$ erfüllende Grösse sei. Das Integral ändert seinen Werth nicht, wenn der Integrationsweg so geändert wird, dass vom Punkte $(0,-\infty)$ nach $(0,-\varrho)$ in gerader Linie integrirt wird, unter ϱ eine die Grösse w nicht übertreffende positive Zahl verstanden; alsdann von $(0,-\varrho)$ um $(0,0)$ als Mittelpunkt im Halbkreise nach $(0,\varrho)$, und zwar so. dass der zwischen 0 und w liegende Theil der reellen Axe überschritten wird; schliesslich in gerader Linie von $(0,\varrho)$ nach $(0,+\infty)$. Ersetzt man zugleich s durch $1-s$, so hat man also

$$-s\,\zeta(1-s,w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{-i\varrho}\left(\frac{\pi}{\sin\pi\,(z-w)}\right)^2 z^s\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho)}\left(\frac{\pi}{\sin\pi\,(z-w)}\right)^2 z^s\,dz$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{i\varrho}^{i\infty}\left(\frac{\pi}{\sin\pi\,(z-w)}\right)^2 z^s\,dz\,.$$

Nehmen wir $R(s)>1$ an, so nähert sich das zweite über den Halbkreis erstreckte Integral bei abnehmendem ϱ der Grenze Null. Setzt man im ersten Integrale $z=-ix$, im dritten $z=ix$ und drückt $\sin\pi\,(z-w)$ durch die Exponentialfunction aus, so erhält man durch Reihenentwickelung und gliedweise Integration nach einfachen Rechnungen die Formel

$$(73) \qquad \zeta(1-s,w) = 2\,(2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi\left(\frac{s}{2}-2nw\right)}{n^s}\,,$$

welche für $w=1$ in die RIEMANN'sche Functionalgleichung übergeht.

---

[1]) *Einige Eigenschaften der Dirichletschen Functionen, die bei der Bestimmung der Classenanzahlen binärer quadratischer Formen auftreten.* (Zeitschrift für Math. und Physik. 27. Jahrgang. 1882). Man siehe auch: LIPSCHITZ, *Untersuchungen der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen* (Crelles Journal. Bd 105), wo eine analoge Formel für eine allgemeinere Reihe hergeleitet wird, sowie einen Aufsatz von Herrn LERCH (Acta Math. Bd 11).

Beschränkt man s auf die Halbebene $R(s) > a$, wo a eine die Einheit übertreffende positive Zahl bedeutet, so zeigt uns die Reihe (1) ohne weiteres, dass der absolute Betrag von $\zeta(s, w)$ unter einer endlichen Grenze bleibt, wofern zugleich w eine reelle positive Grösse ist, was überall im Folgenden der Einfachheit halber vorausgesetzt wird. Die Formel (73) kann nun einen für die Anwendung dieser Function in der Theorie der bestimmten Integrale wichtigen Aufschluss über das Verhalten derselben für unendlich grosse, der Halbebene $R(s) < 0$ angehörende Werthe von s geben, wobei w zunächst die Bedingung $0 < w \leq 1$ erfüllen muss. Zu dem Ende setze man $s = u + iv$ und beachte die Formeln

$$(74) \qquad \Gamma(s) = \left| s^{u-\frac{1}{2}} \right| . e^{-\frac{\pi}{2}|v|} . \left| \sqrt{2\pi} + \varepsilon \right|,$$

$$(75) \qquad \left| \sin \pi (s-a) \right| = \tfrac{1}{2} e^{\pi|v|} \left| e^{\pm \pi a i} + \varepsilon \right|,$$

wo ε gegen die Null gleichmässig abnehmende Grössen bezeichnet, wenn u zwischen beliebigen endlichen Grenzen bleibt, während v ohne Ende wächst [1]). Aus (73) ergiebt sich alsdann Folgendes: *Beschränkt man s auf einen beliebigen, der Halbebene $R(s) < 0$ angehörenden, zur imaginären Axe parallelen Streifen von endlicher Breite, so nähert sich $\zeta(s, w)$, wenigstens nach Multiplication mit einer passenden Potenz von s, bei wachsendem $|s|$ der Grenze Null.* Mit Hülfe der Formel $\zeta(s, w+1) = -w^{-s} + \zeta(s, w)$ findet man, dass dieses Resultat für alle positiven Werthe von w seine Gültigkeit beibehält.

Es bleibt aber nach dem Obigen unentschieden, wie sich $\zeta(s, w)$ in dem Parallelstreifen $0 \leq R(s) \leq 1$ bei wachsendem $|s|$ verhält. Um hierüber einen Aufschluss zu gewinnen, betrachte man die schon früher benutzte in der Halbebene $R(s) > -1$ convergirende Reihe

$$(s-1)\,\zeta(s, w) = w^{1-s} + \frac{s-1}{2} w^{-s} + \sum_{n=0}^{\infty} G(w+n, s)$$

$$= (w+m)^{1-s} + \frac{s-1}{2} (w+m)^{-s} + \sum_{n=0}^{m-1} (s-1)(w+n)^{-s} + \sum_{n=m}^{\infty} G(w+n, s),$$

[1]) Siehe hinsichtlich der ersteren Formel meine Arbeit *Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen erster Ordnung.* (Acta Math. Bd 15.)

wo

$$G(w,s) = (s-1)\,w^{-s} + (w+1)^{1-s} - w^{1-s} + \frac{s-1}{2}(w+1)^{-s} - \frac{s-1}{2}w^{-s}.$$

Für $w > 1$ ergiebt sich leicht

$$G(w,s) = \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{(1-s)(1-s-1)\dots(1-s-\nu)}{\lfloor \nu} \left(\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{2}\right) w^{-s-\nu}.$$

Es ist also

$$|G(w,s)| < \left| s(s-1)^2 w^{-s-2} \right| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(|s|+2)(|s|+3)\dots(|s|+\nu+1)}{\lfloor \nu} w^{-\nu} =$$

$$\left| s(s-1)^2 w^{-s-2} \right| \left(\frac{w}{w-1}\right)^{|s|+2}.$$

und mithin

$$|\zeta(s,w)| < \left| \frac{(w+m)^{1-s}}{s-1} + \frac{1}{2}(w+m)^{-s} + \sum_{n=0}^{m-1} (w+n)^{-s} \right|$$

$$+ |s(s-1)| \left(\frac{w+m}{w+m-1}\right)^{|s|+2} \sum_{n=m}^{\infty} \left| (w+n)^{-s-2} \right|.$$

Nimmt man m hinreichend gross an, so kann $\log \frac{w+m}{w+m-1}$ beliebig klein gemacht werden. Es ergiebt sich daher der Satz:

Beschränkt man s auf den Parallelstreifen $0 \leq R(s) \leq 1$, so nähert sich $e^{-\varepsilon|s|}\zeta(s,w)$, unter ε eine beliebig kleine positive Zahl verstanden, bei wachsendem $|s|$ der Grenze Null.

Stellt man dies mit dem früher Dargelegten zusammen, so hat sich als allgemeines Resultat ergeben, *dass $e^{-\varepsilon|s|}\zeta(s,w)$ bei wachsendem $|s|$ gegen die Null convergirt, wofern s auf irgend welche durch $R(s) \geq -k$ definirte Halbebene beschränkt ist, unter k eine beliebig grosse aber bestimmte positive Zahl verstanden.*

10. Auf Grund dieses Resultates ergeben sich leicht einige allgemeine asymtotische Formeln, deren Anzahl übrigens ohne Mühe erheblich vermehrt werden könnte. Durch dieselben Betrachtungen, welche sich im folgenden

Paragraphen für einen analogen Fall in ausführlicher Form finden, ergiebt sich, dass jedes Integral der Form

$$S_a(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z)\, \zeta(\alpha_1 z + \beta_1, w) \ldots \zeta(\alpha_n z + \beta_n, w)\, x^{-z}\, dz\,,$$

wo $\alpha_1 \ldots, \alpha_n$ beliebige reelle Zahlen bedeuten, in jedem endlichen Theile des durch die Ungleichheiten

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$$

definirten Bereiches von $x = x\, e^{i\theta}$ gleichmässig convergirt, und dass S_b, falls $b > a$, gleich ist dem Integrale S_a, vermehrt um die Residuen, welche zu den im Parallelstreifen $a < R(z) < b$ liegenden Unendlichkeitsstellen des Integranden gehören.

Bedeutet a eine willkürliche positive Zahl, so hat man

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z)\, x^{-z}\, dz\,,$$

wofern zugleich x auf den soeben angegebenen Bereich beschränkt wird. Mit Hülfe dieser Formel ergiebt sich

$$(76) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(w+n)^{\varkappa} x}}{(w+n)^{s}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z)\, (w+n)^{-s-\varkappa z}\, x^{-z}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z)\, \zeta(\varkappa z + s, w)\, x^{-z}\, dz\,,$$

$$R(\varkappa a + s) > 1\,.$$

Verschiebt man nun den Integrationsweg dieses Integrals $S_a(x)$ so weit in der negativen Richtung der reellen Axe, dass a einen zwischen den ganzen Zahlen $-k-1$ und $-k$ liegenden Werth erhält, so folgt auf Grund des Cauchy'schen Satzes

$$(77)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(w+n)^{\varkappa} x}}{(w+n)^{s}} = \Gamma\left(\frac{1-s}{\varkappa}\right)\frac{1}{\varkappa}\, x^{\frac{s-1}{\varkappa}} + \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu} \frac{\zeta(s-\nu\varkappa, w)}{\lfloor \nu}\, x^{\nu}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z)\, \zeta(\varkappa z + s, w)\, x^{-z}\, dz\,,$$

$$-k-1 < a < -k.$$

Bei abnehmendem $|x$ nähert sich das Restglied S_a der Grenze Null, und zwar so schnell, dass noch $x^{-k} S_a$ gegen die Null convergirt.

Setzt man im Besonderen $s=0, w=1, \varkappa=2$, so erhält man eine asymtotische Formel für die von RIEMANN mit $\psi(x)$ bezeichneten Function.

Nimmt man $w=1, \varkappa=2$ an und lässt s gegen Eins convergiren, so geht (77), abgesehen von der Form des Restgliedes, in eine Formel des Herrn SONIN über.[1]

Nehmen wir in der Formel (76) $w=s=\varkappa=1$ an, so erhalten wir

$$-\log(1-e^{-x}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z)\, \zeta(z+1)\, x^{-z}\, dz\,,$$

woraus weiter folgt, indem man x durch $(w+n)^{\varkappa} x$, $n=0, 1, \ldots \infty$, ersetzt und die so erhaltenen Gleichungen addirt:

$$(78)\qquad -\log \prod_{n=0}^{\infty} \left\{1 - e^{-(w+n)^{\varkappa} x}\right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z)\, \zeta(z+1)\, \zeta(\varkappa z, w)\, x^{-z}\, dz\,.$$

$$a > \frac{1}{\varkappa} > 0\,.$$

Verschiebt man nun wieder den Integrationsweg in der negativen Richtung der reellen Axe, so folgt die asymtotische Formel

[1] Cf. CRELLE's Journal, Bd 116, S. 147.

$$(79)\qquad -\log\prod_{n=0}^{\infty}\left\{1-e^{-(w+n)^{\varkappa}x}\right\}=\varkappa\log\frac{\Gamma(w)}{\sqrt{2\pi}}+\left(w-\frac{1}{2}\right)\log x$$

$$+\Gamma\left(\frac{1}{\varkappa}+1\right)\zeta\left(\frac{1}{\varkappa}+1\right)x^{-\frac{1}{\varkappa}}$$

$$+\sum_{\nu=1}^{k}\frac{(-1)^{\nu}}{\lfloor\nu}\zeta(1-\nu)\,\zeta(-\nu\varkappa,w)\,x^{\nu}+\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Gamma(z)\,\zeta(z+1)\,\zeta(\varkappa z,w)\,x^{-z}\,dz,$$

$$-k-1<a<-k,$$

wo das Restglied bei abnehmendem x sich ebenso verhält, wie das Restglied der Formel (77).

Setzt man in (76) $s=0, w=1, \varkappa=1$, so folgt

$$\frac{1}{e^{x}-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Gamma(z)\,\zeta(z)\,x^{-z}\,dz,\qquad a>1,$$

und hieraus

$$(80)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{e^{(w+n)^{\varkappa}x}-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Gamma(z)\,\zeta(z)\,\zeta(\varkappa z,w)\,x^{-z}\,dz,$$

$$a>1, a>\frac{1}{\varkappa}.$$

Durch Verschiebung des Integrationsweges ergiebt sich

$$(81)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{e^{(w+n)^{\varkappa}x}-1}=\Gamma\left(\frac{1}{\varkappa}+1\right)\zeta\left(\frac{1}{\varkappa}\right)x^{-\frac{1}{\varkappa}}+\zeta(\varkappa,w)\,x^{-1}$$

$$+\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{\nu}\frac{\zeta(-\nu)\,\zeta(-\nu\varkappa,w)}{\lfloor\nu}x^{\nu}+\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Gamma(z)\,\zeta(z)\,\zeta(\varkappa z,w)\,x^{-z}\,dz,$$

$$-k-1<a<-k,$$

falls $\varkappa$ von 1 verschieden ist. Ist aber $\varkappa=1$, so ist $z=1$ eine zweifache Unendlichkeitsstelle des Integranden, und man erhält in diesem Falle

$$(82)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{(w+n)x}-1} = -[\psi(w)+\log x]\,x^{-1} + \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu} \frac{\zeta(-\nu)\,\zeta(-\nu,w)}{\nu!}\,x^{\nu}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z)\,\zeta(z)\,\zeta(z,w)\,x^{-z}\,dz\,.$$

Setzt man $w=1$, so findet man unter Berücksichtigung von $\zeta(-2\nu)=0$ und $\zeta(1-2\nu)=(-1)^{\nu}\frac{B_\nu}{2\nu}$, dass diese Formel, abgesehen von der Form des Restgliedes, in die bekannte asymtotische Formel des Herrn Schlömilch für die Lambert'sche Reihe übergeht.

Als ein interessanter Umstand verdient hier angeführt zu werden, dass es Herrn Levi-Civita gelungen ist, mit der Lambert'schen Reihe als Ausgangspunkt eine Formel für die Anzahl der zwischen gegebenen Grenzen enthaltenen Primzahlen herzustellen[1]). Nach dem Obigen existirt nun in der That auch zwischen dieser Reihe und der Function $\zeta(s)$, von welcher Riemann ausgeht, ein gewisser Zusammenhang.

11. Es wurde schon früher erwähnt, dass asymtotische Formeln hergestellt werden können, von denen die Stirling'sche Formel der einfachste specielle Fall ist und mittelst deren man das Verhalten aller in der allgemeinen Formel (35) enthaltenen Functionen für unendlich grosse Werthe des Argumentes beurtheilen kann, wobei nicht — wie es gewöhnlich bei der Herleitung der Stirling'schen Formel geschieht — complexe Werthe des Argumentes ausgeschlossen sind. Das angeführte ist zugleich eine neue Bestätigung dafür, dass die Theorie der betreffenden Functionen in der That eine natürliche Erweiterung der Theorie der Euler'schen Gammafunction ist. Der innige Zusammenhang, in welchem alle diese Transcendenten mit der Function $\zeta(s,w)$ stehen, wird sich bei der Herleitung ebenfalls von einer neuen Seite herausstellen.

In § 6 wurde gezeigt, dass alle in (35) enthaltenen Functionen — bis auf Factoren der Form $e^{G(x)}$, wo G eine ganze rationale Function — als Producte von H-Functionen mit constanten Exponenten ausgedrückt werden können. Bei den Untersuchungen dieses § ist es jedoch zweckmässiger, die genannten Functionen auf gewisse andere ebenso einfache Ausdrücke wie die $H_n(x)$ zu-

[1]) Rendiconti della Accad. dei Lincei. Seduta del 7 aprile 1895.

rückzuführen, und zwar auf diejenigen, welche entstehen indem man in (35) $g(\nu) = \nu^n$ annimmt, d. h. auf die Producte

$$(83) \qquad P_n(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\nu}\right)^2 - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{\nu}\right)^{n+1}} \right\}^{\nu^n},$$

$$n = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ \infty.$$

Nach den Formeln (38) und (39) können nämlich die logarithmischen Ableitungen und daher auch die Logarithmen dieser Producte durch die logarithmische Ableitung der Gauss'schen Π-Function besonders einfach ausgedrückt werden, indem man hat

$$(84) \qquad (-1)^n \log P_n(x) = \psi(0) \frac{x^{n+1}}{n+1} - \int_0^x x^n \psi(x)\, dx.$$

Die Logarithmen der übrigen in (35) enthaltenen Functionen können nach dem schon im § 5 Dargelegten bis auf additive ganze rationale Functionen linear mit constanten Coefficienten durch Integrale der in dieser Gleichung vorkommenden Form ausgedrückt werden, woraus dann ohne weiteres ersichtlich ist, dass die betreffenden Producte (35) ebenso wohl durch die P_n wie durch die Π_n auf die oben angegebene Weise darstellbar sind.

Es handelt sich nun darum, eine asymtotische Formel für das in (84) vorkommende Integral herzuleiten, welches für $x < 1$ offenbar durch die Reihe

$$(85) \qquad \int_0^x x^n \psi(x)\, dx - \psi(0) \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\psi^{(\nu)}(0)}{\lfloor \nu} \frac{x^{n+\nu+1}}{n+\nu+1}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{x} (-1)^{\nu+1} \zeta(\nu+1) \frac{x^{n+\nu+1}}{n+\nu+1}$$

darstellbar ist. Zu dem Ende betrachten wir das Integral

$$(86) \qquad S_a(x, n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi z} \zeta(z) \frac{x^{z+n}}{z+n}\, dz,$$

dessen Integrationsweg durch keinen Unendlichkeitspunkt des Integranden hindurchgehen darf. Zu diesen Punkten gehören die Null und alle positiven

ganzen Zahlen — von denen $z=1$ eine zweifache Unendlichkeitsstelle ist, weil nicht nur $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ sondern auch $\zeta(z)$ für $z=1$ unendlich wird — sowie die ungeraden negativen Zahlen. Dagegen sind die geraden negativen Zahlen infolge $\zeta(-2\nu)=0$ im allgemeinen reguläre Stellen. Insbesondere hat man noch die singuläre Stelle $z=-n$ zu beachten, und zwar ist dieselbe eine Unendlichkeitsstelle erster oder zweiter Ordnung je nachdem n gerade oder ungerade ist. Hat n den Werth Null, so ist $z=0$ eine zweifache Unendlichkeitsstelle.

Um den Gültigkeitsbereich des Integrals als Function von x zu ermitteln, setze man $z=a+iv$ und $x=|x|e^{i\theta}$. Nach dem in § 9 Dargelegten nähert sich $e^{-\varepsilon|v|}\zeta(a+iv)$, unter ε eine beliebig kleine positive Zahl verstanden, bei wachsendem $|v|$ der Grenze Null. Auf Grund der Formel (75) ist also

$$\frac{1}{2\pi}\left|\frac{\pi}{\sin \pi z}\zeta(z)\frac{x^{z+n}}{z+n}\right| = |x|^{a+n} e^{-(\pi-\varepsilon)|v|-\theta v} f(a,v),$$

wo $f(a,v)$ eine positive Grösse bezeichnet, die bei wachsendem $|v|$ gegen die Null convergirt. Beschränkt man die veränderliche x auf den durch die Ungleichheiten

$$-\pi+2\varepsilon \leqq \theta \leqq +\pi-2\varepsilon \tag{87}$$

definirten Bereich, so ist $-(\pi-\varepsilon)|v|-\theta v \leqq -(\pi-\varepsilon)|v|+(\pi-2\varepsilon)|v| = -\varepsilon|v|$ und mithin

$$\frac{1}{2\pi}\left|\frac{\pi}{\sin \pi z}\zeta(z)\frac{x^{z+n}}{z+n}\right| < x^{a+n} e^{-\varepsilon|v|} f(a,v).$$

Ist der Reihe

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{a+\nu i}^{a+(\nu+1)i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi z}\zeta(z)\frac{x^{z+n}}{z+n}\,dz = S_a(x,n) \tag{88}$$

sind also die absoluten Beträge der einzelnen Glieder beziehungsweise nicht grösser als die entsprechenden Glieder der Reihe

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} |x|^{a+n}\int_{\nu}^{\nu+1} e^{-\varepsilon|v|} f(a,v)\,dv = |x|^{a+n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon|v|} f(a,v)\,dv,$$

die vermöge der oben genannten Eigenschaft von f einen endlichen und, abgesehen von dem Factor $|x|^{a+n}$, von x unabhängige Werth hat. Das Integral (86) ist also in dem Bereiche (87) gleichmässig convergent und stellt — da die einzelnen Glieder von (88) monogene Functionen von x sind — auch selbst eine analytische, daselbst überall (die Punkte $x=0$ und $x=\infty$ ausgenommen) regulär sich verhaltende Function von x dar. Indem man ε hinreichend klein annimmt, kann man bewirken, dass der Bereich (87) jede Stelle der x-Ebene, mit Ausnahme der Punkte auf der negativen Hälfte der reellen Axe, umfasst.

Aus dem Obigen ergiebt sich zugleich die fundamentale Ungleichheit

$$|S_a(x,n)| < C(a,\varepsilon)\,|x|^{a+n}, \tag{89}$$

wo C eine nur von a und ε abhängige Constante bedeutet.

Dies vorausgeschickt, lässt sich nun beweisen, dass zwischen den beiden Integralen (85) und (86) ein solcher Zusammenhang stattfindet, dass für die ganze x-Ebene mit Ausnahme der negativen Hälfte der reellen Axe

$$\int_0^x x^n \eta(x)\,dx - \eta(0)\frac{x^{n+1}}{n+1} = -S_a(x,n), \tag{90}$$

wofern zugleich a die Bedingung $1<a<2$ erfüllt.

Beschränkt man nämlich x auf denjenigen Theil des Bereiches (87), wo $|x|<1$, und verschiebt den Integrationsweg von S_a ohne Ende in der *positiven* Richtung der reellen Axe, so nähert sich S_a vermöge (89) der Grenze Null, denn $C(a,\varepsilon)$ bleibt infolge $\lim_{a=+\infty}\zeta(a+iv)=1$ endlich. Weil nun ein folgender Werth S_b unseres Integrals gleich ist dem ursprünglichen Werthe S_a, vermehrt um die Residuen, welche zu den zwischen a und b gelegenen Unendlichkeitsstellen $z=2, 3, \ldots$ gehören, so ergiebt sich für $-S_a$ die Reihenentwickelung (85). Da also die Gleichung (90) für einen Theil des gemeinsamen Gültigkeitsbereiches der beiden Integrale besteht, so findet sie auch für den ganzen Bereich (87) statt.

Um schliesslich eine asymtotische Darstellung für (90) zu erhalten, braucht man nur den Integrationsweg von S_a in der *negativen* Richtung der reellen Axe zu verschieben und die zu den überschrittenen Unendlichkeitsstellen des Integranden gehörigen Residuen zu bestimmen. Dabei hat man zu beachten, dass $z=1$ stets eine zweifache Unendlichkeitsstelle ist, was auch mit $z=-n$ der Fall ist, wenn n gleich der Null oder einer ungeraden negativen Zahl;

sonst ist $z = -n$ sammt den letztgenannten Stellen eine einfache Unendlichkeitsstelle. Unter Berücksichtigung der Formeln

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta'(0) = -\log\sqrt{2\pi}, \quad \zeta(-2\nu) = 0, \quad \zeta(1-2\nu) = (-1)^{\nu}\frac{B_{\nu}}{2\nu},$$

$$(z-1)\,\zeta(z) = 1 - \psi(0)\,(z-1) + \ldots$$

ergeben sich nun für die zu den genannten Unendlichkeitsstellen gehörigen Residuen die folgenden Werthe. Das zur Stelle $z = 1$ gehörige Residuum ist

$$\psi(0)\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\log x.$$

Das zu $z = 0$ gehörige Residuum hat den Werth

$$-\log\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2}\log x \text{ oder } -\frac{1}{2}\frac{x^n}{n},$$

je nachdem n gleich Null oder von Null verschieden ist. Im letzteren Falle hat $z = -n$ das Residuum

$$\zeta'(-2n) \text{ oder } (-1)^{n-1}\frac{B_n}{2n}\log x - \zeta'(1-2n),$$

je nachdem n der Form $2n$ oder $2n-1$ ist. Endlich besitzt jede von $-n$ verschiedene Stelle $z = -2\nu + 1$ das Residuum

$$(-1)^{\nu-1}\frac{B_{\nu}}{2\nu}\frac{x^{n+1-2\nu}}{n+1-2\nu}.$$

Verschiebt man nun den Integrationsweg von S_a so, dass a einen zwischen den ungeraden negativen Zahlen $-2k-1$ und $-2k+1$ gelegenen Werth erhält, wobei $-2k+1 < -n$ sei, und ersetzt n im Falle $n > 0$ durch $2n$ oder $2n-1$, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist, so bekommt man nach dem Obigen die folgenden drei Formeln

$$(91) \qquad \int_0^x \psi(x)\,dx = \log\sqrt{2\pi} + \left(x + \frac{1}{2}\right)\log x - x$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^{\nu-1}\frac{B_{\nu}}{2\nu(2\nu-1)}x^{1-2\nu} - S_a(x,0),$$

$$-2k-1 < a < -2k+1;$$

$$(92)\qquad \int_0^x x^{2n}\,\psi(x)\,dx = -\zeta'(-2n) + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\log x - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} + \frac{1}{2}\frac{x^{2n}}{2n} + \sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{\nu}\frac{B_\nu}{2\nu}\cdot\frac{x^{2n+1-2\nu}}{2n+1-2\nu} - S_a(x,2n),$$

$$-2k-1<a<-2k+1<-2n;$$

$$(93)\qquad \int_0^x x^{2n-1}\,\psi(x)\,dx = \zeta'(1-2n) + \left(\frac{x^{2n}}{2n} + (-1)^n\frac{B_n}{2n}\right)\log x - \frac{x^{2n}}{(2n)^2} + \frac{1}{2}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \sum_{\nu=1}^{k}{}'(-1)^{\nu}\frac{B_\nu}{2\nu}\cdot\frac{x^{2n-2\nu}}{2n-2\nu} - S_a(x,2n-1),$$

$$-2k-1<a<-2k+1<-2n+1;$$

von denen die erste, abgesehen von der Form des Restgliedes, mit der gewöhnlichen Stirling'schen Formel zusammenfällt. In der dritten Formel deutet der dem Summenzeichen beigefügte Strich an, dass das Glied, wo $\nu = n$, nicht vorkommt.

Substituirt man für n in der Ungleichheit (89) resp. $0, 2n, 2n-1$ und setzt $a = -2k-1+\delta$, unter δ eine beliebig kleine positive Zahl verstanden, so ergiebt sich, *dass sich das Restglied in jeder der drei Formeln bei wachsendem* $|x|$ *der Grenze Null annähert, und zwar so schnell, dass noch die Grösse*

$$\left|x^{m-2\delta}S_a\right| < C(a,\varepsilon)\,|x|^{-\delta},$$

wo m *den Überschuss der Zahl* $2k+1$ *über resp.* $0, 2n, 2n-1$ *bedeutet, gegen die Null convergirt.* Hierbei muss das Argument von x die Bedingung (87) erfüllen, wo ε eine zwar beliebig kleine, aber bestimmte positive Zahl bedeutet.

Die in (92) und (93) vorkommenden Grössen $\zeta'(-2n)$ und $\zeta'(1-2n)$ können mittelst der Formeln (28) und (29) bestimmt werden.

Macht man in (92) und (93) die Substitution $(x, x+1)$, so ergeben sich mit Benutzung der Functionalgleichung von $\psi(x)$ und bei wachsendem $|x|$ gewisse Formeln, mit deren Hülfe die Integrale

$$\int_0^1 x^{\nu}\,\psi(x)\,dx$$

mittelst der Grössen $\log\sqrt{2\pi}$, $\zeta'(-2n)$, $\zeta'(1-2n)$ bestimmt werden können. Die in den Logarithmen der Π-Functionen vorkommenden Constanten (48),

welche offenbar linear mit rationalen Zahlencoefficienten durch diese Integrale ausdrückbar sind, können somit auch durch die genannten Grössen bestimmt werden.

Die Formeln (91), (92), (93) sind einer Verallgemeinerung fähig, indem man in $S_a(x,n)$ an die Stelle von $\zeta(z)$ die Function $\zeta(z,w)$ treten lässt. Die linken Seiten nehmen alsdann die Form

$$\int_0^\infty x^n \psi(x+w-1)\,dx$$

an, während auf den rechten Seiten die BERNOULLI'schen *Functionen* von w nebst den BERNOULLI'schen Zahlen als Coefficienten erscheinen. Die Formel, in welche (91) übergeht, stimmt abgesehen von der Form des Restgliedes, mit derjenigen Verallgemeinerung der STIRLING'schen Formel überein, welche Herr SONIN neuerdings gegeben hat.[1]

Das Integral $S_a(x,n)$ könnte noch dadurch verallgemeinert werden, dass man den Ausdruck $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ durch eine ganze rationale Function desselben oder durch eine lineare Function von $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ und seine Ableitungen erzetzte. Die asymtotischen Formeln, welche mit Hülfe des so verallgemeinerten Integrals hergeleitet werden können, stehen im engen Zusammenhange mit den Integralen

$$\int_0^\infty x^n \psi_\nu(x+w)\,dx$$

wo die ψ_ν die in § 2 charakterisirten Transcendenten bedeuten, auf die wir in § 4 die Functionen $\zeta^{(\nu)}(-n,x)$ zurückgeführt haben.

Das Integral $S_a(x,n)$ und die soeben angedeuteten Verallgemeinerungen desselben gehören nebst den im vorangehenden § verwendeten Integralen zu einer sehr umfassenden Gattung von bestimmten Integralen, deren allgemeine Theorie ich in früheren Arbeiten ausführlich entwickelt habe. Man sehe: *Über die fundamentale Wichtigkeit des Satzes von Cauchy für die Theorien der Gamma- und der hypergeometrischen Functionen* (Acta, T. XXI) und *Zur Theorie zweier allgemeinen Klassen bestimmter Integrale* (Acta, T. XXII).

12. Die Anwendbarkeit der im vorigen Paragraphen gebrauchten Methode, mittelst deren asymtotische Formeln für die Logarithmen von unendlichen

[1] Siehe den interessanten im 116. Bande des CRELLE'schen Journals abgedruckten Briefwechsel zwischen den Herren SONIN und HERMITE.

Producten der Form (83) erhalten wurden, ist nicht auf die betreffenden Fälle allein beschränkt. Handelt es sich allgemeiner um eine ganze transcendente Function von endlichem Range, für welche $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ die Reihe der Nullstellen bildet, so hat man vor allem die Fragen zu beantworten, ob die durch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^z}$$

definirte Function ausserhalb des Convergenzbereiches dieser Reihe existirt und wie sie sich im Unendlichen verhält. Obwohl Untersuchungen dieser Natur im allgemeinen grosse Schwierigkeiten darbieten, so giebt es andererseits auch bemerkenswerthe Fälle speciellerer Art, wo die betreffende Methode wirklich zum Ziele führt.

Hierzu gehören beispielsweise die im § 8 mit $P_n(x)$ *bezeichneten Producte.* Einige Andeutungen mögen hier hinsichtlich des Productes

$$P_0(x) = \prod_{\nu=0}^{\infty} \left\{ 1 + p^{2\nu+1} x \right\}$$

Platz finden, welches bekanntlich zu den multiplicatorisch periodischen Functionen mit zwei wesentlichen singulären Stellen in demselben Verhältnisse steht wie $\Gamma(x)$ zu den trigonometrischen Functionen. Es ist deshalb von Interesse, dass auch für $\log P_0(x)$ eine asymtotische Formel hergeleitet werden kann, welche der STIRLING'schen Formel entspricht.

Für $\log P_0(x)$ hat man die Reihe

$$\log P_0(x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{\lambda-1} \frac{p^\lambda}{1-p^{2\lambda}} \frac{x^\lambda}{\lambda}.$$

Nehmen vir der Einfachheit halber p reel und positiv an, so ist also

$$\log P_0(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi z} \frac{1}{e^{az} - e^{-az}} \frac{x^z}{z} dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi z} \frac{i^{\frac{z}{2}}}{\sin aiz} \frac{x^z}{z} dz,$$

wo

$$0 < c < 1, \quad p = e^a,$$

und zwar gilt diese Formel für die ganze x-Ebene mit Ausnahme der negativen Hälfte der reellen Axe.

Die Unendlichkeitsstellen des Integranden sind $z = \nu$ und $z = \nu \frac{\pi}{a} i$ für $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \infty$, und zwar ist $z = 0$ ein dreifacher Punkt mit dem Residuum $-\frac{(\log x)^2}{4a}$, die übrigen aber einfache Punkte. Verschiebt man nun den Integrationsweg ohne Ende in der negativen Richtung der reellen Axe, so bemerkt man, dass sich das Integral für $|x| > p = e^{\alpha}$ der Grenze Null nähert. Auf diese Weise ergiebt sich

$$\log P_0(x) = -\frac{(\log x)^2}{4a} - \log P_0\left(\frac{1}{x}\right) + \varphi(x), \tag{94}$$

wo

$$\varphi(x) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu} \frac{x^{\frac{\nu\pi i}{a}} + x^{-\frac{\nu\pi i}{a}}}{e^{\frac{\nu\pi^2}{a}} - e^{-\frac{\nu\pi^2}{a}}}.$$

Beschränkt man $x = |x| e^{i\theta}$ auf den Bereich

$$-\pi + \varepsilon < \theta < +\pi - \varepsilon,$$

unter ε eine beliebig kleine positive Zahl verstanden, so bleibt $|\varphi(x)|$ endlich; denn es ergiebt sich leicht

$$|\varphi(x)| < -\frac{2}{1 - e^{2\frac{\pi^2}{a}}} \log\left(1 - e^{\frac{\pi}{a}\varepsilon}\right).$$

Setzt man in (94) $x = e^{2u}$, so erhält man für die im § 8 mit $\Theta_0(u)$ bezeichneten Thetafunction die Formel

$$\log \Theta_0(u) = -\frac{u^2}{a} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu} \frac{e^{\frac{2\nu\pi i}{a}u} + e^{-\frac{2\nu\pi i}{a}u}}{e^{\frac{\nu\pi^2}{a}} - e^{-\frac{\nu\pi^2}{a}}}.$$

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ.
TOM. XXIV. № 11.

UEBER DAS DECREMENT ELEKTRISCHER SCHWINGUNGEN BEI DER LADUNG VON CONDENSATOREN

VON

A. F. SUNDELL.

Ueber das Decrement elektrischer Schwingungen bei der Ladung von Condensatoren.

1. Wenn die beiden Belegungen eines Condensators von der Capacität C durch eine Leitung verbunden sind, deren Leitungswiderstand W ist und die eine Batterie von der elektromotorischen Kraft E sowie eine Induktionsspule vom Selbstpotentiale L enthält, so geschieht die Strömung der Elektricität nach den Gleichungen

$$i = C\frac{d(p-p_0)}{dt} \tag{1}$$

$$Wi = E - (p-p_0) - L\frac{di}{dt}, \tag{2}$$

wo p und p_0 die elektrischen Potentiale der Condensatorbelegungen sind und i die Stromstärke bedeutet. Hierbei wird vorausgesetzt, dass die Capacität C sich constant erhält.

Duch Multiplication mit i bekommt man aus (2)

$$Ei = Wi^2 + (p-p_0)\,i + Li\frac{di}{dt}, \tag{3}$$

welche Gleichung zeigt, dass die von der Batterie in der Zeiteinheit gelieferte Energie Ei gleich ist der Summe der in der Leitung als Wärme erscheinende Energie Wi^2, des Zuwachses $(p-p_0)\,i = C(p-p_0)\frac{d(p-p_0)}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}C(p-p_0)^2$ $= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}q(p-p_0)$ der potentiellen Energie im Condensator mit der augenblicklichen Ladung q, und des Zuwachses $Li\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}Li^2$ der elektrodynamischen Energie.

Ist aber die Capacität veränderlich, so erfordert die Gl. (1) eine Vervollständigung. Nimmt z. B. die Capacität in der Zeit dt um dC zu, so ist eine Zuströmung von der Elektricitätsmenge $(p - p_0)\,dC$ nöthig schon um die Potentialdifferenz constant zu erhalten. Wächst dazu noch die Potentialdifferenz um $d(p - p_0)$, so ist die ganze erforderliche Zuströmung $= (p - p_0)\,dC + Cd\,(p - p_0)$, somit die Zuströmung in der Zeiteinheit

$$(4) \qquad i = (p - p_0)\frac{dC}{dt} + C\frac{d\,(p - p_0)}{dt} = \frac{d}{dt}C\,(p - p_0) = \frac{dq}{dt}\,.$$

Bei abnehmender Capacität sind dC und $\frac{dC}{dt}$ negativ [1]).

Auch der Zuwachs der potentiellen Energie im Condensator ist bei veränderlicher Capacität etwas anders auszudrücken. Schon bei unveränderten Potentialen nimmt diese Energie in der Zeiteinheit mit $\frac{1}{2}(p - p_0)^2\frac{dC}{dt}$ zu; dem Zuwachse der Potentialdifferenz entspricht die Zunahme $C\,(p - p_0)\frac{d\,(p - p_0)}{dt}$. Der ganze Zuwachs wird somit:

$$C\,(p - p_0)\frac{d\,(p - p_0)}{dt} + \frac{1}{2}\,(p - p_0)^2\frac{dC}{dt}\,,$$

wie man auch durch directe Differentation von $\frac{1}{2}\,C\,(p - p_0)^2$ erhält.

Zu den früher genannten Energiemengen kommt jetzt noch ein Glied, nämlich die mechanische Arbeit, welche bei der Vermehrung der Capacität des Condensators verrichtet wird. Hätten wir zum Beispiel einen Luftcondensator mit einer festen Platte von der Fläche F und im Abstande D einer gleich grossen beweglichen Platte, welche sich in der Zeit dt der festen Platte um $-dD$ nähert beim Erheben eines der gegenseitigen Anziehung der Platten gleichen Gewichtes $mg = \frac{F\,(p - p_0)^2}{8\pi\,A^2\,D^2}$, wo A das Verhältniss der elektrostatischen und der elektromagnetischen Einheit der Elektricität ist, so wird hierbei verrichtet die Arbeit

---

[1]) Diese Gleichung kann auch als ein Rechnungsresultat betrachtet werden, da im Allgemeinen $i = \frac{dq}{dt}$ und $q = C\,(p - p_0)$. Wir haben doch eine Herleitung durch physikalische Betrachtungen vorgezogen.

$$-mg\,dD = -\frac{F(p-p_0)^2}{8\pi A^2 D^2}\,dD = \frac{1}{2}(p-p_0)^2\,d\frac{F}{4\pi A^2 D} = \frac{1}{2}(p-p_0)^2\,dC,$$

Auf die Zeiteinheit kommt somit die eben in Frage stehende Arbeit $\frac{1}{2}(p-p_0)^2\frac{dC}{dt}$, welche auch der Batterie entzogen werden muss.

In einem Condensator mit festem Dielektricum muss man sich die entsprechende Arbeit in irgend einer Weise zur Vermehrung der dielektrischen Polarisation angewandt denken.

Die Energiegleichung ist in diesem Falle:

$$Ei = Wi^2 + C(p-p_0)\frac{d(p-p_0)}{dt} + \frac{1}{2}(p-p_0)^2\frac{dC}{dt} + \frac{1}{2}(p-p_0)^2\frac{dC}{dt} + Li\frac{di}{dt}$$

$$= Wi^2 + (p-p_0)\,i + Li\frac{di}{dt} \quad \text{[laut Gl. (4)]},$$

d. h. die Form der Gleichung (3) wird durch die Veränderlichkeit der Capacität nicht geändert. Man kann somit die Gleichung (4) mit der Gleichung (2) verbinden.

2. Wir behandeln einen einfachen Specialfall. Wir nehmen an, dass die Capacität sich gleichförmig verändert, dass somit

$$C = C_0 + ht \tag{5}$$

wo h eine Constante ist. Damit wird erhalten:

$$i = C\frac{d(p-p_0)}{dt} + h(p-p_0),$$

$$\frac{di}{dt} = C\frac{d^2(p-p_0)}{dt^2} + 2h\frac{d(p-p_0)}{dt}$$

und die Gleichung (2) liefert

$$\frac{d^2(p-p_0)}{dt^2} + \left(\frac{W}{L} + \frac{2h}{C}\right)\frac{d(p-p_0)}{dt} + \left(\frac{1}{LC} + \frac{Wh}{LC}\right)(p-p_0) = \frac{E}{LC}. \tag{6}$$

In seiner Abhandlung: „*Untersuchungen über elektrische Schwingungen, I*“ [1]) geht Herr Doktor Hj. Tallqvist aus von den Gleichungen (1) und (2) oben, und leitet von denselben die Gleichung

[1]) Acta Soc. Sc. Fenn. T. XXIII; N:o 4.

$$\frac{d^2(p-p_0)}{dt^2}+\frac{W}{L}\frac{d(p-p_0)}{dt}+\frac{1}{LC}(p-p_0)=\frac{E}{LC} \tag{7}$$

ab [1]). Wegen des Einflusses der Leitfähigkeit des Dielektricums im Condensator und in den isolirenden Schichten der Induktionsspule wird diese Gleichung berichtigt [2]) und durch die Gleichung

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\left[\frac{W}{L}+\frac{1}{C}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)\right]\frac{dq}{dt}+\frac{1}{LC}q=\frac{E}{L}$$

oder

$$\frac{d^2(p-p_0)}{dt^2}+\left[\frac{W}{L}+\frac{1}{C}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)\right]\frac{d(p-p_0)}{dt}+\frac{1}{LC}(p-p_0)=\frac{E}{LC} \tag{8}$$

ersetzt. Durch Einführung von

$$W'=W+\frac{L}{C}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)$$

nimmt Gl. (8) die nämliche Form wie Gl. (7) an.

Herrn TALLQVIST's experimentelle Aufnahmen von Ladungscurven zeigen nun [3]), dass die Capacität der benutzten Glimmercondensatoren keineswegs constant ist; sie wächst nämlich anfangs sehr merkbar, nähert sich aber später sehr langsam seinem Grenzwerthe. Die Gleichung (7) ist somit fehlerhaft und muss durch unsere Gleichung (6) ersetzt werden, die eine lineare Differentialgleichung mit veränderlichen Coefficienten ist, da C von der Zeit abhängt. Für unseren Zweck genügt es doch einen constanten mittleren Werth von C einzuführen, da wir diese Gleichung nur auf eine sehr kurze Zeit (höchstens einige Halboscillationen) anwenden werden. Unter solchen Verhältnissen stellt die Gl. (6) eine regelmässig gedämpfte Schwingung dar. Das allgemeine Integral ist:

[1]) L. c. S 23.

[2]) L. c. S. 32.

[3]) L. c. S 66—69 sowie die Curve K b) N:o 1, Tab. S. LXIII. Beispielsweise ist bei der Combination N:o 6, S. 68, die Ladung nach 0,000275 Sec. = 99,17 % der maximalen Ladung. Da der Ladungsprocess hier aperiodisch ist, für $L=0$, so ist das Verhältniss zwischen der augenblicklichen und der maximalen Ladung $=1-e^{-\frac{t}{CW}}$, welcher Betrag für $t=0{,}000275$ Sec. sich nicht merklich von der Einheit unterscheidet. Man muss somit annehmen, dass die Capacität nach 0,000275 Sec. nur 99,17 % ihres definitiven Werthes erreicht hat.

$$p - p_0 = \frac{E}{1 + Wh} + e^{-\left(\frac{W}{2L} + \frac{h}{C}\right)t} (A \cos \beta t + B \sin \beta t),$$

$$\beta = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{1 + Wh}{LC} - \frac{1}{4}\left(\frac{W}{L} + \frac{2h}{C}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{W}{2L}\right)^2 - \frac{h^2}{C^2}}$$

wo T die Schwingungszeit ist. Ferner hat man das logarithmische Decrement

$$\alpha = \left(\frac{W}{L} + \frac{2h}{C}\right)\frac{\pi}{2\beta}.$$ [1])

In β können die Glieder $\left(\frac{W}{2L}\right)^2$ und $\frac{h^2}{C^2}$, die von derselben Ordnung sind, im Vergleich mit $\frac{1}{LC}$ vernachlässigt werden. Auf die Schwingungszeit hat somit h keinen merkbaren Einfluss und das logarithmische Decrement kann geschrieben werden:

$$\alpha = \frac{\pi}{2}\left(\frac{W}{L} + \frac{2h}{C}\right)\sqrt{LC} = \frac{\pi}{2} W \sqrt{\frac{C}{L}} + \pi h \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{9}$$

Durch eine gleichförmige Veränderung der Capacität wird somit das logarithmische Decrement um $\pi h \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{hT}{2C}$ *vergrössert oder verkleinert.*

3. Da bei langsam erfolgender Veränderung der Capacität die Schwingung für eine kurze Zeit als regelmässig gedämpft angesehen werden kann, erhält man den mittleren Werth Q der „normalen Ladung“ [2]), um welche die Ladung hin und her oscillirt, aus drei auf einander folgenden Ladungsextremen M_{n-1}, M_n, M_{n+1} durch die Gleichung

$$Q = \frac{M_{n-1} M_{n+1} - M_n^2}{M_{n-1} + M_{n+1} - 2M_n}$$ [3]), $$n = 1, 2, 3, \ldots \tag{10}$$

[1]) Tallqvist, l. c. S. 25.
[2]) Tallqvist, l. c. S. 24.
[3]) Für bequemere Rechnung kann diese Gleichung auch geschrieben werden

$$Q = M_{n-1} - \frac{(M_{n-1} - M_n)^2}{(M_{n-1} - M_n) + (M_{n+1} - M_n)}.$$

Die Differenzen der Ladungsextremen kommen auch bei der Berechnung des Decrementes zur Anwendung.

Man bekommt somit eine Reihe Werthe von Q, welche zeigt, in welcher Weise Q (und damit auch C) sich verändert. Diese Reihe ermöglicht eine Schätzung von h. Nach (5) ist nämlich

$$(11) \qquad h = \frac{C_2 - C_1}{t_2 - t_1} \text{ oder } \frac{h}{C} = \frac{C_2 - C_1}{C(t_2 - t_1)} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q(t_2 - t_1)},$$

wo C_1 C_2, Q_1 Q_2 die Werthe von C und Q am Anfange und am Ende des betrachteten Zeitintervalls, C, Q dagegen die mittleren Werthe sind. Man ist folglich im Stande den Einfluss der Veränderlichkeit von C auf das logarithmische Decrement laut Gl. (9) zu berechnen.

4. Wir werden diese Rechnung für Herrn TALLQVIST's Curve Tabelle K b) N:o 1 [1]) (die einzige, für welche auch die Maxima mitgetheilt sind) ausführen. Die Ladungsextremen dieser Curve sind:

Minima	Differenz	Maxima	Differenz
0		442,37	
	29,98		23,15
22,98		419,22	
	20,07		14,76
43,05		404,46	
	18,65		15,71
61,70		388,75	
	16,26		14,93
77,96		373,82	
	14,88		12,75
92,84		361,07	
	12,96		12,72
105,80		348,35	
	12,88		10,47
118,68		337,88	
	10,68		9,20
129,36		328,68	
	9,92		9,68
139,28		319,00	
	9,08		—
148,36		—	

Diese Differenzen zeigen, dass wenigstens das zweite Maximum fehlerhaft ist. Die folgende Tabelle enthält in der Columne „Q *beobachtet*“ die nach der Formel (10) berechneten Werthe von Q, in der Columne „Q *berechnet*“ die aus den Werthen „Q beobachtet“ durch grafische Interpolation gewonnenen

[1]) TALLQVIST, l. c. Tabellen, S. LXIII.

Werthe, welche wir zur Ermittelung von h verwenden werden. Daneben sind auch sowohl die successiven Differenzen der beiden Q-Reihen wie auch die Differenzen Q beobachtet—Q berechnet angegeben.

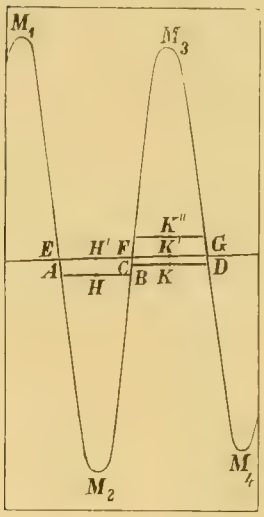
Tabelle I.

Q beobachtet.		Q berechnet.		Q beob. $-Q$ ber.
—		226,48		—
	—		+ 0,50	
227,08		226,98		+ 0,10
	— 0,36		0,45	
[226,72]		227,43		— 0,71
	— 0,48		0,41	
[226,24]		227,84		— 1,60
	+ 1,14		0,38	
[227,38]		228,22		— 0,84
	+ 1,16		0,35	
228,54		228,57		— 0,03
	+ 0,52		0,33	
229,06		228,90		+ 0,16
	+ 0,33		0,32	
229,39		229,22		+ 0,17
	+ 0,14		0,30	
229,53		229,52		+ 0,01
	+ 0,18		0,28	
229,71		229,80		— 0,09
	+ 0,36		0,26	
230,07		230,06		+ 0,01
	+ 0,21		0,24	
230,28		230,30		— 0,02
	— 0,11		0,22	
230,17		230,52		— 0,35
	+ 0,21		0,19	
230,38		230,71		— 0,33
	+ 0,46		0,17	
230,84		230,88		— 0,04
	+ 0,18		0,16	
231,02		231,04		— 0,02
	+ 0,25		0,15	
231,27		231,19		+ 0,08
	+ 0,29		0,15	
231,56		231,34		+ 0,22
	— 0,06		0,14	
231,50		231,48		+ 0,02
	— 0,03		0,12	
231,47		231,60		— 0,13
	—		0,11	
—		231,71		—

Die beobachteten Q sind überhaupt mit der Zeit wachsend. Der zweite, dritte und vierte Werth sind wegen des fehlerhaften zweiten Maximums stark abweichend und wurden bei der Interpolation nicht benutzt. Setzt man die beobachteten Q neben den berechneten grafisch aus, so bekommt man eine um die interpolirte Curve nicht ganz regelmässig oscillirende Curve. Da die „nor-

male Ladung“ sich sehr constant gezeigt hat [1]), kann man doch nicht annehmen, dass die Capacität des Condensators (etwa wegen veränderlicher Temperatur- und Feuchtigkeitsverhältnisse) eine mit der Ladungscurve nicht übereinstimmende Oscillation hätte. Sehr wahrscheinlich ist es aber, dass die Maxima und Minima qvasi-periodische Abweichungen unterworfen sind wegen der Veränderlichkeit der Contacte. Dass der Qvecksilbercontact im Pendelunterbrecher controllirt werden muss ist von Herrn Tallqvist erwähnt [2]). Aber auch die Metallflächencontacte können sich in Folge der Oxidation allmählich verschlimmern und dann wieder plötzlich gut werden, wenn die Oxidschicht sich loslöst. Ein sorgfältiges Ueberwachen der Contacte im Pendelunterbrecher würde ohne Zweifel die Genauigkeit der Beobachtungen sehr erhöhen.

5. Für die Berechnung des Dämpfungsverhältnisses reichen drei Ladungsextreme nicht aus. Denn bezeichnen wir die Ladungen in den Punkten E, F, G (siehe nebenstehende Figur), in welchen die Curve für die normale Ladung die Schwingungscurve schneidet, mit Q_1, Q_2, Q_3, die nach (10) berechnete normale Ladung in H mit Q, so erhalten wir aus den drei successiven Ladungsextremen M_1 M_2 M_3 bei constanter Capacität (die Ladungen in A und $B = Q$) das Dämpfungsverhältniss



$$k' = \frac{M_1 - Q}{Q - M_2} = \frac{Q - M_2}{M_3 - Q}$$

oder

$$k' = \frac{M_1 - M_2}{M_3 - M_2}, \tag{12}$$

für die Dämpfungsverhältnisse der drei successiven Halboscillationen dagegen aus den vier successiven Ladungsextremen M_1, M_2, M_3, M_4 die Werthe

$$k_1 = \frac{M_1 - Q_1}{Q_1 - M_2}, \quad k_2 = \frac{Q_2 - M_2}{M_3 - Q_2}, \quad k_3 = \frac{M_3 - Q_3}{Q_3 - M_4}.$$

Wenn nun H gerade auf der Curve EFG in H' liegen würde, so erhielte man offenbar mit der Formel (12) einen im Verhältniss zur normalen Ladung

[1]) Tallqvist, l. c. Tab. G.
[2]) L. c. S. 74.

in H' etwas zu kleinen Werth, da die Drehung von EF um H' in eine mit AB parallele Lage k_1 und k_2 (oder eigentlich ihre Logarithmen) um ungefähr gleich viel verkleinert. Dagegen wäre der für K aus M_2, M_3 und M_4 berechnete Werth $k'' = \frac{M_3 - M_2}{M_3 - M_4}$, auch wenn K auf der Curve EFG in K' läge, ungefähr gleich viel zu gross gegen die normale Ladung in K, da die Drehung von FG um K' parallel CD k_2 und k_3 vergrössert. Wir nehmen daher an für die normale Ladung Q_2 in F das Dämpfungsverhältniss $k = \sqrt{k' k''}$ oder

$$k = \sqrt{\frac{M_1 - M_2}{M_3 - M_4}}. \tag{13}$$

Hierbei werden die Fehler in k wegen der Abweichungen HH' und KK' nicht eliminirt. Sie heben sich nur theilweise auf, wenn H und K nach derselben Seite von EFG liegen, summiren sich aber, wenn diese Punkte nach entgegengesetzten Seiten (wie H und K'') liegen [1]).

In der folgenden Tabelle II sind die log vulg $\pm (M_n - M_{n-1})$ angeführt so wie die aus denselben nach der Formel (13) berechneten Werthe von $\gamma =$ log vulg k („γ beobachtet"). An diese Decremente sind folgende Reductionen anzubringen.

1) Für das Ansteigen von C die Reduction

$$\triangle_1 \gamma = - M \tau h \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ (Gl. 9)} = - \frac{M h T}{2C}$$

oder nach Gl. (11)

$$\triangle_1 \gamma = - \frac{MT}{2(t_2 - t_1)} \frac{Q_2 - Q_1}{Q}, \tag{14}$$

wo $M = \log \text{vulg } e = 0{,}43429$ ist; Q_1 und Q_2 sind zwei successive Werthe aus der Columne „Q berechnet" der Tabelle I, Q kann man $= \frac{1}{2}(Q_2 + Q_1)$ nehmen und $t_2 - t_1$ ist gleich der halben Oscillationszeit T. In unserem Falle wird somit einfach

$$\triangle_1 \gamma = - M \frac{Q_2 - Q_1}{Q}.$$

[1]) Die Formel (13) liefert einen ziemlich richtigen Werth nur wenn k nicht viel von der Einheit abweicht. Die k werden abwechselnd zu gross und zu klein, aber diese Variation beträgt in unserem Falle nur etwa 3 Einheiten des letzten Decimales und wird somit gänzlich durch die Beobachtungsfehler gedeckt.

2) Auf die definitive Capacität 1,0119 M. F. und die entsprechende normale Ladung 231,98 [1]) die Reduction:

$$(15) \qquad \triangle_2\gamma = \frac{\pi}{4} W \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{\triangle C}{C} = \frac{1}{2}\gamma \frac{\triangle C}{C} = \frac{1}{2}\gamma \frac{\triangle Q}{Q},$$

wo Q wie oben $= \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2)$, $\triangle Q = 231{,}98 - Q$ ist; γ kann man, mit Benutzung der beiden mittleren γ-Werthe und der beiden mittleren Werthe $\triangle_1\gamma$, $= \frac{1}{2}(0{,}02129 - 0{,}02084) - 0{,}00047$ setzen. Die Werthe „γ *reducirt*" gelten somit für eine constante Capacität = 1,0119 M. F.

Tabelle II.

Log vulg $\pm(M_n - M_{n-1})$.	γ beobachtet.	$\triangle_1\gamma$	$\triangle_2\gamma$	γ reducirt.
2,64579	—	—	—	—
2,62262	[0,02392]	− 86	+ 22	[0,02328]
[2,59795]	[0,02362]	78	20	[0,02304]
[2,57538]	[0,01997]	73	18	[0,01942]
2,55800	[0,02020]	66	16	[0,01970]
2,53499	0,02169	63	15	0,02121
2,51461	0,02126	61	13	0,02078
2,49247	0,02177	57	12	0,02132
2,47108	0,02189	53	10	0,02146
2,44868	0,02129	49	9	0,02089
2,42851	0,02084	45	8	0,02047
2,40700	0,02185	41	7	0,02151
2,38480	0,02295	36	6	0,02265
2,36110	0,02198	32	5	0,02171
2,34084	0,02098	30	5	0,02073
2,31915	0,02064	28	4	0,02040
2,29955	0,02089	28	3	0,02064
2,27738	0,02247	26	3	0,02224
2,25460	0,02265	23	2	0,02244
2,23208	—	—	—	—

[1]) TALLQVIST, Tab. S. LXIII.

Die eingeklammerten Zahlen hängen von dem zweiten Maximum ab.

Die reducirten Werthe von γ wechseln ziemlich stark (zwischen 0,02040 und 0,02265, wenn die vier ersten nicht berücksichtigt werden). Die Variation wird wohl durch die Beobachtungsfehler verursacht, für welche das Dämpfungsverhältniss sehr empfindlich ist.

6. Bei weiterer Verwerthung der γ-Werthe kann man beim arithmetischen Mittel nicht stehen bleiben, da in diesem nur die drei ersten und die drei letzten Extreme einwirken. Bildet man aber weitere Summen bei jedesmaligem Ausschliessen eines Werthes vom Anfange und eines vom Ende der vorhergehenden Reihe, so bekommt man ungefähr gleich genaue Multipel des Decrementes, aus welchen ein Endresultat zu ziehen ist [1]). Am bequemsten führt man diese Rechnung in folgender Weise aus. Die $\log \pm (M_n - M_{n-1})$ werden so aufgeschrieben: der letzte unter den ersten, der vorletzte unter den zweiten, u. s. w. und die Differenzen werden gebildet. Von zwei successiven Differenzen nimmt man das Mittel, an welches die entsprechende Summe der Reductionen $\triangle_1\gamma + \triangle_2\gamma$ anzubringen ist, nämlich an das erste Mittel die Summe sämmtlicher Reductionen, an das zweite, die Summe aller Reductionen mit Ausnahme der ersten und der letzten, u. s. w. Die so erhaltenen Zahlen sind identisch mit den oben erwähnten Summen der γ-Wehrte und enthalten das reducirte Decrement 18, 16, 14 . . . 4, 2 Mal. Die ganze sehr compendiöse Rechnung sieht so aus.

[1]) In diesen Summen heben sich auch die oben S. 11 Note 1 erwähnten Variationen der γ im Allgemeinen gänzlich weg.

Tabelle III.

		Diff.	Mittel.	Reduction.	Multipel von γ.	γ
$M_1 - M_0$	2,64579					
		0,41371				
$M_{19} - M_{20}$	2,23208		0,39086	− 697	0,38389 = 18 γ	0,02133
		0,36802				
$M_1 - M_2$	2,62262					
			[0,34430]	− 612	[0,33818] = 16 γ	[0,02114]
$M_{19} - M_{18}$	2,25460	[0,32057]				
$M_3 - M_2$	[2,59795]		[0,29820]	− 531	[0,29289] = 14 γ	[0,02092]
		[0,27583]				
$M_{17} - M_{18}$	2,27738					
			[0,25734]	− 451	[0,25283] = 12 γ	[0,02107]
$M_3 - M_4$	[2,57538]	0,23885				
			0,21650	− 377	0,21273 = 10 γ	0,02127
$M_{17} - M_{16}$	2,29955					
		0,19415				
$M_5 - M_4$	2,55800		0,17383	− 304	0,17079 = 8 γ	0,02135
		0,15351				
$M_{15} - M_{16}$	2,31915					
			0,13059	− 229	0,12830 = 6 γ	0,02138
$M_5 - M_6$	2,53499	0,10767				
			0,08587	− 154	0,08433 = 4 γ	0,02108
$M_{15} - M_{14}$	2,34084					
		0,06408				
$M_7 - M_6$	2,51461		0,04213	− 77	0,04136 = 2 γ	0,02068
		0,02017				
$M_{13} - M_{14}$	2,36110					
$M_7 - M_8$	2,49247					
$M_{13} - M_{12}$	2,38480					
$M_9 - M_8$	2,47108					
$M_{11} - M_{12}$	2,40700					
$M_9 - M_{10}$	2,44868					
$M_{11} - M_{10}$	2,42851					

Schliesst man die eingeklammerten Zahlen aus, so bekommt man

$$48\,\gamma = 1{,}02140\,.$$

Man kann sagen, dass in dieser Summe ein Fehler in M_{20} ein Mal, in M_1, M_9, M_{11} und M_{19} drei Mal, ein Fehler in M_{10} beinahe gar nicht, ein Fehler in den übrigen Ladungsextremen aber vier Mal wirkt. Begnügt man sich mit dieser Fehlervertheilung, wird als wahrscheinlichster Werth erhalten

$$\gamma = 0{,}02128 \pm 4{,}3$$

$$k = 1{,}0502 \pm 1{,}0\,.$$

Von diesem Werthe weichen die aus den Ladungsextremen berechneten γ theilweise stark ab (bis 137 Einheiten), wegen der Beobachtungsfehler. Der

angegebene wahrscheinliche Fehler ist aus den oben angegebenen Specialwerthen von γ berechnet, wobei die Multipelfactoren als zugehörige Gewichte angewandt wurden. Dieser Fehler wirkt in k eine Unsicherkeit von etwa eine Einheit der vierten Decimale, eine sehr mässige Unsicherkeit.[1])

Tabelle IV.

Q	γ beobachtet.	$\Delta_1\gamma$	$\Delta_2\gamma$	γ reducirt.	Mittel I.	Mittel II.
226,74	0,02182	− 96	+ 24	0,02110		—
227,21	0,02264	86	22	0,02200	0,02155	0,02330
227,64	[0.02869]	78	20	[0,02811]	0,02505	0,02300
228,03	[0,01435]	73	18	[0,01380]	0,02095	0,01938
228,40	0,02233	66	16	0,02183	0,01781	0,01974
228,74	0,02200	63	15	0,02152	0,02167	0,02119
229,06	0,02039	61	13	0,01991	0,02071	0,02079
229,37	0,02228	57	12	0,02183	0,02087	0,02132
229,66	0,02214	53	10	0,02171	0,02177	0,02147
229,93	0,02102	49	9	0,02062	0,02117	0,02087
230,18	0,02089	45	8	0,02052	0,02057	0,02048
230,41	0,02059	41	7	0,02025	0,02038	0,02153
230,62	0,02539	36	6	0,02509	0,02267	0,02267
230,80	0,02053	32	5	0,02026	0,02267	0,02165
230,96	0,02124	30	5	0,02099	0,02062	0,02071
231,12	0,02083	28	4	0,02059	0,02079	0,02038
231,27	0,01961	28	3	0,01936	0,01997	0,02066
231,41	0,02358	26	3	0,02335	0,02135	0,02226
231,54	0,02320	23	2	0,02299	0,02317	0,02242
231,66	0,02056	20	1	0,02037	0,02168	—

7. Da die normale Ladung für jede Halboscillation durch die oben erwähnte Interpolation bekannt ist, kann man k auch für jede Halboscillation

[1]) Schliesst man die vier ersten und die vier letzten Differenzen aus und hält sich somit nur zum mittleren Theil der Curve, so bekommt man

$$30\,\gamma = 0{,}63750\ ,\ \gamma = 0{,}02125 \pm 6{,}0\ ,$$

was sich vom oben angegebenen Werthe nicht erheblich unterscheidet.

aus zwei successiven Extremen berechnen. In der Tabelle IV oben sind die so erhaltenen γ und die benutzten Werthe von Q angeführt wie auch die Reductionen $\triangle_1\gamma$ und $\triangle_2\gamma$ [1]) und die reducirten γ. Von zwei successiven γ ist der mittlere Werth genommen („Mittel I“) und wieder der mittlere Werth von diesen Mitteln (Mittel II). Diese letztgenannten Mittel hängen somit von vier successiven Extremen ab wie die „γ reducirt“ in Tab. II und stimmen auch sehr nahe mit diesen überein.

Bildet man von den „reducirten γ“ in Tab. IV die Summen wie oben für die reducirten γ in Tab. II beschrieben wurde, so bekommt man wieder Multipeln von γ, in deren Summe die Fehler sämmtlicher Extreme (mit Ausnahme des Minimums M_{10}), jeder ein Mal wirken. Mit Ausschliessung des Multipels $14\,\gamma$, in welchem das zweite Maximum einwirkt, bekommt man

$$96\,\gamma = 2{,}04294,$$

$$\gamma = 0{,}02128 \pm 4{,}3,$$

genau wie früher, was zu erwarten war. Von den beiden Rechnungsmethoden ist die erste vorzuziehen, da man keine Amplituden zu berechnen braucht und da das Schema nach Tab. III die Rechnung ausserordentlich erleichtert und beschleunigt.

8. In III,8 seiner Abhandlung hat Herr Tallqvist einige Ladungscurven ohne Inductionsspule aufgenommen um den zeitlichen Verlauf der Capacität zu ermitteln. Diese Curven zeigen einerseits, dass die Capacität eines Glimmercondensators ihren vollen Werth erst nach etwa 2 Secunden erlangt, andererseits aber, dass schon nach sehr kurzer Zeit der Unterschied der augenblicklichen Ladung von der maximalen nur wenige Zehntel Procent ist. Es ist daher sehr unwahrscheinlich, dass die normale Ladung zum Beispiel bei der Zeit des ersten Maximums nur 227,08 (Tab. I) sei oder mit 2,11 % die definitive normale Ladung untersteige. Laut der Curve N:o 6 [2]) dürfte man nach 2,5 Millisec. eine Ladung von etwa 99,44 % erwarten können. Es ist somit anzunehmen, dass die Capacität während der ersten Halboscillation von einem unbekannten Anfangswerthe nahe bis zu ihrer definitiven Grösse anwächst, in Folge dessen das Dämpfungsverhältniss stark vergrössert werden muss. Hierdurch wird aber auch eine Versetzung der normalen Ladung von 227,08 etwas

[1]) Die $\triangle_1\gamma$, $\triangle_2\gamma$ in den Tabellen II und IV sind identisch.
[2]) L. c. S. 68.

nach oben bedingt, damit die erste Amplitude gehörig vergrössert, die zweite verkleinert werde. Während der zweiten Halboscillation sinkt die Capacität wieder herunter und das Dämpfungsverhältniss erscheint sehr erniedrigt, was auch die Verschiebung der normalen Ladung nach oben bewirkt, da die dritte Amplitude dadurch vergrössert wird. In dieser Weise steigt die Capacität während der ersten, dritten, fünften . . . Halboscillation, und sinkt während der zweiten, vierten, sechsten . . . Halboscillation. Die entsprechenden Variationen des Dämpfungsverhältnisses sind dadurch zu bewirken, dass man die Curve für die normale Ladung etwas höher zieht als die in der Tabelle I interpolirte Curve, da die Gleichung (10) zu kleine Werthe von Q liefert. Nimmt man nun vorläufig an, dass während zweier successiven Halboscillationen das Steigen und das Sinken der Capacität gleichförmig und gleich stark sei, so ist nach der Gleichung (9) beim Steigen

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} W \sqrt{\frac{C}{L}} + \pi h \sqrt{\frac{L}{C}},$$

beim Sinken

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} W \sqrt{\frac{C}{L}} - \pi h \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Die an γ_1 und γ_2 anzubringende Reductionen sind somit:

$$\triangle\gamma_1 = -M\pi h \sqrt{\frac{L}{C}} = -\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}$$

$$\triangle\gamma_2 = +M\pi h \sqrt{\frac{L}{C}} = +\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}.$$

Man berechnet nun $\pm\frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)$ aus je zwei successiven Decrementen, setzt diese Zahlen grafisch aus und zieht eine Curve, aus welcher man die betreffende Reduction für jede Halboscillation nehmen kann. Weiter hat man die beiden Reductionen $\triangle_1\gamma$ und $\triangle_2\gamma$ anzubringen, welche nach der neuen Curve der normalen Ladung zu berechnen sind. Aus den so erhaltenen γ zieht man den Mittelwerth wie früher bei der Tabelle IV angeführt wurde. Wenn die neue Curve der normalen Ladung richtig getroffen ist, muss das so erhaltene Decrement mit dem früher gefundenen stimmen. Bei der Versetzung der Ladungen Q nach oben muss man nur zusehen, dass die Oscillationen der Capacität nicht zu stark werden, denn die Capacität darf nicht über ihren definitiven Werth wachsen.

Wir haben diese Rechnung für die betreffende Schwingungscurve ausgeführt und dabei jede Ladung Q der Tabelle IV um ein Drittel des Unterschiedes gegen die definitive Ladung 231,98 aufwärts geschoben. Nach der Reduction für die Oscillation der Capacität, die von 660 Einheiten für die erste bis zu 56 Einheiten für die letzte Halboscillation herabsinkt, hat man noch zwei Drittel der Reductionen $\triangle_1\gamma$ und $\triangle_2\gamma$ der Tabelle IV anzubringen. Als Resultat erhält man $\gamma = 0{,}02141 \pm 4{,}2$, was um 13 Einheiten von dem früher erhaltenen Werthe abweicht. Man kann auch nicht ein besseres Uebereinstimmen erwarten, da die Gesetze für die Oscillationen der Capacität nicht bekannt sind, woher diese Rechnung nur als eine Näherung betrachtet werden kann [1]).

Auffallend ist es, dass Q nach neunzehn Halboscillationen sich viel mehr dem definitiven Werthe nähert (Differenz $231{,}98 - 231{,}47 = 0{,}51$ oder 0,22 %) als die Ladung ohne Induction bei Herrn TALLQVIST's Curve N:o 6 (Differenz etwa 0,5 %). Man könnte vermuthen, dass die schnellen Ladungen und Entladungen des Condensators die Fähigkeit des Dielektricums seine volle Capacität anzunehmen befördert. Andererseits wäre ein allmählig eintretender Gangunterschied zwischen den Oscillationen der Ladung und denen der Capacität nicht ausgeschlossen, in Folge dessen die Capacität sinken könnte wenn die Ladung steigt, was ein Versetzen der normalen Ladung etwas *abwärts* bedingte; in dieser Weise würde der nöthige Raum für grössere Oscillationen der Capacität bereitet.

Herrn TALLQVIST's Vorstellung [2]) aber, dass die Capacität schon vom Anfange des Ladungsprocesses in entgegengesetztem Sinne gegen die Ladung

[1]) Man könnte auch die Oscillationen der Capacität mehr rationell auf folgender Weise in Rechnung ziehen. Die erste Amplitude aufwärts ist höchstens $231{,}98 - 226{,}74 = 5{,}24$, die neunzehnte höchstens $231{,}98 - 231{,}54 = 0{,}44$. Falls die Capacität eine regelmässig gedämpfte Schwingung mit dem Dämpfungsverhältnisse K ausführt, hätte man $K^{18} = \frac{5{,}24}{0{,}44}$, $K = 1{,}148$. Die Correction $\triangle Q_1$ für Q_1 erhält man aus der Gleichung $\frac{M_1 - M_0}{A_0 A_1} \triangle Q_1 = \frac{(Q_M - Q_1 - \triangle Q_1)(1 + K)}{Q_1}$ (laut Gl. (14) und Gl. (20) im Folgenden), wo $A_0 (= Q_1)$ und A_1 die beiden ersten Amplituden sind und Q_M dem von der Capacität während der ersten Halboscillation erreichten Werth entspricht. Nimmt man $Q_M = 231{,}98 \times 0{,}995$ an, so erhält man $\triangle Q_1 = 2{,}09 = 0{,}40$ $(231{,}98 - 226{,}74)$. Hiermit wird die erste Amplitude $= 1{,}99$, somit die neunzehnte $= \frac{1{,}99}{K^{18}} = 0{,}17$. Für Q_{19} erhält man hiermit die Correction $\triangle Q_{19} = \frac{0{,}17\,(1 + K)\,A_{18}\,A_{19}}{Q_{19}\,(M_{19} - M_{18})} = 0{,}07 = 0{,}16$ $(231{,}98 - 231{,}54)$. Die $Q_2, Q_3 \ldots Q_{18}$ (sowie Q_{20}) werden dann mittels Factoren corrigirt, die zwischen 0,40 und 0,16 (resp. etwas unter 0,16) liegen. Man bekommt somit eine wahrscheinlich richtigere Curve für der normale Ladung sowie einen guten Bild der oscillirenden Capacität.

[2]) L. c. IV,6. S. 100.

oscillirte, hat keinen physikalischen Grund. Die Betrachtungen in dieser Richtung beruhen auf die Annahme, dass die Curve für $p - p_0$ eine regelmässig gedämpfte Sinuslinie sei, was nicht richtig ist, da die Variationen von $p - p_0$ nach unserer Gleichung (6) geschehen, wo C von der Zeit abhängt.

Tabelle V.

Fehler der Ladungsextremen. Beobachtung—Rechnung.

Ladungs-extremen.	Ohne Oscillation der Capacität.	Mit oscillirender Capacität.
M_1	+ 0,09	− 0,10
M_2	+ 0,26	+ 0,39
M_3	− 3,28	− 3,47
M_4	− 0,05	+ 0,14
M_5	− 0,18	− 0,35
M_6	+ 0,26	+ 0,46
M_7	+ 0,26	+ 0,10
M_8	− 0,06	+ 0,14
M_9	− 0,09	− 0,23
M_{10}	− 0,12	+ 0,08
M_{11}	+ 0,34	+ 0,23
M_{12}	− 0,62	− 0,44
M_{13}	− 0,45	− 0,52
M_{14}	+ 0,17	+ 0,30
M_{15}	− 0,09	− 0,15
M_{16}	− 0,08	0,00
M_{17}	+ 0,50	+ 0,45
M_{18}	− 0,04	− 0,01
M_{19}	− 0,31	− 0,37
M_{20}	+ 0,12	+ 0,05

9. Um die beiden Rechnungsmethoden mit den Beobachtungen vergleichen zu können haben wir an die gefundenen Endwerthe von γ sämmtliche Reductionen rückwärts angebracht und das wahrscheinliche Decrement für jede Halboscillation ermittelt. Mit diesen Decrementen werden dann die successiven Amplituden berechnet, wobei als erste Amplitude die erste normale Ladung benutzt

wird. Aus den Amplituden gehen dann die Ladungsextreme hervor, welche mit den beobachteten Extremen zu vergleichen sind. In der Tabelle V oben sind die zurückbleibenden Fehler angeführt sowohl für die Rechnung ohne Annahme einer Oscillation der Capacität ($\gamma = 0{,}02128$) wie auch bei oscillirender Capacität ($\gamma = 0{,}02141$).

Nur das zweite Maximum (M_3) weicht stark vom berechneten Werthe ab. Alle übrige Abweichungen stehen weit unter einem Scalentheile. Die grösste unter ihnen ist in der Reihe ohne Oscillation die für M_{12} ($-0{,}62$), in der Reihe mit Oscillation die für M_{13} ($-0{,}52$). Die Summe der Fehlerqvadrate ist 1,38 resp. 1,57 (beim Ausschliessen des zweiten Maximums). Man kann somit die von Herrn TALLQVIST eingeschlagene Arbeitsmethode als eine sehr genaue bezeichnen.

Neben den Bestimmungen von Capacitäten, Selbstinduktionscoefficienten und Widerständen in dielektrischen Medien heben wir in Hinsicht der hier durchgeführten Rechnungen als sehr wichtig hervor das Ermitteln der Veränderlichkeit der Capacität in Condensatoren mit festem Dielektricum, eine Erscheinung, die sehr wenig bekannt ist und daher mit jedem Mittel untersucht zu werden verdient.

10. In IV, 2, b) seiner Abhandlung findet Herr TALLQVIST für die hier in Frage stehende Schwingungscurve das Dämpfungsverhältniss $k = 1{,}0526$ oder $\gamma = 0{,}02226$, welcher Werth um 98 Einheiten des letzten Decimales grösser als der unsrige ist. Es erübrigt noch zu zeigen wie diese Differenz entstanden ist.

Herr TALLQVIST berechnet das Dämpfungsverhältniss aus zwei Minima bei Annahme einer constanten normalen Ladung = 231,98. Zu einer solchen Rechnungsmethode kann man von der unsrigen auf folgende Weise kommen. Mann nimmt erstens an, dass die Capacität und damit die normale Ladung gleichförmig wächst. Laut der Formel (15) oben wächst dann auch das logarithmische Decrement gleichförmig mit der Capacität. Das geometrische Mittel zweier Dämpfungsverhältnisse, die gleich weit nach beiden Seiten von einer gewissen Capacität liegen, ist sehr nahe gleich dem zu dieser Capacität gehörigen Dämpfungsverhältnisse. Bezeichnen wir die zu den successiven Halboscillationen hörenden normalen Ladungen mit Q_1, Q_2, Q_3 . . . so haben wir, wenn wir von der Ladung $Q_{p+\frac{1}{2}}$ nach beiden Seiten gehen:

$$k^2_{p+\frac{1}{2}} = \frac{M_{p-1} - Q_p}{Q_p - M_p} \frac{Q_{p+1} - M_p}{M_{p+1} - Q_{p+1}}$$

$$= \frac{Q_{p-1} - M_{p-2}}{M_{p-1} - Q_{p-1}} \frac{M_{p+1} - Q_{p+2}}{Q_{p+2} - M_{p+2}}$$

$$= \frac{M_{p-3} - Q_{p-2}}{Q_{p-2} - M_{p-2}} \frac{Q_{p+3} - M_{p+2}}{M_{p+3} - Q_{p+3}}$$

$$\vdots$$

$$= \frac{M_{p-q+1} - Q_{p-q+2}}{Q_{p-q+2} - M_{p-q+2}} \frac{Q_{p+q-1} - M_{p+q-2}}{M_{p+q-1} - Q_{p+q-1}}$$

$$= \frac{Q_{p-q+1} - M_{p-q}}{M_{p-q+1} - Q_{p-q+1}} \frac{M_{p+q-1} - Q_{p+q}}{Q_{p+q} - M_{p+q}}$$

Durch Multiplication sämmtlicher Werthe bekommt man:

$$(16) \qquad k^{2q}_{p+\frac{1}{2}} = \frac{Q_{p-q+1} - M_{p-q}}{M_{p-q+1} - Q_{p-q+1}} \frac{M_{p-q+1} - Q_{p-q+2}}{Q_{p-q+2} - M_{p-q+2}} \cdot \ldots \cdot \frac{M_{p-1} - Q_p}{Q_p - M_p}$$

$$\frac{Q_{p+1} - M_p}{M_{p+1} - Q_{p+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{Q_{p+q-1} - M_{p+q-2}}{M_{p+q-1} - Q_{p+q-1}} \frac{M_{p+q-1} - Q_{p+q}}{Q_{p+q} - M_{p+q}} .$$

Verändert man die Ladungen Q im zweiten, dritten . . . letzten Zähler zur Gleichheit mit Q im ersten, zweiten . . . vorletzten Nenner sowie Q_{p-q+1} im ersten Zähler und Q_{p+q} im letzten Nenner zu $Q = Q_{p+\frac{1}{2}} + \triangle Q$, so bekommt man einen fehlerhaften Werth von k, nämlich

$$(17) \qquad k'^{2q}_{p+\frac{1}{2}} = \frac{Q - M_{p-q}}{Q - M_{p+q}} ,$$

welche Gleichung, wenn $p+q$ *eine gerade Zahl* ist, eben die von Herrn Tallqvist *für die Minima* benutzte Formel in einer bestimmteren Gestalt ist. Sollte $p+q$ *eine ungerade Zahl* sein, hat man sich sämmtliche Glieder in den Zählern und Nennern am (16) mit entgegengesetztem Zeichen zu denken, um positive Werthe für die logarithmische Rechnung zu bekommen. Die einfache Formel wird somit *für zwei Maxima*

$$(18) \qquad k''^{2q}_{p+\frac{1}{2}} = \frac{M_{p-q} - Q}{M_{p+q} - Q} .$$

Die durch diese Anderungen von den normalen Ladungen hervorgebrachte Änderung im logarithmischen Decremente $\alpha_{p+\frac{1}{2}}$ liefert sehr nahe, wie man nach einigem Rechnen findet, die Formel

$$(19) \qquad 2q\,\triangle\alpha_{p+\frac{1}{2}} = \pm\left[\frac{1+k^{2q-1}}{1+k}\frac{k}{A_{p-q}} + \left(q-\frac{1}{2}\right)\frac{A'_{p-q}+A'_{p+q}}{A_{p-q}A_{p+q}}\right]g$$

$$+\frac{\triangle Q}{A_{p-q}A_{p+q}}(M_{p-q}-M_{p+q}),$$

$$q = 1,\ 2,\ 3\ldots$$

\+ für zwei Minima ($p+q$ eine gerade Zahl),
− für zwei Maxima ($p+q$ eine ungerade Zahl),

wo A die richtigen Amplituden, A' die mit der unrichtigen normalen Ladung Q berechneten Amplituden sind. Die Zunahme von Q während einer Halboscillation ist mit g bezeichnet.

Zu bemerken ist es, dass die Klammer im zweiten Gliede von $\triangle\alpha_{p+\frac{1}{2}}$ für zwei Maxima positiv, für zwei Minima negativ ist. Berechnet man somit eine Anzahl Decremente aus den Maxima sowie eine gleiche Anzahl aus den Minima, so kann man aus diesen Werthen einen Mittelwerth erhalten, auf welchen die Fehler in den Amplituden sehr wenig wirken. Wir benutzen für eine solche Rechnung die Minima $M_4 - M_{20}$ sowie die Maxima $M_5 - M_{19}$.

Tabelle VI. $Q = 231{,}98$.

Maxima.	Log vulg A'		$\gamma'_{12+\frac{1}{2}}$	Minima.	Log vulg A'		$\gamma''_{12+\frac{1}{2}}$	Mittel $\gamma_{12+\frac{1}{2}}$
M_{11}	2,11090	0,04506	0,02253	M_{10}	2,14345	0,08922	0,02230	0,02242
M_{13}	2,06584			M_{14}	2,05423			
M_9	2,15180	0,12690	0,02115	M_8	2,18758	0,17635	0,02204	0,02159
M_{15}	2,02490			M_{16}	2,01123			
M_7	2,19527	0,20984	0,02098	M_6	2,23116	0,26408	0,02201	0,02150
M_{17}	1,98543			M_{18}	1,96708			
M_5	2,23674	0,29712	0,02122	M_4	2,27630	0,35399	0,02212	0,02167
M_{19}	1,93962			M_{20}	1,92231			
					Wahrscheinlicher Werth $\gamma_{12+\frac{1}{2}} = 0{,}02179$			

Der so erhaltene Werth entspricht die normale Ladung $Q_{12+\frac{1}{2}} = 230{,}17$ (Tab. I „Q beobachtet“) und ist noch zu berichtigen mit 1) $\triangle_1 \gamma = -\frac{MT}{2(t_2 - t_1)} \frac{Q_{19+\frac{1}{2}} - Q_{5+\frac{1}{2}}}{Q} = -\frac{M}{14} \frac{231{,}47 - 228{,}54}{230{,}17} = -39$, und mit 2) $\triangle_2 \gamma = +\frac{1}{2} . 0{,}02140 . \frac{231{,}98 - 230{,}17}{230{,}17} = +8$ um das Decrement auf die definitive Ladung 231,98 zu beziehen. Man erhält $\gamma = 0{,}02148$, was ziemlich mit dem strengen Werthe stimmt. Hier sind die γ aus den Minima zu gross, die γ aus den Maxima überhaupt zu klein, da das erste Glied in (19) grösser als das zweite ist.

Herr Tallqvist benutzt nur die Minima und erhält daher ein zu grosses Decrement, das man auch nicht einer bestimmten Capacität zuordnen kann, da das erste Minimum mit jedem folgenden Minimum combinirt wird und somit die verschiedenen Decremente verschiedenen Capacitäten gehören.

Da die Decremente fehlerhaft sind, können die in IV,5 mitgetheilten Werthe der Coefficienten a und b nicht ganz richtig sein. Die Werthe $W' - W$ sind daher wahrscheinlich irgend einen Ohm zu gross. Wie die Richtigkeit des Coefficienten b beeinträchtigt wird, kann mit dem vorhandenen Beobachtungsmateriale nicht ermittelt werden.

11. Die Formel (19) erlaubt eine Schätzung wie gross der Fehler eines nach der Formel (13) berechneten Werthes von γ sei. Für die drei ersten nach der Tabelle V corrigirten Extreme M_0 (= 0), M_1, M_2 hat man $p = 1$, $q = 1$, $\triangle Q = 0$, somit

$$\triangle \alpha_{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{A_0} + \frac{1}{2}\frac{A_0 + A_2}{A_0 A_2}\right) g = \frac{(1+k)^2}{4A_0} g_{12}$$

oder für $\gamma_{1+\frac{1}{2}} + 95$ Einheiten. Für M_1, M_2, M_3 ist $p = 2$, $q = 1$, $\triangle Q = 0$ und

$$\triangle \alpha_{2+\frac{1}{2}} = -\frac{k(1+k)^2}{4A_0} g_{23} = -\frac{(1+k)^2}{4A_1} g_{23}$$

für $\gamma_{2+\frac{1}{2}} - 91$ Einheiten. Setzt man laut Formel (13) $\gamma_2 = \frac{1}{2}(\gamma_{1+\frac{1}{2}} + \gamma_{2+\frac{1}{2}})$, so wird γ_2 fehlerhaft um nur etwa + 2 Einheiten. Wenn k nicht viel von der Einheit abweicht, wird somit der Fehler sehr unbedeutend. Bei grösserem k kann man ein Schritt weiter gehen. Man hat nämlich, falls g einigermassen constant ist,

$$\triangle\alpha_2 = \frac{1}{2}(\triangle\alpha_{1+\frac{1}{2}} + \triangle\alpha_{2+\frac{1}{2}}) = \frac{(1-k)(1+k)^2}{8A_0}g,$$

$$\triangle\alpha_3 = \frac{1}{2}(\triangle\alpha_{2+\frac{1}{2}} + \triangle\alpha_{3+\frac{1}{2}}) = -\frac{k(1-k)(1+k)^2}{8A_0}g.$$

Setzt man nun $\alpha_{2+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3)$, so wird dieser Werth fehlerhaft nur um $\frac{1}{2}(\triangle\alpha_2 + \triangle\alpha_3) = \frac{(1-k)^2(1+k)^2}{16A_0}g$. Bei grossem k nimmt man daher zweckmässig die Mittel zweier successiven „γ beobachtet" der Tabelle II, an welche dann die Reductionen $\triangle_1\gamma$ und $\triangle_2\gamma$ anzubringen sind. Vielleicht wäre doch in diesem Falle die Methode nach der Tabelle IV vorzuziehen.

12. Der Vollständigkeit wegen mag noch der Fehler erwähnt werden, welches im Decremente entsteht wenn man dasselbe aus einem Maximum und einem Minimum mit einem constanten Q berechnet, nach den Formeln

$$k'^{2q-1}_p = \frac{Q - M_{p-q}}{M_{p+q-1} - Q},\quad k'^{2q-1} = \frac{M_{p-q} - Q}{Q - M_{p+q-1}}.$$

Man findet wie oben

$$(20)\qquad (2q-1)\triangle\alpha_p = \pm\left[\frac{1-k^{2q-2}}{1+k}\frac{k}{A_{p-q}} - (q-1)\frac{A'_{p-q}}{A_{p-q}}\frac{A'_{p+q-1}}{A_{p+q-1}}\right]g$$

$$-\frac{\triangle Q}{A_{p-q}A_{p+q-1}}(M_{p-q} - M_{p+q-1}),$$

$$q = 1,\ 2,\ 3\ \ldots$$

$+$ aus einem Minimum und einem nachfolgenden Maximum ($p+q$ gerade),
$-$ aus einem Maximum und einem nachfolgenden Minimum ($p+q$ ungerade).

Hier wirkt der Fehler $\triangle Q$ sehr stark, da immer der eine von den Extremen M gross, der andere klein ist. Beispielweise ist bei der in Frage stehenden Schwingungscurve für das erste Minimum ($=0$) und das erste Maximum (442,37) mit der normalen Ladung $Q_1 = 226{,}74$ (Tab. IV) das unreducirte Decrement $= 0{,}02182$, das mit $Q = 231{,}98$ berechnete fehlerhafte Decrement $= 0{,}04242$ [1]), somit $\triangle\gamma = +0{,}02060$, wie auch die Formel (20) giebt, da man

[1]) TALLQVIST, l. c. S. 78: $k = 1{,}1026$.

hier $g = 0$, $p = 1$, $q = 1$, und $\triangle Q = 231{,}98 - 226{,}72 = 5{,}24$ zu setzen hat. Das zweite Decrement ($p = 2$, q 1) wird entsprechend fehlerhaft in entgegengesetzter Richtung.

Wegen des grossen Einflusses von $\triangle Q$ nehmen die Fehler einander nicht völlig aus, wenn man zum Beispiel die Extremen $M_4 - M_{19}$ benutzt um nach dem Schema der Tabelle VI γ_{12} zu berechnen; man bekommt $\gamma_{12} = 0{,}02056$. Aus $M_5 - M_{20}$ berechnet man $\gamma_{13} = 0{,}02305$. Das Mittel dieser Werthe giebt aber $\gamma_{12+\frac{1}{2}} = 0{,}02180$, was mit dem Resultate der Tabelle VI stimmt. Man kommt somit nur durch die doppelte Arbeit nach richtigem Resultate und diese Anordnung hat somit keinen praktischen Werth.

MINNESTAL

ÖFVER

VICEBIBLIOTEKARIEN

PROFESSOR SVEN GABRIEL ELMGREN.

Hållet

vid Finska Vetenskaps-Societetens årsdag den 29 April 1898

AF

K. E. F. IGNATIUS.

Då jag nu går att söka lemna en kortfattad minnesteckning af Sven Gabriel Elmgren, är det icke för en den vetenskapliga forskningens eller den inhemska litteraturens storman, som jag utbeder mig att för en stund få taga en högtärad församlings uppmärksamhet i anspråk. Elmgren var icke en sådan, och ett öfverskattande af hans betydelse i dessa afseenden skulle främst han sjelf med sin omutliga sanningskärlek kort och bestämdt hafva afvisat. Det oaktadt har hans lifsgerning, som nu är afslutad, dock lemnat tillräckligt många och tillräckligt varaktiga spår efter sig för att förtjena att i minnet återkallas. Elmgren var en af desse flitige och plikttrogne arbetare på den fosterländska häfdeforskningens, litteraturens och publicitetens fält, hvilka, utan att lysa i främsta ledet, likväl genom talrika på samvetsgrann forskning och allvarliga studier stödda verk, äfvensom genom upplysta och ärliga inlägg i dagens frågor under ett för det finska folkets nationela utveckling betydelsefullt tidsskifte förvärfvat sig ett namn och ett minne, som efterverlden icke kan förgäta. Hans långa lefnad var i det närmaste en lika lång arbetsdag, och om än arbetet till sitt innehåll vexlade förblef dock dess slutmål städse detsamma: det finska nationalmedvetandets stärkande genom höjandet af kunskapen om fäderneslandet, dess forntid och nutid, dess litteratur och dess minnesvärda män.

Slägten Elmgren leder sitt ursprung från Elmesås hemman i Moheda socken i Småland, hvilket hemman åter fått sitt namn af trädet elm, som torde vara synonymt med alm. Under senare hälften af 1600-talet innehades Elmesås af bonden Gabriel Knutsson, hvars son Samuel Ellmegren efter vunnen filosofisk grad blef prest och år 1744 afled såsom prost och kyrkoherde i Hestra. Af hans barn, hvilka kallade sig Elmgren, flyttade sonen David år 1770 till Åbo, der han vann burskap såsom bokbindare och samma år ingick äktenskap med bokbindaren Petter Färnborgs enka Magdalena Bäckström. I detta äktenskap föddes fyra barn, af hvilka två söner slogo sig på praktiska yrken, men den andre i ordningen, vår Sven Gabriels fader, Gabriel Elmgren egnade sig åt studier.

GABRIEL ELMGREN synes vid universitetet i Åbo, der han år 1790 inskrefs såsom student vid 14 års ålder, hafva väckt stora förhoppningar om sig såväl hos lärare som hos kamrater. Vid de akademiska festerna åren 1796 och 1799, den senare med anledning af kronprinsen Gustafs födelse, höll han festtalen. Filosofiekandidatexamen aflade han med synnerlig utmärkelse, hvarför också den förmodan icke låg fjerran att han skulle qvarstanna vid universitetet och der söka lärareplats. Så skedde dock icke. Gabriel Elmgren, hvars studier att döma af hans akademiska disputationer efterhand vändt sig åt theologin, blef prest 1801 och lefde derefter hela sitt lif i stilla tillbakadragenhet på landet. År 1804 kallades han af biskop Tengström till dennes adjunkt i Pargas, der han fem år senare blef kapellan och sedermera i en fortsättning vistades i mer än sextiotvå år eller ända till sin död den 23 December 1866, som inträffade vid den höga åldern af nära 91 år. Betecknande för hans karaktär och sinnesstämning är, att han, oaktadt sina lärda meriter, aldrig under hela sin långa lefnad sökte någon annan anställning än nyssnämnda klent aflönade kapellanssyssla. Hans lynne synes ha varit melankoliskt, slutet och stundom knarrigt, men på bottnet låg en varm religiositet. Hvarje dag höll han med sitt hus gemensamma morgon- och aftonböner, hvarvid äfven ett kapitel af bibeln lästes, och om söndagseftermiddagarna lästes derjemte en predikan. Med sin sex år yngre maka JOHANNA KRISTINA TALLEQVIST, kapellansdotter från Geta på Åland, hade han tre söner, hvilka alla kommo till mognad ålder. Äldsta sonen HERMAN DAVID blef efter afslutade universitetsstudier landtmätare och dog i Åbo år 1865. Den tredje i ordningen OTTO JOHAN blef sjöfarande och förde såsom sjökapten fartyg dels från Raumo, dels från Åbo, till dess han äfvenledes samma år slutade sitt lif, i det han jemte hela sin besättning spårlöst försvann i vågorna på en resa från sistnämnda stad till Sicilien.

Den andre i ordningen af sönerna, SVEN GABRIEL, föremålet för denna minnesteckning, föddes den 25 Oktober 1817. Sitt födelseställe, det tarfliga kapellansbostället, Parsby-Mellangård, skildrar han sjelf i sin påbörjade autobiografi sålunda: „En oansenlig gård på en föga upphöjd kulle inträngd mellan tvenne bondgårdar. Inga träd gåfvo den skugga med undantag af ett stort sekelgammalt äppelträd och en rönn, hvars höga, runda krona redan i mina växande år beredde mig mången estetisk njutning och var mitt älsklingsträd. Men på afstånd öfver ängen mot norden sågs vid foten af ett enstaka högt berg en björklund, som var min park och målet för gossens vandringar i middagens hetta efter slutad läsning och i aftonens svalka förrän qvällsvardens timme slog. I söder glittrade vid solsken på afstånd en vik af kyrkofjärden.

Den fjärden var min vagga såsnart jag kunde få tillstånd att vistas på egen hand i båt. Gårdens byggnader skilde sig i yttre afseende alldeles icke från en bondgård af medelmåttigt välstånd. Uthusen hade alla halmtak och boningshusens obrädslagna väggar voro ej utan sina små bugter".

Det lif, som fördes i denna lilla prestgård, synes hvad enkelhet och torftighet beträffar icke hafva i något väsendtligt skildt sig från lifvet i de närbelägna små bondgårdarna. Pastor Elmgren förde ett nästan eremitlikt lif och underhöll intet umgänge med ortens ståndspersoner, icke ens med sina embetskamrater. Hans ända till ytterlighet sparsamma hustru var städse upptagen af arbeten i hemmet. Andra jemnåriga bekantskaper hade Sven Gabriel Elmgren och hans bröder derföre icke, än bond- och dränggossar från granngårdarna. Med dessa lekte han under fristunderna emellan läxorna, snöbollades under vintern eller skrann på isen med skrinnskor. En rik bonde skänkte honom en gång en kälke, hvilken var den enda, som han under hela sin gosstid egde och hvilken han betraktade såsom en ovärderlig skänk. Ännu på gamla dagar ansåg han sig ha att tacka denna kälke för den oafbrutna hälsa, hvaraf han var i åtnjutande. Hans skoplagg voro vanligen genomblötta, men att alltid vara våt om fötterna, yttrade han, gaf denna tid ingen snufva eller hosta. Denna härdning i barndomen hade han utan tvifvel att tacka för sin ovanligt starka fysik, som tillät honom att, utan men för hälsan, ännu vid några och 70 års ålder gå ut i smällkalla vintern med rock och päls uppslagna samt bröstet nästan bart. I gossåren inöfvade han sig också i bondens dagliga arbeten och brukade vid mörkrets inbrott sitta framför brasan i stugan sysselsatt med allehanda trädslöjd och derunder lyssnande till folksagor och berättelser ur folkets lif.

Denna sammanvaro med den i bildning och förmögenhet lägst stående klassen af folket blef i sin mån bestämmande för Elmgrens tänkesätt och sträfvanden under hela hans följande lif. Han blef en afgjord demokrat i detta ords bästa betydelse, och häri ligger äfven förklaringen till hvarför han, ehuru född och uppfostrad i en svensk trakt, sedermera med sådan värme och energi anslöt sig till det finska nationalitetssträfvandet. Mer än de flesta andra från ståndspersonsklassen utgångne hade han lefvat folkets lif. Det var icke svårt för honom att uppfatta vidden af den klyfta, som språkolikheten åstadkommit emellan de bildade klasserna och den finska talande delen af folket, och han fattade derföre äfven den oafvisliga nödvändigheten af att detta hinder måste undanrödjas.

Elmgrens studier handleddes till en början i hemmet af informatorer, hvilka sjelfve samtidigt förbereddes till studentexamen eller till någon akademisk exa-

men af hans fader. Senare öfvertog fadren sjelf hans undervisning, hvilken öfverhufvudtaget icke heller gaf mycket besvär, emedan sonen var flitig och fattade lätt.

Isynnerhet förkofrades han i latin och grekiska. Den känsla, som han hyste för sin fader, var en vördnad, hvilken tyckes hafva bannlyst oftare återkommande förtroliga samtal dem emellan. Endast vid fadrens bortavaro på läsförhör eller andra förrättningar vågade sig barnen i hans kammare, och under dessa stunder var det som SVEN GABRIEL fick tillfälle att genomse hans boksamling, och i hemlighet läsa flere visserligen redan då förtiden föråldrade arbeten i filosofi, moral, historia, hälsolära m. m. Märkvärdigt nog föll det honom aldrig in att begära något af dessa arbeten till låns. För romanläsning saknades totalt tillfälle, ty denna litteratur hade icke fått insteg i hemmet. Synnerligen karakteristiskt är hvad ELMGREN berättar om huru han och hans bröder öfverkommo och läste en fantasiskapelse, Klims underjordiska resa. Denna gjorde dem först nöje, men snart uppretades de så af osanningarna deri, att de med förakt sönderrefvo boken. En sträng sanningskärlek var också tidigt det förherrskande draget i ELMGRENS karaktär. Såsom barn ville han icke ens för att undgå bestraffning säga något osannt.

Vid 16 års ålder kom ELMGREN till gymnasium i Åbo, der hans fullkomliga ovana vid sällskapslifvet och obekantskap med de alldagligaste förhållanden gjorde honom till ett tacksamt ämne för kamraters hån och gäckeri. Hans ursprungligen veka och djupt känsliga hjerta led häraf mycket, och till en början fällde han häröfver många tårar i tysthet. Efterhand stålsatte han sig dock mot driften. Hans sjelfkänsla vaknade och gaf honom tröst i medvetandet af att vara om än underlägsen sina kamrater i lefnadsvett likväl dem öfverlägsen i vetande. Hans studier inskränktes dock ingalunda till blott läxläsning. Synkretsen vidgades och bland annat berättar han sjelf huru han denna tid njöt och beundrade Frithiofs saga. Äfven för teckning hade han fallenhet och erhöll derföre tvenne skilda gånger praemium. Några af de landskapsstycken, som han utfört utan annan handledning än den han vid gymnasium erhållit, hängde inom glas och ram ännu på hans gamla dagar på väggen i hans arbetsrum.

Efter slutad gymnasiikurs kom ELMGREN år 1836 till Helsingfors, der han inqvarterade sig hos sin två år äldre broder, som bodde i en ytterst liten kammare på Skatudden. Studentexamen aflade han med heder; men reste derefter genast hem och antog ett års kondition i Reso socken. Denna tid hade såtillvida betydelse för hans utbildning, att han derunder började intressera sig för skönlitteratur, och i likhet med så många andra ynglingar af hans

ålder slog sig på versmakeri, en svaghet, som dock var af snart öfvergående art.

Om hösten 1837 återvände Elmgren till universitetet, der han sedermera var inne alla läseterminer och den 14 Maj 1840 aflade sin filosofiekandidatexamen. Höga vitsord hade han icke eftersträfvat, och sådana erhöll han icke heller. Dock grämde det honom mycket att han i filosofin endast undfick omdömet admittitur. Han ansåg sig häruti ha lidit stor orätt, en åsigt som han först på äldre dagar och vid lugnare besinning helt och hållet frångick. Magisterpromotionen, som i anseende till universitetets 200-åriga jubelfest blifvit uppskjuten till senare hälften af Juli, och hvilken föregick och åtföljdes af en rad af lysande fester, hölls i den under byggnad varande Nikolaikyrkan.

De filosofiska studierna hade för Elmgren ända från hans inträde vid universitetet, blott utgjort en förberedelse för de theologiska. Redan som helt ung hade han fattat beslutet att blifva prest, och brukade derföre både såsom gymnasist och student under ferierna öfva sig i praktisk presttjenstgöring, i det han skötte faderns predikoturer. Den religiositet, som han medfört från föräldrahemmet, öfvergaf honom aldrig, och ehuru han icke höll sig undan från samqvämet med kamrater, utan tvärtom, enligt egen uppgift, stundom ganska ofta deltog i studentfester och besökte schweitzerier, hade han dock denna tid en stark dragning åt pietismen. Umgänget med olika tänkande vänner äfvensom bekantskapen med Schleiermachers och Ignells skrifter samt framför allt åhörandet våren 1843 af den nyss förut till hemlandet återkomne docenten Johan Vilhelm Snellmans filosofiska föreläsningar, afvände Elmgren dock efterhand från denna mera asketiska tankerigtning och föranledde att hans religiösa ståndpunkt för en kortare tid fick någon lutning åt rationalismen. Härigenom kom han att bryta med några af sina förra vänner, bland annat med den varmhjertade, begåfvade Anders Vilhelm Ingman, som sedermera afled såsom theologie professor, och hvilken Elmgren hade att tacka för intresset för och [illegible] i finska språket. Sina åsigter uttalade Elmgren för öfrigt de första [illegible] uppsom anonymt infördes i Helsingfors Tidningar och i en artikel om pietismen, [illegible] han offentliggjorde. Den efterföljdes var måhända den första uppsats som [illegible] snart af en annan, som infördes i Ecclesiastikt Litteraturblad i Åbo, och hvilken innehöll en kritik öfver de brukliga predikotexterna. Till hans theologiska skriftställeri på denna tid hörde också en öfversättning till svenskan af F. K. Meiers Dogmgeschichte, som 1845 utkom af trycket. Theologiekandidatexamen aflade han den 14 December 1844, men härmed afstannade också hans väg till prestaembetet. Elmgren blef nemligen aldrig prestvigd. Några år efter aflagd theologie kandidatexamen, eller i December 1849, afreste han

visserligen i sådant ändamål till Borgå i sällskap med nyss utnämnde professorn i biblisk exegetik Gabriel Geitlin; men domkapitlet förklarade sig icke vara rätt forum att upptaga hans ansökan om prestvigning, utan hänvisade honom till domkapitlet i Åbo. Då han sedan följde denna anvisning och hos domkapitlet derstädes anhöll om promotorial till biskopen i Borgå, möttes han åter af afslag under förevändning att han icke aflagt föreskrifna offentliga predikoprof på svenska och finska språken. Förargad öfver detta krångel tänkte ELMGREN först besvära sig i Senaten; men fullföljde icke denna afsigt, utan öfvergaf i stället tanken på att blifva prest. Att de begge domkapitlen endast sökte förevändningar för sin bristande vilja att tillmötesgå ELMGRENS önskan synes temmeligen uppenbart. ELMGREN hade året förut blifvit ordinarie amanuens vid universitets biblioteket och innehade således inom Borgå stifts område en befattning, med hvilken ecklesiastik tjensteårsberäkning var förbunden. Han synes alltså på samma grund som professor Geitlin, hvilken prestvigning icke förmenades, ha kunnat blifva ordinerad i Borgå. Ännu mindre skäl synes domkapitlet i Åbo haft för sitt afslag. I händelse ELMGREN såsom theologie kandidat, varit skyldig att aflägga praktiska predikoprof, så är det uppenbart att detta bordt ske inför det domkapitel, hos hvilket han ansökte om ordination. Detta var icke Åbo, ty här sökte han endast om promotorial eller begifvande att få prestvigas i Borgå. Predikoprofvens afläggande i Åbo skulle nödvändiggjort en resa dit, och det var väl hufvudsakligast just vägalängden och resekostnaderna, som föranledt ELMGRENS anhållan att få emottaga sacros ordines i Borgå. Hvarföre de begge stiftstyrelserna visade sig så afvogt stämda mot ELMGREN, har jag icke lyckats utreda. För några theologiska irrläror borde ELMGREN icke gerna ha kunnat beskyllas. Han hade ju just förut till svenskan öfversatt den renlärige tyske theologen Hases berömda dogmatik: Hutterus redivivus. Antagligare, ja till och med sannolikt är derföre att ELMGRENS publicistiska verksamhet och politiska ståndpunkt öfverhufvud ådragit honom vederbörandes missnöje, som nu gaf sig luft i en småaktig [illegible] och landsförnöjelse.

ELMGREN var nemligen denna tid redan en i [illegible] det offentliga lifvet känd och bemärkt personlighet. Hans ifrån barndomstiden inrotade folkliga sinnelag, umgänget med framstående jemnåriga vid universitetet äfvensom Snellmans väckelserop såväl tidigare som efteråt i Saima, men framförallt sjelfförvärfvad fast öfvertygelse hade gjort ELMGREN till en af de ifrigaste förkämparne för den finska nationela rörelsen. Under par somrar hade han vistats i det inre landet i Tyrväntö och Kangasala och der enligt egen uppgift insupit den varmaste sympati för den finskatalande allmogen, hvars lefnadssätt och seder han på nära håll lärde sig känna. I den nu uppflammande nationalitetsstriden tog

han derföre snart en liflig del. En insändare, som tecknade sig „En finne“ och under hvilken signatur påstods dölja sig den såsom religiös skriftställare å finska språket kände kontraktsprosten i Tammela Nils Magnus Tolpo, hade i Åbo Tidningar 1844 n:o 83 uppträdt i härnad mot Saima och sökt bevisa att en sjelfständig finsk nationel utveckling vore omöjlig. Finlands lott blefve att framdeles såsom härintills mottaga intryck af den makt, med hvilken landet var förenadt, och dess finska talande inbyggare kunde lika litet som Irländare, Gaeler, Irokeser o. a. Amerikas urinvånare räkna på att göra sitt språk till ett kulturspråk. Mot denna artikel ingaf Elmgren nu ett ljungande genmäle, som anonymt infördes i Helsingfors Morgonblad för den 31 Oktober samma år. Han framhöll der huru litet insändaren gjort sig reda för hvad nationalitet är, då han antager att denna kunde bibehållas, ehuru man låter sitt språk, sina seder och institutioner fara. Då ins. förutser att det kan gå med finnarne, som med irländare, gaeler, irokeser o. a. att småningom försvinna från jorden och att ryssar och svenskar framdeles skola lefva på den fläck der finnar fordom bodde, så uttalar Elmgren sin förvåning öfver att ins. dock icke blyges att kalla sig finne. Beträffande inkasten mot finska språkets användbarhet såsom ett den högre bildningens språk, anför Elmgren den celebre danske språkforskaren Rask's omdöme om finskan äfvensom de nyss utkomna Kalevala och Kanteletar m. m., men tillägger: „Vore också finskan det aldra sämsta språk i hela vida verlden, så skulle det dock för oss finnar vara bättre än alla andra språk att använda, derföre att det är vårt eget“. Det står ingen nation fritt att välja emellan språk, likalitet som den enskilde individen kan bortlägga sin näsa och antaga en främmande. För öfrigt gällde saken helt enkelt finska folkets rätt till tillvaro, och denna rätt torde väl ej kunna förnekas, efter vår Herre så behagat skicka, att det verkeligen existerar.

Detta genmäle, som genast gaf anledning till en liflig tidningspolemik, rönte den utmärkelsen att blifva i sin helhet intaget i Saima för den 14 November och inleddes med följande ord af Snellman:

„Denna utmärkta uppsats, utan tvifvel den mest betydelsefulla, som stått att läsa uti en tidnings spalter i Finland, taga vi oss friheten här aftrycka på samma gång vårt blad till heder och i det lofliga ändamål att sprida densamma till en större krets af läsare. Isynnerhet skall det glädja oss att kanske få erbjuda denna läsning åt de svenska tidningsredaktioner, hvilka med så sårande förakt omförmäla, hvad man i Finland får i tryck uttala. Vi hafva vid densamma intet annat att anmärka än anonymiteten. Det är i en sak, så ren och ädel, som den Ins. förfäktar, af icke ringa vigt att en man står bakom ordet. Vi hoppas väl icke att här finna namnet på ett af dessa „snillen“, om

hvilka Morgonbladet talar, ty de uppträda ju icke. Men vore också detta namn aldrig förr hördt inom landet, det förtjenar dock från denna stund att höras".

Efter ett sådant loford från Saimas sida var det naturligt att artikelförfattaren icke längre kunde blifva obekant. Elmgrens anseende såsom en ung begåfvad skriftställare var stadgadt, och han trädde nu fram i det offentliga lifvets förgrund, der han under en följd af år blef en af de mest bemärkta personligheterna. Redan vid ingången af följande året 1845 öfvertog han jemte Fredrik Berndtson redaktionen af Morgonbladet, hvilket blad synnerligast de tre år (1845—1847), hvarunder Elmgren var medredaktör i detsamma, utmärkte sig genom en starkt prononcerad finsk nationel riktning. Af större betydelse i politiskt och litterärt afseende blef dock den verksamhet, som Elmgren kort härpå kom att utveckla såsom hufvudredaktör af och ofta ensam arbetare i det af Snellman grundade Litteraturblad för allmän medborgerlig bildning. Trött af de makthafvandes förföljelser i förening med censurens olidliga trakasserier afgick nemligen Snellman år 1849 från nämnda blads redaktion, hvilken nu på hans och Lönnrots enträgna uppmaning öfvertogs af Elmgren. Uppdraget att träda i en så snillrik och djuptänkt publicists ställe, som Snellman, var sannerligen icke det lättaste, och dock måste under dåvarande förhållanden hvarje bekymmer i detta afseende träda i andra rummet för betänkligheter af ännu mera nedslående beskaffenhet. Det lärer nemligen knappast vara någon öfverdrift att påstå att det offentliga ordets frihet i Finland aldrig, hvarken förr eller senare, varit så begränsad, så förtryckt och nära nog förqväfd, som under de fem år, 1850—1854, då Elmgren redigerade Litteraturbladet. Man behöfver endast erinra sig nådiga brefvet till censuröfverstyrelsen af den 8 April 1850, deri utgifvandet af alla finska skrifter, med undantag endast af religiösa och ekonomiska, utan afseende å deras innehåll i öfrigt, uttryckligen förbjöds, för att förstå det hänsynslösa sätt, hvarmed censuren särskildt mot den finsksinnade tidningspressen i landet då handhades. För Elmgren, som hade gjort till sin uppgift att såvidt i hans förmåga stod fortsätta Snellmans verk och låta tidskriften förblifva en målsman för den finska nationela rörelsen, blefvo dessa fem år de tyngsta och pröfvofullaste han upplefvat. De utgjordes af en oafbruten kamp mot förtryck och godtycke, mot missförstånd och tadel icke blott från motståndares, utan äfven från vänners sida samt mot svåra ekonomiska bekymmer. Med äkta finsk envishet höll dock Elmgren fast vid sitt engång åtagna i pekuniärt afseende lönlösa värf. Censorernes eller „Strykarnes", som han kallade dem, ständiga utstrykningar bragte visserligen hans sinne stundom ur jemnvigt och föranledde emellanåt till munt-

liga meningsutbyten, som icke voro af det mildaste slag, såsom t. ex. då han engång rakt i syne på censorn, professor Aminoff kallade denne „ett tyranniets blinda verktyg", men dylika muntliga utgjutelser voro också den i öfrigt rättslösa tidningsredaktörens enda vapen mot sina förtryckare. Såsom exempel på, för hvilka trakasserier han var utsatt, må anföras några fall som jag hört honom sjelf berätta. I en anmälan af en af statsrådet F. W. Pipping utgifven afhandling hade Elmgren, jemte erkännande af afhandlingens vetenskapliga förtjenster, anmärkt att stilen var något tung. Censorn strök detta omdöme, emedan det var opassande att om en ledamot i landets regering säga att hans stil var tung. På lika sätt utströks en artikel, hvari Elmgren plaiderade för att utförandet af altartaflan i Nikolaikyrkan skulle anförtros åt den inhemske målaren Ekman. Kyrkobyggnadsstyrelsen, i hvilken sutto inflytelserika personer, hade nemligen en annan åsigt, och denna fick icke antastas. En artikel om Ungerns litteratur höll censorn, skrämd af titeln, ty Ungern hade ju kort förut varit skådeplatsen för en revolution, hos sig i tre veckor samt sände den sedan till Censurkomitén, derifrån den dock med smärre utstrykningar kom såsom godkänd tillbaka. Genom dylika trakasserier hindrades emellertid som oftast Litteraturbladets regelbundna utkommande, så att t. ex. Septembernummern för år 1852 först utdelades i Februari året derpå o. s. v.

En polemik som Elmgren fick med anledning af sin anmälan af 2:dra häftet af tredje tomen af Acta Societatis scientiarum fennicae torde här förtjena beröras. Med erkännande af vetenskspsakademiers och societeters betydelse i allmänhet, ansåg dock Elmgren dem böra klandras för det slags charlataneri som har till valspråk „odi profanum vulgus", och som gjorde att deras abstrakta forskningar förblefvo främmande för den nation, hvars vetenskaps målsmän de voro. Han yrkade särskildt hvad finska Vetenskapssocieteten beträffar, att denna skulle följa franska Institutets och svenska Vetenskapsakademiens exempel och förutom de hårdsmälta akterna äfven utgifva för den stora läsande allmänheten afsedda öfversigter af sina förhandlingar. En insändare i Helsingfors Tidningar (1853, 26 Jan.) angrep Litteraturbladet skarpt för detta enligt hans tanke fiendtliga anfall mot landets enda vetenskapliga institution, samt för dess utan sakkännedom afgifna apodiktiska domslut. „Detta är nu", yttrade ins., „verkeligen att beklaga, särskildt med afseende på Litteraturbladets utgifvares obestridliga litterära förtjenster och författareförmåga, hvilka genom den ensidighet, inhumanitet och anspråksfulla ton han ofta röjer, mera skada än gagna". Elmgrens svar härpå blef en artikel i Novemberhäftet af Litteraturbladet 1852 med öfverskrift *Om fosterländsk vetenskap*, deri han bl. annat yttrar: „Läsaren erinrar sig utan tvifvel att vi alltid yrkat på nödvän-

LIBRARY

digheten för oss Finnar att vända våra blickar inåt, på egna förhållanden, och detta likaväl beträffande litteratur och vetenskap som industri och andra mer praktiska verksamhetsslag. Vi skola också framdeles fortfara med samma påminnelse, ty vi betrakta det såsom en lifsfråga för vårt lands framskridande i välstånd, odling, civilisation. Det är också Litteraturbladets lifsfråga, dess förnämsta ögonmärke, dess tendens med hvars framgång eller tillbakaskridande det står eller faller — att uppmärksamheten fästes på den inhemska litteraturens mer eller mindre lyckliga men oupphörliga sträfvan att höja sig till allt högre värde". Han påminner sedan hurusom man härintills lemnat åt utlänningar den inhemska vetenskapens tacksammaste fält. Det var en tysk, som skref den första finska historia, en svensk, som gaf oss Finlands geografi, tyskar och ryssar som skrifvit öfver landets geologi, en dansk som för den vetenskapliga verlden först framhållit finska språkets skönhet och rikedom, en rysse, som bekostat utgifvandet af ett vetenskapligt finskt lexikon o. s. v. Denna artikel som, enligt ELMGRENS egna meddelanden, utgjorde endast återstoden af det utaf censuren illa medfarna originalet i manuskript och derföre högst ofullständigt och bristfälligt återgaf, hvad han velat uttala, lemnar dock en liten inblick i den idée som besjälade ELMGREN och som utgjorde rättesnöret för hans publicistiska verksamhet. Huruvida för öfrigt ELMGRENS förslag att finska vetenskapssocieteten skulle begynna utgifva årliga öfversigter af sina förhandlingar inverkade på societetens beslut härom, är mig obekant; men visst är att första häftet af dessa öfversigter utkom endast några månader efter nyss omförmälda polemik.

Ehuru ELMGRENS kritik, särskildt öfver skönlitterära arbeten, icke alltid vann medhåll, utan stundom ådrog honom nog skarpt klander (t. ex. Runebergs bekanta, halft skämtsamma hälsning till E. att låta bli att böka i poesins rosengård) skall dock en opartisk efterverld erkänna att redaktionen af Finlands dåvarande enda litterära tidskrift handhades af ELMGREN med insigt och talang samt att den insats han härigenom lade i det fosterländska kulturarbetet icke var ringa. Såsom bevis på att samtiden också förstod att uppskatta detta må anföras följande uttalande i Morgonbladet för d. 2 December 1852: „Främst bland de icke officiela blad, som nästa år utkomma, ställa vi Litteraturbladet, hvars utgifvares ädla ihärdighet att fortfara aldrig skall kunna efter förtjenst uppskattas".

Om hösten 1844 hade ELMGREN blifvit vald till kurator för Åbo studentafdelning, och två år derefter då Åbo, Borealiska och Satakunta afdelningarna sammanslogos till en enda under benämning den Vestfinska, blef han den nybildade afdelningens förste kurator, och innehade sedan denna befattning ända

till afdelningsinstitutionens upplösning år 1852. Hans verksamhet såsom en af studentkorpsens ledande personer var enligt samtidas intyg af stor betydelse för höjandet af den fosterländska andan hos den dåvarande studerande ungdomen. Då man emellertid vet med hvilket misstroende universitetet dåförtiden betraktades af de styrande, förefaller det icke otroligt att Elmgrens popularitet hos studenterne samt särskildt hans finska sträfvanden ådragit honom de styrandes misshag och att det allmänt gängse ryktet att han var ställd under hemlig polisuppsigt icke lärer varit alldeles ogrundadt. Mahända var det också detta förhallande som i någon man utöfvat inflytande på domkapitlens omförmälda tillvägagående i fråga om Elmgrens ansökan att bli prestvigd.

Ett varaktigt minne har Elmgren förvärfvat sig i Finska Litteratursällskapets annaler. Efter Herman Kellgrens afgang blef nemligen Elmgren vald till detta sällskaps sekreterare, och innehade denna nog arbetsdryga, men då nästan lönlösa befattnirg i 15 år, eller till år 1861, då han enligt egen önskan derifrån afgick. Tidigare hade sekreteraresysslan, just tillföljd af antydda orsaker, vanligen hvarje år måst ombytas. Nu erhöll sällskapet i Elmgren en för dess syftemål varmt nitälskande, okufligt ihärdig sekreterare, som utan anspråk på lön, gaf åt sällskapets sträfvanden ny fart och förstod att i trots af de betryckta tiderna framkalla en större och lifaktigare litterär produktivitet. Elmgrens verksamhet i Finska Litteratursällskapet måste dock till undvikande af för stor vidlyftighet stå utom gränserna för detta föredrag.

I den mån Elmgren hängifvit sig åt publicistkallet, hade hans studier allt mer och mer vändt sig åt Finlands historia. Ur universitetsbibliotekets och universitetsarkivets samlingar hade han gjort flitiga utdrag, hvilka kompletterade med egna minnesanteckningar gåfvo stoffet till den så att säga kronologiska benbyggnad till Finlands historia, som han först offentliggjorde i Litteraturbladet och sedan år 1854 utgaf såsom särskild bok under namnet Finska Efämerider. I brist på annat användes detta arbete sedan under flere år vid undervisningen i Finlands historia i åtminstone några af landets gymnasier [1]).

Under hela 1850-talet var Elmgren en af de mest bemärkta uppbärarne af det litterära lifvet i Helsingfors. Der samarbete af flere erfordrades kunde man städse påräkna hans flitiga penna. Så skref han uppsatser i Fosterländsk album, höll föredrag vid litterära soireer och blef en af medarbetarne i det storslaget anlagda verket Finlands minnesvärda män. Att detta arbete, i hvilket 11 lefnadsanteckningar af Elmgren förekomma, afbröts redan med andra ban-

[1]) En ny och fullständigare upplaga af detta arbete utkom på finska år 1895 i Jyväskylä under titel „Suomalaisia Päivätapahtumia".

det, var säkerligen icke ELMGRENS fel. Hans biografier öfver biskoparne Agricola, Juusten, Ericus Erici, Rothovius m. fl. utgöra värdefulla bidrag till Finlands både kyrko- och kulturhistoria, och träffas lika litet som hans öfriga minnesteckningar af Snellmans temmeligen stränga omdöme om verket i sin helhet, nemligen att deri kritiklöst intagits lefnadsteckningar af en mängd obskura personer. ELMGRENS minnesteckningar gälla personer af stor historisk betydelse, personer af hvilka flere, såsom t. ex. Ericus Erici härigenom för första gången kommo att framträda för efterverlden i klar och oförfalskad dager. I förbigående må ock nämnas att ELMGREN uti en artikel i Helsingfors Tidningar för den 6 Februari 1856 föreslog att jubelfest till minne af kristendomens införande i Finland för 700 år tillbaka skulle firas den 18 Juni 1857 eller på årsdagen af S:t Henriks bens öfverflyttning från Nousis till Åbo domkyrka. De tvifvelsmål, som af kritiken uttalats angående Erik den heliges korståg, och hvilka vi för icke så länge sedan voro i tillfälle att höra upprepas, voro för ELMGREN icke obekanta, utan framhöllos och bemöttes med sakkännedom. Jubelfesten firades också sedan såsom allmän tacksägelse- och bönedag öfver hela landet på den af ELMGREN föreslagna dagen.

När Finska Litteratursällskapet beslöt utgifva Porthans samlade arbeten, uppdrogs redaktionen åt ELMGREN och magister August Schauman. ELMGREN öfvertog dock snart ensam hela arbetet i fem delar och slutförde det äfven. Likaså redigerade han äfven G. W. Wallins reseanteckningar från orienten i 4 band. I tidskriften Suomi författade han bland annat tvenne ypperliga sockenbeskrifningar, den ena öfver sin födelseort Pargas och den andra öfver S:t Mårtens socken.

Det behöfver väl knappast tilläggas att ELMGRENS nu berörda för dåvarande förhållanden synnerligen stora litterära produktivitet var i materielt hänseende föga om än alls lönande. Den enda säkra inkomst han på denna tid och under en lång följd af år hade att påräkna var alltifrån hösten 1848 den lilla lönen, såsom amanuens vid Universitetsbiblioteket. Van att lefva med litet och utan anspråk på några synnerliga beqvämligheter i lifvet, skulle han härmed och med öfriga små biinkomster dock kommit till rätta, om han icke iklädt sig borgensförbindelser för andra och i följd deraf nödgats skuldsätta sig. De ekonomiska bekymmer, som föranleddes häraf äfvensom af hans oaflåtliga bemödanden att småningom afbetala skulderna — ty för sådana hyste ELMGREN en afgjord fasa — nedtryckte i synnerhet under medlet af 1850-talet hans lynne och qvarlemnade sedan för hela lifvet spår i en viss allvarlig och tillbakadragen slutenhet, som dock icke uteslöt mellanstunder af glad, förtrolig samvaro med likatänkande vänner.

I universitetsbiblioteket hade Elmgren öfvertagit vården af fennica eller afdelningen för Finlands litteratur. I den härför upplåtna salen såg man honom under mer än trettio års tid dagligen sitta vid sitt bord, sysselsatt med bokförteckningar och andra biblioteksarbeten. Varaktiga frukter af hans verksamhet på detta område äro de tvenne öfversigter af Finlands litteratur, hvilka tillsammans omfatta en tiderymd af öfver 300 år eller tiden från 1542 till 1863, och hvilka han utgaf såsom akademiska disputationer för bibliotekarietjensten. För bibliografer komma dessa arbeten alltid att ega ett bestående värde, likasom de också fördelaktigt vittna om sin författares vidsträckta beläsenhet och samvetsgranna samlarenit.

Till Elmgrens biblioteksgöromål kan äfven räknas de forskningar han anställde i finska statsarkivet för att derifrån till biblioteket öfverföra de gamla pergamentshandskrifter, hvilka användts såsom omslag på äldre räkenskapsböcker, och derigenom delvis blifvit räddade för efterverlden. Under dessa forskningar anträffade han bland annat det bekanta fragmentet af handskriften *Om konunga och höfdinga styrelsen.* Elmgrens upptäckt, som afgjorde den långvariga tvisten om detta svenska språkmonuments från medeltiden äkthet, väckte stort uppseende, och om än det mindre grannlaga sätt, hvarpå en svensk vetenskapsman skyndade att, begagnande sig af Elmgrens välvilliga tillmötesgående, i förtid publicera handskriften, för en tid undanskymde dess verklige upptäckare, är och förblir dock förtjensten af upptäckten Elmgrens.

År 1862 utnämndes Elmgren till vice bibliotekarie vid universitetsbiblioteket. Någon vidare befordran hade han här icke; ty vid besättandet af bibliotekariebefattningen, som han särskilda gånger sökte, blef han städse förbigången af yngre medsökande. Anledningen härtill torde åtminstone till någon del få tillskrifvas Elmgrens karaktärs egenheter, hvilka af flertalet Consistorii Academici ledamöter ansågos göra honom för föreståndareskapet vid biblioteket mindre lämplig. Elmgren hängde nemligen oböjligt och envist fast vid den åsigt, som han efter långvarigt och moget beprövande funnit vara den rätta. För nya läror och nya systemer hyste han, ju äldre han blef, en afgjord motvilja. Han förblef derföre också oberörd af alla nyare, mera systematiska biblioteksmetoder och fortfor att hålla sin finska biblioteksafdelning uppställd enligt gammal sed, sålunda att böckerna ordnades efter deras storlek och till någon del, originelt nog och såsom en reminiscens från Pippings tider, kronologiskt efter boktryckeriernas ålder. Då engång efter en biblioteket undergången reparation och medan Elmgren åtnjöt sin sommarsemester, hans yngre tjenstekamrater företagit sig att under flere dagars arbete systematiskt omställa hela boksamlingen, blef Elmgrens första göra, sedan han åter vidtagit med tjenst-

göringen, att med stort besvär omflytta böckerna och ordna dem på det gamla sättet.

Efter sin afgång från redaktionen af Litteraturbladet hade ELMGREN efterhand upphört att synas på det offentliga ordets tornerplats. Kampen der, som han dock fortfarande följde med lefvande intresse, och hvilken nu utkämpades under vida gynsammare yttre och inre förhållanden, ansåg han sig kunna öfverlemna åt yngre krafter, och detta med så mycket större skäl, som han icke besatt den färdighet i finska språket att han på detsamma kunde uppträda såsom skriftställare. Sin egen litterära verksamhet vände han åt vetenskaperna. Kallad till ledamot i särskilda lärda samfund, deribland i Finska Vetenskapssocieteten år 1872, bevistade han, så länge hälsa och krafter medgåfvo, träget hvarje deras sammanträde. Finska Historiska Samfundets och Finska Vetenskapssocietetens förhandlingar innehålla också flere uppsatser af hans hand. På societetens årsdagar 1874, 1881, 1882 och 1884 höll han minnestalen öfver societetens aflidne ledamöter friherre J. G. von Bonsdorff, Fredrik Cygnaeus, Johan Vilhelm Snellman och Elias Lönnrot. Under sina senaste lefnadsår återvände ELMGREN till sin ungdoms studier. Särskildt sysselsatte han sig med Nya testamentets kronologi och sökte genom en kritisk sammanställning af källurkundernas, Josephi och kyrkofädernas uppgifter jemte äldre och nyare bibelforskares utläggningar, besvara denna nog invecklade och svårlösta fråga. Dessa forskningar, likasom äfven hans sista arbete *Bevis för skrifternas i Nya Testamentet äkthet* ådagalägga för den uppmärksamme läsaren, trots sin populära form och i trots af att de delvis äro kompilationer af äldre apologeters verk, att de äro resultater af långvariga, trägna studier inom en litteratur, som omfattar många århundraden och i afseende å sina alsters mångfald och vidd knappast torde ha sin like. De ådagalägga derjemte ELMGRENS orubbliga öfvertygelse om sanningen af den lära, hvilken han icke blott till det yttre bekände.

Till ELMGRENS litterära qvarlåtenskap bör också räknas hans handskrifna dagboksanteckningar, hvilka i tryck skulle fylla flere volymer, och hvilka till den del jag varit i tillfälle att genomögna dem, innehålla en stor mängd intressanta detaljer från vår samtida historia. De förtjena utan tvifvel att bevaras för efterverlden.

Sedan år 1862 hade ELMGREN lefvat i ett lyckligt äktenskap med kyrkoherdens i Reso och Nådendal, prosten Karl Heickells dotter HILDA KAROLINA, i hvilket äktenskap han hade en son och tre döttrar. Ett oväntadt arf efter hans sparsamma föräldrar satte honom i tillfälle att köpa sig ett eget landtställe, det lilla Munkholm i Esbo sockens skärgård. Här tillbringade han i

kretsen af sin familj alla somrar, sysselsatt med trädplanteringar och trädgårdsskötsel äfvensom med botaniska iakttagelser och studier, för hvilka han ända från ungdomen haft stor fallenhet. Den bergfasta helsa, hvaraf han nästan oafbrutet varit i åtnjutande, bröts först de två senaste åren af hans lif. Dock hade han krafter qvar att på sin 80:de födelsedag emottaga de hyllningar och lyckönskningar, som från talrika håll, deribland också från hans gamle vän och promotionskamrat skalden Topelius, kommo honom till del. Särskildt gladde det honom att se Vestfinska studentafdelningen manngrant, åtföljd af studenternas sångarkör, hos sig, och att ännu engång få höra den friska studentsången. Icke många dagar derefter skulle samma sång ljuda på hans graf. Han afled nemligen nio dagar derefter, den 3 November 1897, efterlefd af sörjande maka, son och en dotter samt måg och dotterdotter.

För sina vetenskapliga förtjenster kreerades Elmgren år 1860 till honorär doktor i historisk-filologiska fakulteten, och erhöll tretton år senare (1873) extra ordinarie professors namn och värdighet. Dessa utmärkelser jemte det att han 1856 hugnats med en briljanterad ring och år 1866 utnämnts till riddare af S:t Anne ordens tredje klass blefvo de offentliga erkännanden, som kommo Elmgren till del, och voro kanske äfven i någon mån att betraktas såsom ersättning för uteblifven tjenstebefordran.

Elmgren betraktades nog allmänt såsom ett original. Såväl i hans yttre som inre tyckte man sig märka egenheter, som skilde honom från öfriga hvardagsmenniskor. Hans yttre uppträdande påminte om en gammaldags lärd, som med tanken riktad på det väsendtliga i hvarje sak icke hade någon blick för oväsendtligheterna och derföre äfven föga bekymrar sig om modets fordringar, med ett ord för hvilken kärnan är allt, men skalet intet. Äfven hans uttalanden, såväl de mundtliga som skriftliga, voro fria från allt omhölje, alla oratoriska prydnader och känsloutgjutelser. Sin åsigt uttryckte han kort och osminkadt samt utan hänsyn till personer. Hvad han engång efter moget beprófvande funnit vara rätt, det vidhöll han också sedan i trots af alla inkast och försök till motbevis. Sjelfva Johan Vilhelm Snellmans öfverlägsna dialektiska förmåga strandade emot Elmgrens orubbliga, korta gensvar: „Nej, icke är det så“. Lika oböjligt som han vidhöll sina åsigter, lika oböjlig var han också i arbetet för det lefnadsmål, som han ställt för sig, och efterverlden skall, då våra kulturförhållanden under detta sekels midt af densamma skärskådas, säkerligen erkänna att det var en lycka för den nyvaknade finska nationela rörelsen att under svåra pröfningstider ha stöd i sådana varmt fosterländska, plikttrogna, insigtsfulle och ihärdiga bärare som Sven Gabriel Elmgren.

Sven Gabriel Elmgrens utgifna skrifter.

1845—1847. Redigerade tidningen Morgonbladet (jemte D:r F. Berndtson).
1845. Lärobok i dogmhistoria af F. K. Meier. Öfversättning, tr. i Helsingfors.
„ Om den svenska bildningens förhållande till den finska. Ingår i Fosterländskt Album II.
1846. Hutterus redivivus eller den Evangelisk-Lutherska kyrkans dogmatik. Öfversättning från 6:te upplagan. Första bandet.
1847. D:o. Andra bandet.
„ Berättelse om Finska Litteratursällskapet under de första 17 åren. I tidskriften Suomi.
„ Beskrifning öfver Pargas socken. I Suomi.
„ Michael Agricola. Ingår i Fosterländskt Album III.
1849. Kristna kyrkans öden. Bihang till Hübners bibliska historia. Tavastehus.
1850—1854. Litteraturblad för allmän medborgerlig bildning.
1853. Peder Särkilax. Lefnadsteckning i Finlands minnesvärda män I.
„ Mårten Skytte. „ „ „ „ „ „
1854. Mikael Agrikola. „ „ „ „ „ „
„ Paul Juusten. „ „ „ „ „ „
„ Karl Gustaf Veman. „ „ „ „ „ „
„ Finska Efämerider. Tr. i Helsingfors.
1855. Erik Erikson. Lefnadsteckning i Finlands minnesvärda män II.
„ Nils Ehrensköld. „ „ „ „ „ „
„ Thomas Rajalin. „ „ „ „ „ „
1856. Mårten Stodius. „ „ „ „ „ „
„ Isak Rothovius. „ „ „ „ „ „
„ Torsten Stålhandske. „ „ „ „ „ „
1857. Beskrifning öfver S:t Mårtens socken. I Suomi.
1859—1873. Henrici Gabrielis Porthan opera selecta. I 5 band. (Utgifningen ombesörjd af Elmgren.)
1859. Georg August Wallin, föredrag. I Lännetär I.
1861. Erik Kolmodius skådespel Genesis aetherea. I Lännetär II.
„ Om förarbeten till Finlands lärdomshistoria. „ „
„ Öfversigt af Finlands litteratur ifrån år 1542 till 1770. Akademisk afhandling.
1863. Nådendals klosterruiner. Helsingfors.
1864—1866. Georg August Wallins reseanteckningar från Orienten. I 4 band, redigerad af Elmgren. Tr. i Helsingfors.
1864. Ett skådespel af Petrus Pachius. Lännetär III.
1865. Öfversigt af Finlands litteratur ifrån 1771 till 1863. Akademisk afhandling.
1868. Fornskrifter. I. Fragment af boken Om konunga styrilsi och höfdinga. II. Klosterreglor för Wadstena nunnor. III. Invigningsformulär för klosterfolk. I Historiallinen Arkisto II.
1869. Poesins tillstånd i Finland på 1680- och 1690-talet. Lännetär IV.
1874. Gustaf Renvall, lefnadsteckning. Lännetär V.

1874. Minnestal öfver J. G. von Bonsdorff. Acta Societatis Scient. Fenn. T. X.
„ Om Aksborg. Historiallinen Arkisto IV.
1875. Slägten Elmgren. Genealogiska anteckningar. Helsingfors.
1876. Finlands befolkning 1553. Historiallinen Arkisto V.
„ Ödeshemman i Pargas åren 1573—1727. Hist. Ark. V.
„ Riksdagsmannaval i Åbo 1769. Hist. Ark. V.
1878. Anteckningar af C. G. Leistenius och C. Leistén (1728—1807). Hist. Ark. VI.
„ Otavala spinaskola. Hist. Ark. VI.
„ Johannes Bilmark. Hist. Ark. VI.
1882. Minnestal öfver Fredrik Cygnaeus. Acta Soc. Sc. F. Tom. XII.
„ Minnestal öfver Johan Vilhelm Snellman. Acta Soc. Sc. F. Tom. XII.
1883. Landskapet Edens floder. Öfversigt af Finska Vet. Soc. förhandl. XXV.
„ Rätta årtalen för Kristi födelse och död. Öfversigt af F. Vet. Soc. förh. XXV.
1884. Minnestal öfver Elias Lönnrot. Acta Soc. Sc. F. Tom. XIV.
1885. Kronologiska data beträffande aposteln Pauli verksamhet. Öfv. af F. Vet. Soc. förhandl. XXVII.
1886. Om dagen för Kristi födelse. Öfv. af F. Vet. Soc. förhandl. XXVII.
1888. Evangeliska historiens kronologi. Helsingfors.
1889. Frans Johan Rabbe, lefnadsteckning. Hist. Ark. X.
„ Sveaborgs bombardemang. Hist. Ark. X.
1890. Israelitiska historiens kronologi enligt gamla testamentets historiska böcker. Helsingfors.
1891. Finska arméens gång öfver Neva 1708. Hist. Ark. XI.
„ Hafsvattnets sommarvärme åren 1871—1890 observerad å Munkholm i Esbo skär. Öfversigt af F. Vet. Soc. förhandl. XXXIII.
1892. Om biskop Erikssons bibelöfversättning. Hist. Ark. XII.
1895. Suomalaisia Päivätapahtumia, uusi lisätty toimitelma. Jyväskylä.
„ Bevis för skrifternas i Nya testamentet äkthet. Helsingfors.

Dessutom biografier i Biografinen Nimikirja äfvensom uppsatser och afhandlingar i tidningar och tidskrifter.

5 WHSE 04168